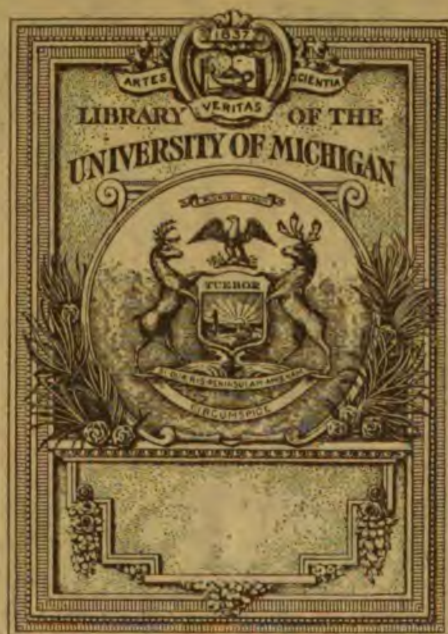


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE



ARITHMETICA DEMONSTRADA THEORICO-PRACTICA PARA LO MATHEMATICO Y MERCANTIL.

EXPLICANSE

LAS MONEDAS, PESOS, Y MEDIDAS DE LOS Hebreos, Griegos, y Romanos; y de eſtos Reynos de Eſpaña, conferidas entre sì:

COMPUESTA

POR JUAN BAUTISTA CORACHAN,
Maeſtro en Filoſofia, Dr. en Sagrada Theologia, y Cathedratico de Mathematicas en la Univerſidad de Valencia ſu Patria.

ADVIERTASE, QUE PARA NO TRASTOCAR LAS Operaciones, la moneda de oro, y plata Caſtellana queda en el miſmo valor que tenia en el año 1699. que fue quando saliò à luz la primera impreſſion deſta Obra, ſupueſto no es circunſtancia que varie el modo de obrar.

Con licencia, Barcelona: Por JUAN PIFERRER Impreſſor, Plaza del Angel. Año 1719.

PROLOGO.

TODO el empleo de la Arithmetica es tratar de los numeros, unas veces exercitando ſus operaciones, y otras inquiriendo, y conſiderando ſus propriedades. En quanto à lo primero es *Practica*, y en lo ſegundo *Eſpeculativa*. Pero ſi eſtà aplicada al trato comun de compras, ventas, ganancias, trueques, compañias, &c. ſe dice *Mercantil*; porque principalmente aprovecha à los Mercaderes, que con mas frequencia tratan de eſto: Y ſi eſtá en numeros abſtractos, ò no aplicados à coſas determinadas, eſpeculando ſus propriedades, ſe dice que con eſpecialidad ſirve para la Mathematica.

Eſtas partes todas de la Arithmetica comprehendo en eſte *tratado*; y aunque por sì ſolas pudieran ſer baſtante motivo para eſcrivir, y ſuficiente materia para un volumen, pero no impelió la mano à tomar la pluma otra coſa, que el dar la demonſtracion: porque entre las muchas Arithmeticas que reconoce el Orbe literario, apenas ay una que demueſtre las reglas, y que en eſto no exceda los terminos del arte menor, ò mendigue noticias de otra ciencia.

Aqui pongo las demonſtraciones con ſolos numeros, reduciendolas à una medianìa, ſin uſar de todo el rigor Mathematico, para que las puedan entender los principiantes, y no olvidando que las han de leer los Maeſtros.

Los parrafos que contienen alguna coſa eſpecial, eſtàn numerados por ſu orden, para citarlos facilmente; porque he tenido por mejor citar el parrafo, que la pagina, ò capitulo. Las citas eſtàn entre un parenteſis, como ſe vé en la

pri-

primera linea de la pagina 36. donde se halla esta nota (21), la qual significa, que en el parrafo 21. se explica lo que en dicha pagina es menester, y assi de las demàs.

Y como para el comercio sea necessaria la noticia de las monedas, pesos, y medidas, alomenos de los Reynos circunvecinos, entre los quales es mas frequente el trato, se han puesto en la segunda parte de los proemiales las de Castilla, Aragon, Valencia, y Cataluña, confiriendolas entre sì. Y aviendo tomado la pluma para escrivir deste assunto, me ha parecido añadir las de los Hebreos, Griegos, y Romanos, para la inteligencia de muchos lugares de la Sagrada Escritura, de Historiadores, y Autores profanos.

Pero advierto, que en las monedas de Castilla, hablo segun el tenor de la ultima pràgmatica, por la qual se subiò el valor de la planta su quarta parte; de suerte, que el real de à ocho Mexicano, Segoviano, ò Sevillano que antes valia ocho reales de plata, y doce de vellon, y aora segun pràgmatica vale diez reales de plata, y quinze de vellon, no siendo yà el real de plata sencillo la octava parte del dicho real de à ocho, sino la decima; pero vulgarmente el real de plata no se entiende la decima, sino la octava parte del real de à ocho Mexicano; y el valor de este en vellon no son quince reales, sino quince reales, y un ochavo.

Ultimamente prevengo al que leyere, que por mi poca salud no he podido assistir à las correcciones, pero las he encomendado à persona inteligente, y assi, si acaso en ellas, ò en la substancia de la Obra hallàre algun descuydo, confio que con su grande prudencia le corregirà benignamente, teniendo en la memoria que somos hombres, y podemos errar.

PROE-

PROEMIALES.

PROEMIALES llamamos à las noticias generales de algunos terminos, y otras cosas concernientes, que segun buen orden se deven suponer antes del tratado principal. No es nuestro intento amontonar noticias, sino traer las mas necessarias con toda individuacion, y claridad. Contienen dos partes; la primera declara los Terminos: la segunda, las Monedas, Pesos, y Medidas.

PARTE I.

EXPLICANSE ALGUNOS TERMINOS.

No explicamos aqui todos los terminos, sino los mas generales, dexando los otros para su devido lugar; porque deste modo, à mas de tener las noticias mas recientes, evitamos al principiante el enfado de haverlos de buscar à cada passo.

DE LA ARITHMETICA.

1 ARITHMETICA, es Ciencia que trata de los numeros. Toma su nombre de la voz Griega *Arithmos*, que es *numero*, y de la Latina *Metior*, que significa *medir*. Dividese en *Especulativa*, y *Practica*; aquella considera las propriedades de los numeros: y esta usa dellas.

De la Unidad.

2 Unidad, segun Euclides *en la defin.* 1. *del lib.* 7. es aquella por la qual qualquier cosa se dice *una*; como por la unidad decimos un Angel, un hombre, una piedra. De otro modo: Unidad es la denominacion por la qual decimos *uno*; como por la blancura decimos *blanco.* Comunmente se toma por la cosa denominada *una*, de modo, que adelante, lo mismo entenderèmos por *unidad*, que por *uno.*

3 La unidad es indivisible en aquella accepcion que es unidad, pero en otra puede ser divisible; como un dia en razon de dia es indivisible, porque no puede haver menos dias que uno; pero en razon de horas se divide en veinte y quatro horas, y entonces ya no es unidad, sino numero compuesto de veinte y quatro unidades. Esto necessita de mayor explicacion.

Para evitar la confusion, nacida como hija legitima de la multitud, fue preciso nombrar à ciertos agregados de unidades con nombres de unidad; como à las veinte y quatro horas llamarlas *Dia*; à trecientos sesenta y cinco dias, *Año*; à cien años; *Siglo.* Porque si no fuera deste modo, para nombrar un dia aviamos de decir veinte y quatro horas; para dos dias, quarenta y ocho horas; para tres, setenta y dos, &c. que fuera una confusion intolerable. Pues hablando de siglos, un siglo es unidad, pero tratando de años, no es ya unidad, sino numero compuesto de cien años, y entonces cada año es unidad; pero si consideramos dias, contiene trecientos sesenta y cinco dias.

Lo mismo significamos mas claramente quando decimos *un par, una terna, una quadrilla, una decena, un millar, un millon*, y otros nombres semejantes, con los quales expressamos numero, y juntamente unidad, porque todo aquel numero le consideramos como à uno. Assi mismo de qualquier *unidad*, ò por mejor decir, de qualquier *uno*, podemos tomar la mitad, tercio, quarto, &c. con tal que sea divisible, pues no diremos medio Angel, porque es indivisible.

Con esto quedarà entendido de raiz, como los Arithmeticos, hablando de la unidad dicen que es indivisible, y tratando de los quebrados assientan, en que el quebrado es parte, ò partes de la unidad; en lo qual parece que ay inconsequencia de doctrina, porque si la unidad es indivisible, como tiene partes? Pero en la verdad es muy consequente, porque es indivisible en una accepcion, y divisible en otra, como queda advertido; que es lo mismo que decir, que la unidad es

in-

indivisible por lo formal, y divisible por lo material, con tal que la materia se pueda dividir.

Del Numero.

4 Numero es *una multitud compuesta de unidades*; asi le difine Euclides *en la difin.* 2. *del lib.* 7. Parece que este otro modo de difinirle explica algo mas: *Es una coleccion de unidades* como dos, tres, quatro, &c. Porque el numero no es qualquier multitud, ò agregado de unidades, como un monton de piedras sin orden, ni distincion; sino distintas, y ordenadas por el entendimiento, que las agrega, lo qual explica el nombre de *coleccion*; porque quien coge, ò ajunta, precissamente procede con algun orden, y distincion.

Es comun sentir de los Filosofos, que el numero depende del entendimiento, que agrega, y ordena las vanidades, formando diferentes numeros; y por esso dicen con Aristoteles, que el numero està en el Alma, porque si no huviera quien numeràra, no avria numero, ò cosa numerada. Es propio de los racionales el numerar; y assi preguntando Neoclides à Platon: *Por què el hombre es el animal mas sabio de todos*? Respondiò agudamente: *Porque sabe contar.* Los brutos no numeran, sino que con su conocimiento material conocen muchas unidades sin agregarlas; solo perciben *una*, *uno*, *uno*, pero no *tres*.

Para dar à entender la sobredicha coleccion de unidades, distingue Caramuel con sutileza en el proemio de su Arithmetica dos actos de entendimiento; el uno que conoce muchas unidades, y el otro que las numera, los quales explica con un caso donoso, que le escriviò un amigo. Dispertò cierto hombre, y oyendo el Relox contò las horas assi: *Una*, *una*, *una*, *una.* Viendo, pues, este desorden, añadiò: *Delira este Relox, porque ha dado quatro veces la una.* Dixera yo que èl delirava, porque avia de agregar las unidades, y no contarlas cada una de por sì. Conociò multitud de unidades, pero no las uniò.

5 De lo dicho consta claramente, que la unidad no es numero, sino principio, y raìs de todos los numeros; porque agregando unidades nace el numero que llamamos *Entero*, y tomando parte, ò partes de la unidad, como se dixo antes, sale el numero que decimos *Quebrado.* Entrambos numeros, desde la unidad, como à termino comun pueden proceder infinitamente, aquel creciendo, y este menguando; porque añadiendo unidades crece el entero, y tomando partes de la unidad se disminuye el quebrado.

6 El numero se puede considerar en dos maneras; la primera

quando expressa alguna especie, como quando decimos, dos Angeles, tres hombres, quatro piedras, &c. La segunda quando no se determina la especie, como dos, tres, quatro, cinco, &c. sin declarar si son Angeles, hombres, ò piedras. Los numeros de la primer diferencia se dicen *Contractos*, y los de la segunda *Abstractos*. Destos usarèmos de ordinario.

De los Guarismos.

7 Guarismos, ò cifras, son las notas, ò caracteres con que se escriven los numeros. No han sido siempre unos mismos; ha avido grande variedad, assi en Naciones, como en diferentes tiempos. Los primeros Arithmeticos escrivan los numeros con puntos, repitiendolos tantas veces como tenia unidades el numero. Perdianse de vista, y recurrieron à lineas, de las quales despues formaron diversos guarismos.

La letra Hebraica *Jod* estuvo muy usada al principio, para expressar los numeros, repetidas tambien tantas veces como unidades. De aqui deviò tomar origen, el poner antiguamente tres letras Jod para significar à Dios Trino, como lo dice Caramuel en el proemio de su Arithmetica.

Los Romanos en sus principios, como refiere Polydoro *lib. 1. de rerum invent. cap. 19.* cada un año fixavan un clavo en las paredes del Templo de Jupiter, para significar el numero de los años, y Consulados, sirviendoles los clavos de guarismos en sus anales. Pero despues usaron de las letras por guarismos, como luego dirèmos.

En la China, como lo assegura el P. Martin de Martin en su *hist. de la China lib. 1. decada 1.* se estila contar por unos granos ensartados en un hilo de hierro, los quales subiendo, y baxando, indican los numeros. Casi con este genero de cuenta suelen significar las suyas algunos Mercaderes de la Europa, pues disponen unos calculos en ciertas lineas, y circunstancias, que con facilidad señalan los numeros, y por esso à su Arithmetica la llaman *Calculatoria*.

Los Caldeos, Assirios, Hebreos, Griegos, y Romanos no tenian diferentes guarismos de las letras con que escrivan. Pero entre estas Naciones avia alguna diferencia, porque los Hebreos usavan de todas sus letras; los Romanos de algunas; y los Griegos añadian caracteres, como lo notò en su Arithmetica Geronimo Muños, Cathedratico de Mathematicas, y Lengua Hebraica en esta Universidad de Valencia.

Nosotros usamos de ciertos caractères, que segun Abenragel en la in-

introduccion à su Astronomia, inventaron los Bracmanes en la India Oriental, de los quales los tomaron los Arabes, y despues los introduxeron en España en tiempo del Señor Rey Don Alonso el Sabio; y por su grande utilidad los ha admitido casi todo el Orbe. Estos guarismos, solamente son los diez siguientes.

Uno	Dos	Tres	Quatro	Cinco	Seis	Siete	Ocho	Nueve	Zero.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	0.

8 Cada uno destos guarismos, tomado por sì solo, significa tantas unidades, como el lugar que ocupa en la presente serie. Solo el zero por sì no es significativo, pero puesto à la derecha de otro guarismo, ò numero, aumenta su valor diez veces, como luego dirèmos.

No tiene la Arithmetica otros guarismos; con ellos, acompañados unos con otros, expressa todos los numeros por grandes que sean; assi como la Gramatica compone todos los vocablos con solas sus 23. letras. Antes que entrèmos á tratar de los numeros, serà bien que empleemos algun tiempo en el *Numerar*, y *Notar*, que son leer, y escrivir Arithmetico; porque quien no supiere estas dos cosas, en vano espera entender la cuenta.

De la Numeracion.

9 Numeracion, á quien vulgarmente llaman *Cuenta*, es la expression del valor de un numero escrito por sus proprios guarismos; como que el 24. significa veinte y quatro; y el 40. quarenta. Aqui se deve advertir, que no se han de explicar los numeros por estos nombres: *Dos veces, tres veces, quatro veces, &c.* los quales no declaran la coleccion de unidades; sino por estos otros: *Dos, tres, quatro, &c.* que mas claramente expressan la dicha coleccion; con que no dirémos *veinte y quatro veces uno*, sino *veinte y quatro.*

Esto podemos explicar facilmente en los Reloxes, que pues en otra ocasion nos valimos dellos, no irèmos desconcertados, si nos bolvemos à valer otra vez. Supongo que quatro Reloxes succesivamente tocan cada uno la *una*; entonces decimos, que han dado quatro vezes la *una*, no que son las *quatro*; porque no queremos hacer coleccion; pero quando un Relox da quatro golpes, contamos las quatro, porque aora queremos numerar, ò hacer coleccion.

Es la numeracion artificiosa, y paraque el principiante no tropiece

ce en el primer passo, serà bien que atienda con cuydado á lo siguiente. Porque toda la dificultad consiste en explicar, como con solos los diez guarismos, que señalamos arriba (8) se pueda escrivir, y significar qualquier numero; porque entendido esto bien, quedará llano el modo de numerar.

10 Pues para mayor inteligencia desto, comienzo á contar desde la unidad, diciendo: 1. uno, 2. dos, 3. tres, 4. quatro, 5. cinco, 6. seis, 7. siete, 8. ocho, 9. nueve. Y porque ya no tenemos mas guarismos significativos, es precisso que otra vez nos valgamos de los mismos, poniendo 1. y un zero para 10. diez, que es una decena. Aqui ya tenemos dos guarismos, de los quales el 0. no es significativo, solo sirve de llenar lugar, paraque el 1. passe al lugar segundo.

Aora al segundo guarismo van acompañando primeramente todos los guarismos deste modo 11. once, que es una decena, y uno; 12. doce, esto es una decena, y dos; 13. trece, que es una decena, y tres, y assi prosiguiendo hasta que todos le ayan acompañado, y se ayan cumplido dos decenas que son 20. veinte. Luego todos los guarismos buelven à acompañar al 2. del 20. hasta que llega à tres decenas, que son 30. treinta. Al 3. del 30: acompañan otra vez todos los mismos guarismos hasta, que sube á quatro decenas, que son 40. quarenta; y assi prosiguiendo hasta que se cumplen diez decenas, que son 100. ciento. En donde por el diez, se pone 10. y porque este diez es de decenas, se pone otro cero, con que tenemos ya tres guarismos.

Aora al 1. del 100. van acompañando todos los guarismos de la primer centena, que son desde 1. hasta 99. hasta que cumplen dos centenas, que son 200. ducientos. Despues al 2. de 200. acompañan otra vez los mismos guarismos, hasta que hacen tres centenas, ò 300. trecientos; y con este orden, prosiguiendo hasta cumplir diez centenas, que son 1000. mil donde ay quatro guarismos, pues por el diez se ponen 10. y por ser de centenas, y estas tener dos ceros, se añaden otros tantos, con que son quatro. Y assi prosiguiendo infinitamente.

11 Atendiendo, pues, con atencion al sobredicho progresso de la cuenta, constarà con evidencia lo primero, que la numeracion es circular decenaria; porque procede por periodos de diez, esto, es, numèra primero diez; despues diez decenas, que son ciento; despues diez centenas, que son mil; diez millares que son diez mil, y assi infinitamente.

Y aunque es verdad que se pudo introducir otra numeracion que pro-

procediera por diferentes periodos, de dos, de tres, de quatro, &c. como en la musica procede por octavas, y en la Astronomia antigua por sexagenas; pero nuestra numeracion decenaria es la mejor, porque sus periodos son muy proporcionados, ni sobrado grandes, ni pequeños: Y puede ser que atendiendo á los diez dedos de las manos, paraque por ellos pudiessemos contar, introduxessen los primeros Artihmeticos esta numeracion.

12 Lo segundo, que el orden de los lugares, ò assientos de los guarismos quando estàn juntos, procede de la mano derecha, respeto del que lee, ò escrive, àcia la izquierda; porque fueron inventados en *los pueblos Orientales* (7) donde suelen escrivir en muchas partes de la derecha à la izquierda, como los Hebreos. Con que en qualquier numero, como en este *826.* el primer guarismo es el de la mano derecha, que es el *6.* y el ultimo el de la izquierda, que es el 8. Esto quede advertido para siempre.

13 Lo tercero, que quando los guarismos van acompañados unos *con otros*, tienen dos valores: el uno por lo que el mismo guarismo *significa*; y *el otro* por corazon del lugar que ocupa; porque en el primer lugar denota unidades; en el segundo, decenas; en el tercero centenas, &c. como se verá en la tabla numeratoria, que luegó darèmos. *El* segundo valor se contrae, y determina por el primero, pues un mismo guarismo, con solo mudar de lugar, muda de valor.

De suerte, que un guarismo solamente por mudar de lugar sube à otro grado de valor: Sirva de exemplo este numero 888. que segun predixo la Sybila Cumana, es la suma del valor numerico de las letras del Dulcissimo Nombre de JESUS, escrito en Griego, en sentir de Beda sobre el cap. 2. de San Lucas. En el qual numero, el primer guarismo vale lo que el significa, que son ocho unidades; el segundo vale diez veces mas que lo que èl significa, que son ocho decenas, ò ochenta; el tercero, cien veces mas que lo que èl denota, esto es, ocho centenas, ù ochocientos: Con que todo valdrà *ochocientos ochenta y ocho.*

Lo mismo podiámos aver explicado en este otro numero *666.* seiscientos sesenta y seis aunque numera cosa bien diferente, pues es el numero del nombre del Antichristo: como lo profetizò San Juan en el cap: 13 de su Apocalip. y en este otro *6666.* seis mil seiscientos sesenta y seis, que es numero de una Legion. Pero bastan los exemplos.

14 Todo el progresso de la numeracion está decifrado en la tabla fi-

ſiguiente, que aunque es infinito, pero como và por periodos ſemejantes, pocos baſtan para ſu inteligencia.

Tiene dos colunas; en la primera eſtàn los numeros, que indican los lugares de los guariſmos, primero, ſegundo, tercero, &c. la ſegunda contiene los nombres de la numeracion, correſpondientes à cada lugar: unidad, decena, centena, &c.

Si atendemos à la diſpoſicion de la tabla hallarèmos, que de ſeis en ſeis lugares buelven los miſmos nombres, ſolo con la diferencia, que en el primer ſenario ſon unidades ſencillas; en el ſegundo, unidades de cuento, ò millon; en el tercero, unidades de bicuento, ò millon de millon; en el quarto, unidades de tricuento, ò de millon de millon de millon; en el quinto, quadricuento, y aſsi infinitamente.

Tabla Numeratoria.

Lugar.	*Valor.*
1.°	Unidad.
2	Decena.
3	Centena.
4	Millar.
5	Decena de millar.
6	Centena de millar.
7	Cuento, ò millon.
8	Decena de cuento.
9	Centena de cuento.
10	Millar de cuento.
11	Decena de millar de cuento.
12	Centena de millar de cuento.
13	Bicuento, ò millon de millon.
14	Decena de bicuento.
15	Centena de bicuento.
16	Millar de bicuento.
17	Decena de millar de bicuento.
18	Centena de millar de bicuento.
19	Tricuento, ò millon de millon de millon.
20	Decena de tricuento.
21	Centena de tricuento.
22	Millar de tricuento.
23	Decena de millar de tricuento.
24	Centena de millar de tricuento.
25	Quadricuento.
	&c.

De ſuerte, que eſte nombre *Cuento*, ò *Millon*, ſe repite una vez menos que el numero del ſenario; y aſsi en el primer ſenario no ſe nombra cuento; en el ſegundo cenario ſe dice cuento, ò millon una ſola vez, porque es el ſegundo ſenario; en el tercero ſe dice millon de millon, ò abreviando *Bicuento*, que es nombrarle una vez menos que el lugar tercero del ſeñario; en el quarto ſe dice millon de millon de millon, ò tricuento; y aſsi de los demàs.

Eſto

15 Esto supuesto, para numerar qualquier numero, comenzarèmos de la mano derecha ácia la izquierda, dando á cada guarismo el nombre que segun su lugar le corresponde en la tabla, y determinandole despues por lo que significa el mismo guarismo. Como en este numero 1697. al primer guarismo dirèmos *Unidad*, al segundo *Decena*, al tercero *Centena*, al quarto *Milar*. Y porque el primero es 7. determinarémos el nombre de unidad, diciendo siete unidades, ò siete absolutamente: En el segundo, 9. dirémos nueve decenas, ò noventa: El tercero, 6. serà seis centenas, ò seiscientos: Al quarto, 1. llamarèmos mil; con que todo el numero valdrà mil seiscientos noventa y siete.

Este otro numero 38500. significa treinta y ocho mil y quinientos; En donde es menester advertir lo que se dixo antes (10) que el zero por sì no tiene valor alguno, sino que solo sirve de llenar lugar; y assi en ocurriendo algun zero, se ha de passar en silencio el nombre que segun el lugar le correspondiere en la tabla; pues porque en el lugar de las unidades, y decenas ay zeros, no las hemos nombrado, sino que avemos *dicho quinientos*. Assi mismo darèmos el valor à este otro numero 900426. diciendo, nuevecientos mil quatrocientos veinte y seis, sin nombrar decena, ni unidad de millar, porque ay zeros.

16 Paraque el principiante no fatigue su cabeza, ni pierda el hilo de la cuenta en numerar grandes numeros, como el siguiente, podrà usar deste artificio. Divida el numero con distinciones de tres en tres guarismos, comenzando de la mano derecha, y quedarà repartido en miembros, de los quales cada una contiene tres guarismos correspondientes à unidad, decena, centena: solo el ultimo miembro puede tener uno, ù dos guarismos.

3. 2. 1.

30, 900, 510, 356, 714, 006, 810.

Despues de cada dos miembros irà escriviendo los exponentes 1. 2. 3. 4. &c. (son numeros que declaran el orden, los terminos el lugar, ò assiento) encima el guarismo immediate siguiente á los dos miembros sobredichos: de modo, que el exponente 1. ha de estàr sobre el septimo guarismo; el 2. sobre el decimotercio: el 3. sobre el decimo nono; y assi de los demàs.

Dispuesto el numero, como queda dicho, para entender el artificio de raiz, podrá el principiante cotejarle con la tabla numeratoria (14) y hallarà que los exponentes distinguen al numero en senarios, con-

forma la tabla; y que en donde está el exponente 1. que es el septimo lugar, en la tabla se halla *cuento*. Al lugar del exponente 2. que es el decimotercio, corresponde en la tabla *bicuento*. Al exponente 3. *tricuento*, &c. Y en el lugar en donde ay distincion en medio de los senarios, en la tabla dice *millar*. Con que el primer senario serà de unidades; el segundo de cuentos, porque tiene el exponente 1. el tercero de bicuentos, porque tiene 2. y assi de los demàs.

Con este aparato, quien supiere numerar un senario, los sabrà todos sin atender à los otros, y aun sin ver los guarismos, como luego dirèmos. Comience, pues, por el ultimo senario, en el qual solo se halla este numero 30 treinta; y porque el senario, es de tricuentos, añadirà esta palabra *Tricuento*, diciendo treinta tricuentos.

El siguiente senario 900510 vale nuevecientos mil quinientos, y diez, al qual porque es de bicuentos añada esta misma voz, diciendo, nuevecientos mil quinientos y diez bicuentos. En el otro senario 356714 porque es de cuentos, dirà trecientos cincuenta y seis mil setecientos y catorce cuentos. Finalmente, en el otro senario 006810. dirà seis mil ochocientos y diez. Despues pronunciará toda la cuenta assi: Treinta tricuentos nuevecientos mil quinientos y diez bicuentos; trecientos cinquenta y seis mil setecientos y catorce cuentos; seis mil ochocientos y diez.

17 Cumplamos aora lo que ofrecimos de dar regla para numerar qualquier numero sin ver todos sus guarismos juntos, sino successivamente comenzando por la izquierda, con tal que se sepa el numero de llos. Parece enigma, pero lo tendrá decifrado quien huviere penetrado el artificio de numerar.

Supongo, pues, que se ha de nombrar el mismo numero, el qual porque tiene veinte guarismos, segun me han dicho, (porque supongo que no le he visto) dividido este numero 20. en senarios, y hallo que ay tres completos, porque tres veces seis son diez y ocho, y sobran dos guarismos del quarto (que es de tricuentos) de los quales el primero es de unidades, y el segundo de decenas; luego en viendo el segundo, ò ultimo, que es 3. dirè treinta; despues quando veré el zero dirè assimismo treinta tricuentos, porque el lugar del zero no se nombra, como està dicho.

El tercer senario es de bicuentos, al qual corresponden en la tabla estos nombres: *Bicuento, decena de bicuento, centena de bicuento, millar de bicuento, decena de millar de bicuento, centena de millar de bicuento*. Luego quando verè el 9. que es el sexto guarismo del senario, dirè nuevecientos; despues veo dos zeros, á los quales no les doy

nom-

nombre, sino que solo dirè nuevecientos mil; el tercer guarismo del senario es 5. pues digo quinientos; el segundo es 1. dirè diez; el primero es o. al qual no le doy nombre, y asi dirè quinientos, y diez bicuentos; con que todo el senario valdrà nuevecientos mil quiniento y diez bicuentos. Del mismo modo se contarán los otros; senarios que omito por no ser molesto.

En los nombres de la cuenta suelen engañarse los que comienzan, pensando que lo mismo es bicuento, que dos cuentos: tricuento, que tres cuentos; y asi de lo damàs. Pero es engaño manifiesto, porque dos cuentos son dos unidades de cuento (tomandole por unidad) y bicuento es un cuento de unidades de cuento.

El engaño nace de no atender à lo que advertimos arriba (9) que los nombres de la numeracion deven ser estos, *dos*, *tres*, *quatro*, &c. no *dos veces*, *tres veces*, &c. los quales son mas proprios del multiplicar, que del numerar: y como este nombre bicuento, en quanto á la diccion *Bi* se derive del adverbio Latino *Bis*, que significa dos veces, serà lo mismo bicuento que un cuento multiplicado por otro cuento; ò que se *nombra* dos veces *cuento*, diciendo cuento de cuento, que es un cuento de unidades de cuento. La diferencia está clara en los numeros, porque dos cuentos se escriven asi 2000000. y bicuento deste modo 1000000000000.

18 De lo dicho en la numeracion queda manifiesto, lo primero, que aquel numero es mayor, que tiene mas guarismos, y asi el 100. es mayor que el 99. Pero si dos, ò muchos numeros tienen tantos guarismos el uno como el otro, aquel serà mayor, cuyo guarismo ultimo, penultimo, antepenultimo, &c. fuere mayor: con que el 8246. será mayor que el 8239.

19 Lo segundo, que si à qualquier numero, como 12. añadimos un zero à la derecha, asi, 120. crece su valor diez veces: si dos zeros, deste modo, 1200. le aumenta cien veces: si tres zeros 12000. mil veces, &c. porque los zeros hacen, que los guarismos passen à otros lugares.

De la Notacion.

20 Notacion es la descripcion de un numero por sus propios caracteres, ò guarismos, como el veinte y quatro se escrive asi, 24. Es inversa de la numeracion; porque por esta leemos los numeros, y por la notacion los escrivimos.

21 Para escrivir qualquier numero se pondràn los guarismos

como se nombran, comenzando de la izquierda ácia la derecha, y si se omitieren alguno, ò algunos nombres de los de la tabla numeratoria, se notarán otros tantos zeros, que solo sirven de llenar lugar: Como para escrivir con guarismos trecientos veinte y seis, escrivase un 3. por los trecientos, un 2. por los veinte, y un 6. por los seis, assi 326.

Otro exemplo: Tengo de escrivir con guarismos este numero dos mil cinquenta y quatro, escrivo 2. por los dos mil; y porque de millar passa à decena, esto es de dos mil à cinquenta, sin nombrar centena, pongo un, o. en el lugar de las centenas, despues escrivo 5. por los cinquenta, y ultimamente un 4. por los quatro, con que será todo junto 2054.

Otro exemplo: Se ofrece escrivir con guarismos esta cuenta. Treinta y seis cuentos ciento quatro mil y trecientos; escrivo 36. por los treinta y seis cuentos; despues 1. por el ciento; y porque de ciento passa á quatro mil sin nombrar decenas, pongo o. y despues 4. por los quatro mil; prosiguiendo escrivo 3. por los trecientos; y porque aqui acaba la cuenta sin nombrar decenas, ni unidades, pondrè dos zeros, y será todo junto 36 104 300.

De la cuenta Latina, ò Romana.

22 Porque este genero de cuenta, à la qual algunos llaman *Castellana*, aun està en uso en las Bulas Pontificias, y escrituras publicas, me ha parecido que no será fuera de proposito el declararla. Los Romanos escrivian los numeros con solas estas siete letras I. V. X. L. C. D. M. La I. vale uno; la V. cinco; la X. diez; la L. cinquenta; la C. ciento; la D. quinientos; y la M. mil.

Pero como las letras son pocas, y los numeros grandes, es necessario valerse de dos arbitrios; el primero, que la letra de menor valor, antepuesta à la de mayor, le quita su valor; como la I. puesta antes de la V. deste modo IV. hace quatro; la X. antes de la L. assi XL. vale quarenta; y assi de los demàs. El segundo, que algunas letras se pueden escrivir juntas hasta tres veces, y aun hasta quatro, como XXX. son treinta; y CCCC. ò deste modo CD. son quatrocientos.

Esto supuesto el año corriente 1697. se escrivirà deste modo MDCXCVII. La M. es mil; las DC. seiscientos; las XC. noventa; las VII. siete. Este otro numero 2958. se escrivirá assi MMCMLVIII. Las MM. son dos mil; las CM. nuevecientos, porque la C. quita ciento à la M. la L. cinquenta; y las VIII. ocho. Assimismo esta cuen-

ta MCDXLIV. vale 1444. porque la M. es mil; las CD. quatrocientos, las XL. quarenta; y las IV. quatro.

Con esta cuenta no solian los Romanos contar numero mayor que tres mil; ni estavan muy puestas en uso las letras D. y M. Valianse de otras, con que contavan hasta diez mil. Para escrivir 500. ponian una I. y C. al revès deste modo IↃ. para mil assi CIↃ. para 5000. deste modo IↃↃ. para 10000. asi CCIↃↃ. Con que el numero 1697. se escrivia con estos caractères en esta forma CIↃIↃCXCVII.

De la medida, y partes del numero.

23 Un numero mide à otro, quando tomado, ò repetido una, ò muchas veces le iguala; assi como una vara mide à doce varas de cinta, porque aplicada doce veces las iguala. El 3. mide al 15. porque tomado, ò repetido cinco veces hace 15. El 4. mide al 4. porque tomado una vez le iguala.

El numero de las veces que se toma, ò repite un numero para igualar al otro, se dice que es por quien mide; como el 4. mide al 24. por *6.* porque tomado seis veces hace 24. El 8. mide al quarenta por 5. porque repetido cinco veces hace 40.

El numero que mide se dice *Medida*; y si es el mayor de todos los que pueden medir à otro, se llama *Maxima Medida*: Como el *6.* respeto del 12. porque aunque al 12. midan otros numeros como el 2. 3. y 4. pero el *6.* es el mayor. El numero medido se dice *Multiplice* del que mide; y assi el 12. es multiplice del *6.* y del 4. 3. 2. 1.

Si un numero, como el 3. mide à otros *6. 9.* 15. se dice *Medida Comun*; y si es el mayor de los que pueden medir, se llama *Maxima medida comun.* La qual puede ser uno de los mismos numeros, como en 8. 16. pues el 8. se mide à si mismo, y al *16.* La unidad mide à todos los numeros, porque se componen della; con que no ay numeros incommensurables, como en la magnitud, porque alomenos tienen la unidad por medida comun.

24 Un numero es parte de otro (hablando en terminos Arithmeticos) quando tomado, ò repetido muchas veces le iguala; y assi el 4. es parte del 12. porque tomado 3. veces hace 12. Assi mismo el 8. es parte del 48. porque tomado *6.* veces hace 48. De suerte, que segun Euclides *en la difin.* 3. *del lib. 7.* la parte es un numero menor, respeto de otro mayor (que se llama todo) el qual menor mide al mayor.

Pero si el numero menor no mide al mayor, esto es, que repetido

una,

una, ò muchas veces no le iguala, se llama *Partes*, segun Euclides *en la defin. 4. del lib. 7.* como el 6. respeto del 15. porque tomado dos veces hace 12. que no llega à 15. y repetido tres veces passa, pues hace 18. Dicese *Partes*, porque contiene muchas.

Para mayor inteligencia desto, es menester advertir, que Euclides no tratò de otro genero de parte, sino de la que mide à su todo; y assi, quando dice *Parte* ya se entiende que ha de medir al todo; y como el 6. no mida al 15. no puede decirse parte, respeto del 15. Pues como se nombrarà? Digo que *Partes*; porque el 6. contiene dos veces al 3. que es parte del 15. y porque el 3. es la quinta parte del 15. serà el 6. respeto del 15. dos quintas partes.

25 Bien conozco, que estas noticias de *Parte, y Partes* seràn dificultosas de entender à los principiantes; pero no he podido omitirlas por ser de Euclides, y comunes entre los Mathematicos. Pues paraque no causen confusion, dirè lo mismo con terminos mas claros. La parte es en dos maneras, *Aliquota*, y *Aliquanta.* Parte aliquota es la que repetida muchas veces adequa, ò iguala al todo; como el 6. respeto del 24. Al contrario la parte aliquanta, que tomada muchas veces no le iguala; como el 3. respeto del 8. Y esta es la que se dice *Partes.*

26 La parte aliquanta se suele individuar assi: Una mitad, un tercio, quarto, quinto, &c. Toma el nombre del numero por quien mide (23) el qual se llama *Denominador*; con que el 3. es mitad del 6. porque le mide por 2. que es denominador; el 5. es tercio del 15. porque le mide por 5. el 2. es quarto del 8. porque le mide por 4. y assi de los demàs.

27 La parte aliquanta necessariamente se ha de nombrar con dos nombres; como dos tercios, quarto quintos, &c. porque contiene muchas partes aliquotas. El primer nombre expressa el numero de las partes aliquotas que contiene; y el segundo dice quales partes aliquotas sean; como el 6. respeto del 15. es *dos quintos*, porque contiene dos veces al 3. el qual es un quinto del 15.

28 Una parte aliquota es semejante à otra aliquota, quando se contiene en su todo tantas veces como la otra; y assi 3. y 5. son semejantes, respeto del 12. y 20. porque tanto el 3. en el 12. como el 5. en el 20. se contienen quatro veces. Assimismo 2. 4. 7. son semejantes, respeto del 6. 12. 21. porque se contienen tres veces. Los todos que contienen à las partes aliquotas semejantes, como el 12. y 20. respeto de 3. y 5. se llaman *Semejantes*, y tambien *igualmente multiplices.*

Una

29 Una parte aliquanta es semejante à otra aliquanta, quando contiene tantas partes aliquotas semejantes de su todo, como la otra del suyo. Y asi el 3. y 9. son partes semejantes aliquantas del 5. y 15. porque entrambas contienen tres quintas partes de sus todos. El 4. 6. 10. son semejantes, respeto de 14. 21. 35. porque contiene qualquiera dellas dos septimos de su todo. Estos, todos se dicen *Semejantes*, pero no *igualmente multiplices.*

Las partes aliquotas, ò aliquantas, que tienen un mismo nombre son semejantes; porque toman el nombre de las veces que se contienen en el todo si son aliquotas (28): ò de las partes aliquotas semejantes que contienen, si son aliquantas. (29) Y asi, porque 2. y 5. respeto de 10. y 25. son un quinto, seràn semejante aliquantas; y 6. y 4. respeto de 9. y 6. son semejante aliquantas, porque entrambas son dos tercios.

De la razon, y proporcion de los numeros.

30 *Razon numerica* es el respeto, relacion, ò habitud, que tiene un numero comparado con otro, segun que es mayor, igual, ò menor: como 4. à 2. 3. à 3. 5. à 6. El numero que se compara se dice *Antecedente*, y à quien se compara *Consequente*: y asi en la razon de 4. à 6. el 4. es antecedente, y el 6. consequente.

31 *Si* el antecedente es igual al consequente se dice *Razon de igualdad*; como 4. à 4. ò 6. à 6. Si el antecedente es mayor, es *razon de mayor desigualdad*; como 8. à 4. 10. á 2. Si el antecedente es menor, se llama *razon de menor desigualdad*; como 2. à 10. 4. à 8. de suerte, que invirtiendo los terminos de la razon de mayor igualdad, resulta la de menor desigualdad; y al contrario.

Para mayor inteligencia de la razon, digo que consiste en la continencia del antecedente en el consequente, ò al contrario deste en aquel: como la razon de 6. à 3. no es otra cosa mas que el respeto de 6. à 3. en quanto el 6. contiene al 3. dos veces. La razon de 4. à 4. es el respeto de un numero á otro, en quanto el 4. contiene al 4. una sola vez. La razon del 2. al 9. es el respeto del uno al otro, en quanto el 2. se contiene en el 9. quatro veces y media. Qualquier numero dice razon à otro, porque tiene alguna continencia.

32 *Proporcion* es la comparacion, habitud, respeto, ò relacion de dos razones, como la relacion que ay de la razon de 4. à 2. à la razon de 6. à 3. De suerte, que asi como la razon està entre dos numeros, la proporcion està entre dos razones; porque una razon se pue-

de

de comparar à otra, como un numero à otro. Y asi como un numero se puede comparar à otro, en quanto es mayor, menor, ò igual, tambien una razon se puede referir à otra del mismo modo: de suerte, que aquellas razones son iguales, cuyos antecedentes tienen la misma continencia en sus consequentes; aquella razon es mayor, cuyo antecedente contiene mas veces á su consequente, ò es contenido menos veces de su consequente. Pero Euclides solo tratò de la comparacion de las razones de igualdad; porque en la *difinicion 4. del lib. 5.* difiniò la proporcion, diciendo que es *una semejanza de razones.*

Esta semejanza, ò igualdad de razones consiste, en que en entrambas aya la misma relacion, ò continencia; y asi la razon de 4. à 1. es semejante, la mesma, ò igual (todo significa lo mismo) à la de 12. à 3. porque asi como el 4. contiene al 1. quatro veces, del mismo modo el 12. contiene al 3. quatro veces. Y estos numeros se llaman *Proporcionales*: los quales expressan los Mathematicos deste modo: como 4. à 1. asi 12. à 3.

De otro modo podemos explicar esta igualdad de razones, diciendo, que aquellas razones son iguales, cuyos antecedentes son partes, ò todos semejantes de sus consequentes (28. y 29.): como la razon de 10. à 15. es igual à la de 2. à 3. porque los antecedentes 10. y 2. son partes semejantes (esto es dos tercios) de sus consequentes 15. y 3. Asimismo, la razon de 8. à 4. es semejante à la de 10. à 5. porque el 8. y 10. son todos semejantes, respeto de 4. y 5. Bastan estas noticias aora, en el libro segundo se hallaràn mas extensas.

Del numero par, è impar.

33 Numero par es el que se puede dividir enteramente en dos partes iguales, ò el que tiene mitad; como 2. 4. 6. 8. &c. Numero impar es el que no se puede dividir enteramente en dos partes iguales, ò el que difiere del par por una unidad; como 3. 5. 7. 9.

Dividese el numero par en *Pariter par*, y en *Pariter impar*. El pariter par es un numero medido de par por par, como el 8. á quien mide el par 4. por 2. Y el 12. à quien mide el par 6. por par 2. Numero pariter impar es el medido de par por impar; como el 10. á quien mide par 2. por impar 5.

Adviertase que ay muchos numeros, que juntamente son pariter pares, y pariter impares, como el 12. porque es medido de par 2. por par 6. y tambien de par 4. por impar 3.

El numero impar solo tiene una especie, que es *Impariter impar*, à quien

quien mide impar por impar; como el 15. que es medido de impar 3. por impar 5.

Del numero primero, y compuesto.

34 Numero primo llama Euclides *en la difin.* 11. *del lib.* 7. al que solo es medido de la unidad, esto es, que no tiene otra parte aliquota, mas que la unidad; como 2. 3. 5. 7. y assi necessariamente ha de ser numero impar, exceptando al 2.

35 Numeros entre sí primos son los que solo tienen la unidad por medida comun, como 8. y 11. porque aunque el 8. tenga alguna medida fuera de la unidad, pero no es comun para los dos. Tambien 10. 12. 17. son entre sì primos, porque no tienen numero alguno por medida comun à todos los tres. Si entre muchos numeros huviere algun numero primo, todos seràn entre sì primos, porque aquel no tendrà medida alguna fuera de la unidad; y necessariamente ha de aver entre ellos algun numero impar, exceptando al 2.

36 Numero compuesto es el que tiene algun numero que le mide *à màs de la unidad*, ó el que tiene partes aliquotas fuera de la unidad; como el 12. à quien miden el 2. 3. 4. 6 y el 10. à quien miden 5. y 2. A todo numero compuesto mide algun numero primo, como consta por la *prop.* 33. *del lib* 7. de Euclides.

37 Numeros entre sì compuestos son los que tienen alguna medida como á más de la unidad, como 8. y 10. à los quales mide el 2. Assimismo 6. 9. 12. son entre sì compuestos, porque à todos mide el 3. Esta medida comun puede ser uno de los mismos numeros, como 4. 8. 12. cuya medida comun es 4. lo qual sucede siempre, que el uno dellos mide al otro, ù otros.

Del numero Digito, Articulo, y Mixto.

38 Numero digito es el que solo tiene un guarismo, como 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. que son todos los numeros desde 1. hasta 10. exclusive. Numero articulo es el que tiene muchos guarismos, de los quales el primero es zero; como 10. 30. 2500. &c. Numero mixto es el que tambien tiene muchos guarismos; pero el primero no es zero, como 24. 152. 208.

Del numero perfecto, diminuto, y abundante.

39 Numero perfecto llama Euclides *en la difin. 22. del lib. 7.* al que es igual à todas ſus partes aliquotas juntas; como el *6.* cuyas partes aliquotas 1. 2. 3. juntas hacen lo miſmo *6.* El 28. es tambien perfecto, porque ſus aliquotas 1. 2. 4. 7. 14. hacen 28. Numero diminuto es aquel, cuyas partes aliquotas juntas no llegan à igualarle; como el 8. cuyas partes aliquotas 1. 2. 4. hacen 7. El abundante es aquel cuyas partes aliquotas juntas hacen numero mayor; como el 12. porque ſus aliquotas 1. 2. 3. 4. 6. hacen 16.

De los 28. numeros, que Pedro Bungo *en el cap. 28. de los miſterios de los numeros*, dice que ſon perfectos, ſolos ſe hallan ocho perfectos, ſegun el P. Mariano Merſenno *en la prefacion del tom. 1. de ſu Phyſico Mathem.* que ſon los ſiguientes: *6.* 28. 496. 8128. 23550336. 8589869056. 137438691328. 2385843008139952128.

Son los numeros perfectos muy pocos, y añade el dicho Merſenno, que haſta aora ſolos ſe han hallado once; y que para examinar ſi un numero de 20. guariſmos es perfecto, no baſtan cien años. Tiempo mal gaſtado en coſa de tan poca importancia. El primer guariſmo de qualquier numero perfecto es *6.* ò 8.

PARTE II.

DE LAS MONEDAS, PESOS, Y MEDIDAS.

PARA que el Arithmetico pueda formar cuentas, y reducciones de monedas, peſos, y medidas de diferentes Reynos, es preciſo que primero ſepa ſu quantidad, diviſion, y correſpondencia. Por eſſo he recopilado aqui algunas, aſsi antiguas, como modernas, entreſacando lo mas cierto, porque eſta materia es muy dificultoſa, y del todo no ſe puede averiguar. En las monedas no ay coſa fixa. Los peſos, y medidas ſon tan diferentes, que aun en un miſmo Reyno ſe halla eſta diverſidad.

Mo-

Monedas, pesos, y medidas de los Romanos antiguos.

La primer moneda que tuvieron los Romanos, fue una libra de cobre sin labradura, ni cuño alguno. Llamaronla *Peso, Libra*, ò *As*, como si dixessen *æs*, que es lo mismo que cobre. Y como la libra de peso tenia 12. onzas, correspondientes à los 12. meses del año, segun lo dice Fannio, dividieron tambien el As en 12. partes iguales.

A una parte destas la llamaron *Uncia*, como si dixeran *uncia*; à dos *Sextans*, que es la sexta parte de 12. à tres *Quadrans*, porque es la quarta parte de los mismos 12. à quatro *Triens*, que es la tercera parte; à cinco *Quincunx*; à seis *Semissis*, que es la mitad; á siete *Septunx* á ocho *Bes*; á nueve *Dodrans*; à diez *Dextans*, ò *Decunx*; y á once *Deunx*.

Pero reconociendo los Romanos la incomodidad desta moneda, y apremiados de la necessidad en la primer guerra contra los Cartaginenses, segun afirman Macrobio, y Aulo Gelio, la reduxeron á peso de dos onzas, sellandola con figura de una Res; que por esso, segun Plutarco en la vida de Publicola, la moneda se llama en Latin *Pecunia* del nombre *Pecus*. Despues aun fueron disminuyendola mas hasta media onza, pero quedando el mismo valor, y reparticion; de suerte, que media onza de cobre sellado tenia el mismo valor, y division que una libra sin sello.

Aqui es conveniente saber dos cosas. La primera, que esta costumbre de sellar la moneda, aunque segun algunos, la introduxo en los Romanos Servio Tulio su sexto Rey: y segun Macrobio en el 1. de los Saturnales, Jano, que segun algunos fue Noe, à quien los Romanos despues adoraron por Dios; pero si atendemos á lo que dice Josepho, fue Cain el primer inventor de la moneda; y en tiempo de Abraham es cierto que la huvo.

La segunda, que no solo à este genero de moneda, sino à otras cosas tomadas por entero las llamaron *As*; y assi los Jurisconsultos á un heredero de toda la hacienda le llaman *Hæredem ex asse*; y á uno de la tercera parte le dicen *Hæredem ex treinte*. Tambien los Artilleros à la porcion de carbon, y azufre, que se pone en la polvora, la llaman *As*, diciendo que la polvora fina consta de As, As, y seis; esto es, de una parte de azufre, otra de carbon, y seis de salitre.

La onza, ó duodecima parte del As tambien tenia sus divisiones, por-

porque *Semionza* era la metad de una onza; *Sicilico*, la quarta parte, *Duela* la tercera; *Sextula* la sexta; *Drachma* la octava. La Drachma tiene 3. escrupulos, ò 60. granos.

Multiplicando el *As* tambien salian otros pesos, como Besis, Tressis, Quadrasis, Decusis, Centusis, &c. que eran 2. 3. 4. 10. 100. asses, ó con otros nombres Dupondio, Tripondio, Quadripondio, Decupondio, Centupondio, &c.

El As siempre se hacia de cobre; pero avia una moneda muy pequeña de plata, que se llamava *Libela*, la qual valia lo mismo que un As, como lo atestigua Varron.

El *Sestercio*, dicho en Latin *Sestertius*, era una moneda que valia dos asses y medio; pero si se nombrava *Sestertium*, ya no era moneda, sino suma, ò numero de moneda, que valia mil sestercios de los primeros, ò 2500. Asses.

Quinario era una moneda que valia dos sestercios, ò 5. Asses: llamavase tambien *Victoriato*, por estàr esculpida en èl una victoria, como lo trae Budeo *en el lib.* 1.

Denario era moneda de 10. Asses, ò 2. quinarios, ò 4. sestercios. Siendo de plata era la septima parte de la onza; porque Plinio *en el lib.* 33. *cap.* 9. dice, que de una libra de peso de 12. onzas se sellavan 84. denarios: con que segun esto, 7. denarios hacian una onza.

De aqui se infiere, que la drachma, siendo de plata valia 8. asses, y tres quartos; porque como cada onza de peso tenia 8. drachmas, y la libra 96. por otra parte cada libra contenia 84. denarios, y cada uno 10. asses, que son 840. asses, partiendolos por 96. drachmas tocan á cada drachma 8. asses, y tres quartos.

La drachma corresponde casi al valor de un Julio Romano, ò un real de plata Mexicano, pero no al peso; porque 8. onzas, que es un marco, contienen 64. drachmas, y del marco, segun la disposicion del Rey Don Fernando el Catholico año 1497. la qual siempre se ha observado, se sacan 67. reales de plata Mexicanos: con que el peso del real de plata Mexicano es menor que el de la drachma, porque de un mismo marco (por ser la onza Castellana igual à la Romana antigua, segun Vilalpando, Mariana, Alcazar, y lo comun de los Autores) se sacan mas reales que drachmas.

Y aunque à la verdad el valor de las drachmas es mayor que el del real Mexicano; pero como la diferencia es muy poca, comunmente se toma por lo mismo. Y asi, valiendo aora el real de à ocho Mexicano 15. reales de vellon, que son 510. maravedis, valdrà el real sencillo de plata, ò la drachma 63. maravedis, y tres quartos de maravedi, que

al presente corresponden á 29. dineros, y un quarto de Valencia; á 24. dineros de Aragon; y à 42. de Cataluña.

Y segun esta cuenta valdria cada *As* aora, 7. maravedis, y dos septimos; ò 3. dineros de Valencia, y 12. treintaycincavos; ò 2. dineros Aragoneses, y 26. treintaycincavos; ò 24. dineros Catalanes; y 28. treintaycincavos. Y quando los Autores dicen, que el *As* vale cerca de 4. maravedis, se han de entender de plata.

Advierto aqui, que aora se hacen en Castilla reales de à ocho, que llaman de Maria, los quales son la quarta parte menores que los Mexicanos; de suerte, que el real de à ocho de Maria vale 8. reales de plata, y 12. de vellon; y el Mexicano, Segoviano, ò Sevillano vale 10. reales de plata, y 15. de vellon; y al mismo respeto los reales sencillos, de à dos, y de à quatro. Pues para no confundir las cuentas de los Autores, compararé las monedas de las otras Naciones, y Reynos con los reales de plata antiguos, que son los Mexicanos, Segovianos, ò Sevillanos.

Advierto tambien, que muchas veces toman los Autores el denario, y drachma por un mismo valor, y peso: pero en la realidad son diferentes; porque el denario era la septima parte de la onza: y la drachma, la octava. Verdad es, que como dice Vilalpando, creciendo la avaricia de los Romanos disminuyeron el denario, haciendole igual à la drachma; y con esto se concilian los Autores.

Obolo era la sexta parte de la drachma. Cada uno contenia 10. granos; era moneda de cobre, segun Budeo *en el lib.* 1. sellada con una saeta. *Diobolo* eran 2. obolos, ò la tercera parte de la drachma. *Triobolo*, ò *Hemidrachmio* eran 3. obolos, ò media drachma. *Tetrobolo* eran 4. obolos, ò dos tercios de la drachma.

Sueldo era una moneda de plata, ù de oro, que pesava la sexta parte de la onza; y por esso se llemaba tambien *Sextula*. Su tercera parte se decia *Tremissis*.

La mina, y talento no eran monedas, sino peso, ò suma de moneda. Pesava la *Mna*, ò *Mina* 100. drachmas, y el *Talento* 60. minas, ó 6000. drachmas; y assi valdria 6000. reales de plata.

Algunas destas monedas, y pesos, como la Drachma, Mina, y Talento, no eran propias de los Romanos, sino que las tomaron de los Griegos.

La menor medida de longitud que tenian los Romanos, era lo ancho de un grano de cevada.

El *Dedo* ordinario, ò menor constava de 4. granos de cevada juntos

por los lados. Aora le dividen en 12. partes iguales, à las quales llaman *Lineas*.

Onza, ò *Uncia* era lo mismo que un pulgar, ò dedo mayor: Constava de 5. granos de cevada, y un tercio.

El *Palmo menor*, ó *Quadrante* tenia quatro dedos menores juntos por los lados.

Bes llamavan los Romanos à la extension del dedo pulgar, y el indice; lo que nosotros llamamos xeme, tenia 8. pulgares, ò dos tercios de un piè.

Dodrante, ò *Palmo mayor* era medio codo, ò 9. pulgares. Algunos dicen, que era la extension del dedo pulgar, y menique.

El *Piè* tenia 4. palmos menores, ó 16. dedos menores, ò 12. pulgares. El piè romano es el mismo que el Geometrico, y es igual al piè Valenciano, que es el tercio de la vara de Valencia, como lo prueva exactamente Joseph Vicente del Olmo, en su Nueva Descripcion del Orbe, *pag*. 92.

El *Codo*, contenia piè y medio: era la distancia desde la dobladura del brazo, hasta toda la extremidad de la mano; deciase tambien *Ulna*. Es media vara de Valencia.

El *Passo menor*, á quien los Romanos llamavan *Gressus*, tenia dos pies y medio. El *Mayor*, ò *Passo Geometrico*, constava de 5. pies.

La *Pertica*, ó *Radio* constava de 10. pies.

El *Estadio* tenia 125. passos, que es la distancia que corriò Herculés con un aliento, y por esso le llamaron Herculeo.

La *Milla* tenia 8. estadios, ò 1000. passos. Los Romanos contavan las millas por distancias de piedras; porque en los caminos ponian colunas de piedra para distinguirlas; y assi, una distancia de tres piedras, era lo mismo que 3. millas. Esta fue idea de Cayo Gracho, como consta de Plutarco en su vida.

Yugada era un espacio de campo, que contenia 28800. pies quadrados. Deciase assi, segun Plinio *lib*. 18. *cap*. 3. porque con un yugo de bueyes se podia arar un dia. Columela en el *lib*. 2. *cap*. 9. dice, que para sembrar una yugada de tierra fertil, eran menester 4. modios de trigo, que son 8. celemines Castellanos, y 8. y dos tercios de Valencia.

En quanto à las medidas Romanas de cosas liquidas, se ha de suponer, que assi como los Romanos dividian al *As*, ò libra en 12. partes iguales, tambien dividieron al *Sextario* en 12. Cyathos. Era el Sextario la sexta parte del Congio. El *Cyatho*, segun lo afirma Tirino en los

Pro-

Proleg. à la Sag. Escrit. era un vaso con que solian sacar el vino à los combidados.

A estas 12. partes las llamaron tambien con los mismos nombres que à las de la libra; porque à un vaso, que contenia dos cyathos, le llamaron *Sextante*; al que tenia tres, *Quadrante*; al de quatro, *Triente*, &c.

Cabian en el sextario 20. onzas de agua, ò vino (poco se diferencian estos dos licores en el peso) y en el cyatho 1. onza, y dos tercios. Assi lo sienten Fannio, Mariana, y Tirino. De miel cabian en el sextario 30. onzas, y de aceyte 18. segun el mismo Fannio.

La *Hemina* era la mitad de un sextario; *Quadrante* era media hemina, ò la quarta parte del sextario. *Acetabulo* era la mitad del quadrante, ò la octava parte del sextario; contenia un cyatho y medio.

Ligula era la minima medida de cosas liquidas, que tenian los Romanos; servia de cuchara para tomar el caldo, ù otros liquidos; era la quarta parte del cyatho.

El *Congio* era un vaso pequeño, pero al modo de una tinaja; cabian en èl 10. *libras* de agua. Era igual à un vaso cubico, ò quadrado por todas partes, de medio piè Romano, ò Geometrico. El mismo congio se guarda en el museo Farnesiano, de donde Vilalpando sacò la verdadera quantidad del piè Romano, haciendo un vaso cubico, en el qual cabia la misma agua que en el congio, y el lado del dicho vaso era la mitad del pié.

El *Congio*, y el *Chus*, ò *Choa* Attico eran iguales, aunque el congio contenia 6. sextarios Romanos, y el chus 8. Atticos; porque el sextario Attico, ò Griego era menor que el Romano. Del nombre *Congio* fue llamado Movelio Torquato, Cavallero Milanés, *Tricongio*; porque segun lo atestigua Plinio *lib.* 14. *cap.* 22. beviò tres congios de vino en un aliento, en presencia de Tiberio Cesar, que son 30. libras. Por la misma causa el hijo de Ciceron fue llamado Bicongio.

La *Urna*, aunque era un vaso en que solian guardar las cenizas de los muertos; pero tambien fue tomado por medida, que contenia 4. congios; y era la mitad de la Anfora.

La *Anfora*, *Cantaro*, ò *Quadrantal*, era un vaso que contenia 8. congios, ò 2. urnas, ò 3. modios: Era igual à un vaso cubico de un pié Romano, à una Metreta de los Griegos.

El *Culeo* era la mayor medida de cosas liquidas que tenian los Romanos; cabian en él 20. anforas, ò 160. congios; era de cuero de Bufalo, y para llevarle era menester un carro.

Los Romanos tenian pocos medidas de cosas aridas, ò secas, porque usavan tambien de las medidas de los liquidos. La mayor era el *Modimno*, que contenia 6. modios. Diodoro *lib.* 3. *cap.* 12. dice, que la carga de un Camello es de 10. Medimnos.

El *Modio*, ò *Celemin* era una medida, en el qual cabian 16. sextarios, los quales siendo de agua pesarian 26. lib. y 8. onzas. El *Modio* era igual al *Sato* de los Hebreos, como lo prueba Mariana pag. 76. contenia 2. celemines Toledanos. Un modio de Trigo levissimo, dice Plinio *lib.* 18. *cap.* 7. que no excede el peso de 20. libras Romanas.

Los Romanos, como lo atestiguan Donato, y Polibio, solian dar á los Soldados, y esclavos cada mes 4. modios de trigo para su sustento; y por esso à la medida de 4. modios la llaman algunos *Demenso*: pero otros dicen, que el demenso era aquella medida, ò porcion de trigo, que correspondia à cada dia; y assi el modio contiene 7. demensos, y medio, y cada uno es la comida escasa de un hombre.

Monedas, pesos, y medidas Atticas, ò de los Griegos.

Muchas monedas, pesos, y medidas de los Griegos, fueron las mismas que las de los Romanos, porque unos las tomaron de otros. De la onza es comun sentir de todos, que fue una misma en los Romanos, Griegos, y Hebreos, y aun en casi todas las Naciones.

El Talento Attico fue en dos diferencias; el uno mayor, y el otro menor. Entrambos contenian, ò pesavan 60. minas; pero el un genero de minas pesava 100. drachmas, y el otro 75.

La *Drachma* era la octava parte de la onza.

El *Estater* era una moneda de plata, que pesava 4. drachmas, ò media onza, igual al *Siclo* de los Hebreos; y aun en algunos lugares de la Sagrada Escritura, en donde el Hebreo lee *Siclo*, en Latin se pone *Stater*, como lo advierte Mariana en el *lib. de Pend. & Mens.* Avia tambien Estateros de oro que pesavan doblado.

El *Cistoforo* era una moneda de plata, que pesava casi lo mismo que el Donario Romano.

El *Obolo* es la sexta parte de la drachma.

La *Gramma* era la tercera parte de la drachma, igual al scrupulo Romano, cuya mitad igualava al obolo.

El *Geracio* era la tercera parte del obolo, ò la 18. parte de la drachma.

ma. El ceracio, y siliqua Romana eran de un mismo peso. El *Calco*, ò *Ereolo* era la mitad del ceracio.

El *Sitario* era la mitad del calco, contenia 3. leptas y media. Era la lepta el menor peso de los Griegos.

La menor medida de longitud de los Griegos fue lo ancho de un grano de cevada, como en los Romanos; pero como los granos eran diferentes segun la fertilidad de la tierra, aunque muchas de las medidas Griegas, y Romanas constassen de un mismo numero de granos, no fueron iguales.

El *Dactylo*, ò dedo tenia 4. granos de cevada juntos por los lados.

Palecte, ò palmo menor tenia 4. dedos; era la sexta parte de un codo. Llamavanle tambien los Griegos *Dochme*, *Dactylodochme*, y *Doron*.

Lycas era la extension entre las extremidades del dedo indice, y pulgar, que nosotros decimos xeme; contenia 10. dedos.

Orthodoron era la longitud de la mano; tenia 11. dedos, segun Polux *lib. 2.*

Espithame, ò palmo mayor tenia 12. dedos. Algunos dicen, que era la extension del dedo pulgar, y menique.

El *piè* tenia 4. palmos menores, ó 16. dedos. Era media uncia, ò pulgar, mayor que el piè Romano, y cerca de un quadrante menor que el Hebreo: Con que el piè Romano, ò Valenciano, respeto del Griego seria como 24. à 25. y respeto del Hebreo, como 3. à 4. El pié Griego al Hebreo es como 25. à 32. y assi, 25. pies Romanos hacian 24. Griegos. Item, 4. Romanos eran 3. Hebreos. Mas 32. Griegos hacian 25. Hebreos.

El *Pygme* era desde la dobladura del brazo, hasta las raìzes de los dedos; tenia 18. dedos.

Codo era la distancia que ay desde la dobladura del brazo, hasta toda la extension de la mano, que es piè y medio, ò 24. dedos.

Orgyia, ò passo constava de 6. pies, ò codos, era lo mismo que una brazada, ò quanto las dos manos se pueden extender, que es la estatura de un hombre. A una medida de 6. pies Romanos la llaman aora *Hexampeda*.

El *Plethro*, ò *Pelethro*, à quien los Latinos llamaron *Jugerum*, constava de 100. pies; era la sexta parte del estadio. El *Arvo* tenia 100. codos.

El *Estadio* constava de 100. orgyias, ò passos. El estadio Griego era igual al Romano, aunque el numero de los passos, y pies era desigual; por-

porque el estadio Romano tenia 125. passos, que son 625. pies; y el estadio Griego constava de 100. passos, ò 600. pies; como el piè Griego era una parte vigessimaquarta mayor que el Romano, por esso los 600. pies Griegos igualavan à los 625. Romanos.

El *Diaulo* contiene 2. estadios. El *Hippicon* 4. estadios. La *Milla* 8. estadios. El *Dolichos* 12. estadios.

La *Parasanga* constava de 30. estadios, y la llamavan *Scheno* simple. El *Scheno* compuesto era de 60. estadios. Otro schene avia de 40. estadios. El *Estatamo* se componia de 4. schenos simples.

De las medidas de cosas liquidas la Anfora era la mayor, contenia 12. chus, ò choas, que son iguales al congio Romano. Llamavase tambien *Metreta*, *Ceramio*, y *Cado*. Era casi igual à un vaso de un piè cubico Griego. Esta era la Metreta mayor, porque segun Alcazar avia otras menores, y en particular una igual à la anfora Romana de 8. congios.

La *Artaba* no era medida Griega, sino Egypcia, aunque estava reputada por Attica; contenia un anforeo y medio, y casi 9. choas.

Anforeo era un vaso que còntenia 6. choas, ò congios Romanos.

El *Chus*, ò *Choas* era igual al congio Romano; contenia 6. sextarios Romanos, ò 8. Atticos.

El *Sextario* Attico era la octava parte del congio Romano; con que el Sextario Attico al Romano era como 8. à 6. ò como 4. à 3. y assi, 3. sextarios Romanos hacian 4. Griegos; contenia 2. cotylas. Cabian en el sextario Attico 15. onzas de agua.

Cotyla, ò *Triblio* es la mitad del sextario. El *Quartario*, ò *Hemicotylio* era la quarta parte del sextario. El *Oxybaso* era la octava parte del sextario. El *Cyatho* la duodecima.

Conca es la metad del cyatho. *Mistro* la quarta parte del cyatho. El *Cheme* la quinta parte. El *Cochlear* la decima.

La mayor medida Attica de cosas secas era *Cypsele*, contenia 6. medimnos: era la quinta parte mayor que el *Coro* de los Hebreos.

El *Medimno* Attico era igual al Romano; contenia 6. modios, ò celemines; cabian en èl dos anforas Romanas de agua, ò 96. sextarios Romanos; contenia tambien 12. *Hemiectos*, ò 48. chenices.

El *Chenix* era la menor medida de cosas secas que tenian los Griegos; cabian en èl 2. sextarios Romanos, y era la medida de una comida escasa de un hombre en un dia.

Mo-

Monedas, pesos, y medidas de los Hebreos.

Los pesos, y medidas de los Hebreos, casi todos eran doblados de los Romanos, excepto la onza que era igual, como lo nota Tirino en el lugar citado; y el obolo, que era poco mayor.

El *Kikar*, ò *Talento* pesava 60. Minas Hebreas, ò 120. Romanas. El *Siclo* alguna vez tambien se solia llamar Talento, como lo nota Mariana. Algunos admiten dos modos de Talento; uno del Santuario, del tiempo de Moyses, que pesava 24000. drachmas: y otro de la Congregacion, ò Comun que contenia 12000. drachmas.

La *Mina*, segun Vilalpando, y Tirino *en el cap.* 45. *v.* 12. de Ezechiel, era en dos maneras; la una del Santuario, ò Sagrada que contenia 60. siclos, ò 240. drachmas: y otra comun, que pesava 50. siclos, ò 200. drachmas.

El *Siclo* tenia 4. drachmas; era media onza, la qual era igual á la Romana.

La moneda de los Hebreos solia regularse por el peso del Siclo, ò Estater; *esto es*, ò era igual al Siclo, ò à la metad, ò al quarto, &c. Y assi advierten muchos con Vilalpando *tom.* 3. *pag.* 401. que quando en la Sagrada Escritura se nombra *Aureus*, ò *Argenteus*, sin añadir otra palabra, se entiende Siclo. Algunos quieren, que el Siclo de oro fuesse doblado del de plata, y que pesava una onza.

El Ghera, ò *Obolo* era la vigesima parte del Siclo, como consta del *cap.* 30. *v.* 13. del Exodo, y del *cap.* 45. *v.* 12. de Ezechiel; la drachma contenia 5. obolos Hebreos. El obolo pesa 16. granos de cevada, y 14. y medio de trigo.

La menor medida de longitud de los Hebreos era el dedo, el qual era igual al pulgar Romano, como lo afirma Mariana *lib. de pond. & mens. pag.* 118. Del dedo ninguna mencion se hace en la Sagrada Escritura, sino en los libros de los Rabbinos.

Tophach, ò palmo menor, constava de 4. dedos juntos por los lados.

Zereth, ò palmo mayor, era la extension del pulgar, y dedo menique de un hombre de grande estatura; contenia 3. palmos menores, ò 12. dedos pulgares; y assi era igual al piè Geometrico.

Paghàm, ò piè, tenia 16. dedos, que era un piè, y un tercio Geometrico. Con que el piè Hebreo al Geometrico era como 4. à 3. y al Griego, como 32. à 25.

El *Amách*, ò codo, segun algunos era en dos maneras; uno legal, que

que tenia un pié, y medio de los Hebreos, ò 6. palmos menores: y otro comun de 5. palmos, ò 20. dedos.

Quanech, ò calamo, tenia 6. codos legales: assi lo sienten San Geronimo, Vatablo, Maldonato, y otros: y que el lugar de Ezechiel 40. *v.* 5. *Et in manu viri calamus mensura sex cubitorum, & palmo*, se ha de entender assi: *Sex cubitorum ex cubito, & palmo*. Veanse los expositores sobre este lugar.

Beràth, ò milla, constava de 1000. codos comunes. Llamavase tambien *Chibrath terræ*. Dos destas era la distancia que podian caminar el Sabado.

Pasàh, ò milla grande tenia 4. millas de las menores, ò 4000. codos.

El *Battho*, ò *Bado* era un vaso en que cabian 72. sextarios Hebreos, segun San Geron. sobre el 45. de Ezech. y Josepho *lib.* 8. *cap.* 2. ò 48. sextarios. Romanos; y assi era igual al Ephi, y à la Ansora de los Romanos. Algunos quieren que huviesse otro Batho legal, que era la mitad mayor, ò de 72. sextarios Romanos. Cabrian en el Batho 15. azumbres Castellanos.

El *Hin* era medida que contenia 12. sextarios Hebreos.

El *Log*, ò sextario, contenia quanto seis huevos de agua, que segun Mariana son 13. onzas, y un tercio: con que el sextario Romano era la mitad mayor que el Hebreo, ò como 3. à 2. El sextario Attico al Hebreo como 9. à 8.

El *Huevo* era la menor medida de liquidos; pesava siendo lleno de agua 2. onzas, y cerca de un quarto.

El *Chomer*, ò *Coro* era la mayor medida Hebraica de cosas liquidas, y secas; porque entrambas cosas media, como consta del 3. de los Reyes, *cap.* 5. *v.* 11. que Salomon dava cada año al Rey Hiràm veinte mil coros de trigo, y veinte coros de aceyte. Contenia 10. Bathos, ò Ephi, como consta de Ezechiel *cap.* 45. *v.* 11. en donde se dice, que el Batho, y Ephi eran medidas iguales, y entrambas la decima parte del Coro; solo se diferenciavan, en que el Ephi era medida de cosas secas, y el Batho de liquidas.

Contenia el *Coro*, segun San Geronimo sobre el *cap.* 45. de Ezechiel, 5. Medimnos, ó 30. Modios; y siendo de trigo pesarian por lo regular 600. libras.

El *Ephi* era la decima parte del coro; y assi cabrian en èl 3. Modios, como consta del *cap.* 2. *v.* 17. de Ruth.

El

El *Sato* era la tercera parte del Ephi: con que seria igual á un medio; contenia *6.* cabos, ò 4. sextarios Hebreos.

El *Gomor* era la decima parte del Ephi, como consta del Exodo *cap.* 16. *v.* 6. y assi, el trigo que cabria en el avia de pesar 36. libras; contenia un cabo, y quatro quintos. Era medida señalada por el mismo Dios para recoger el Manna, para el sustento de un dia de cada persona.

El *Cabo* era una medida que contenia 4. sextarios Hebreos.

Monedas, pesos, y medidas de Castilla.

Solo pondrè las monedas corrientes de Castilla, y estos Reynos, dexando las que no están aora en uso. Y de las monedas, pesos, y medidas hablarè solamente de las que corren en las cabezas de los Reynos, ò de las mas comunes.

El doblon de peso vale al presente quatro reales de à ocho Mexicanos.

El real de á ocho Mexicano, Segoviano, ò Sevillano vale 10. reales de plata, ò 15. de vellon.

El real de à ocho de Maria vale 8. reales de plata, ò 12. de vellon

El real de vellon vale 34. maravedis, ò 8. quartos y medio.

El quarto tiene 4. maravedis.

El ochavo 2. maravedis.

El quintal, ò centupondio tiene 4. arrobas, ò 100. libras.

La arroba contiene 25. libras.

La libra 16. onzas.

La onza 16. adarmes.

El marco tiene 8. onzas, que son media libra; si es de oro se divide en 50. Castellanos, cada Castellano en 8. tomines, y cada tomin en 12. granos. Pero si es de plata se divide en 8. onzas, cada onza en 8. ochavas, y cada ochava en 75. granos; aunque algunos quieren que se divida en 6. tomines, y por consiguiente en 72. granos: Y assi que los granos del marco de la plata sean menos en numero que los de oro, pero todos juntos en el peso iguales.

La onza de Castilla es igual à la Romana, assi antigua como moderna, la Griega, y Hebrea, segun Titino, Alcazar, Vilalpando, Mariana, y otros. Segun Alcazar es tambien igual à la de Parìs, y Venecia. Mas, 32. onzas de Castilla hacen 31. de Valencia; y assi, una

libra de Caſtilla ſon 15. onzas y media de Valencia; 35. de Caſtilla hacen 36. de Aragon, ſegun la Tabla de los peſos de Puig: y 14. de Caſtilla hacen 12. de Cataluña, ſegun el miſmo Autor.

La vara tiene 4. palmos, ò quartas.
El palmo 12. dedos ordinarios.
El piè es la tercera parte de la vara.
El codo es media vara, ò piè, y medio.
Si ſe toman 13. pies de Caſtilla, haràn 12. Romanos, ò Valencianos, porque eſtos dos ſon iguales, como queda dicho; con que 13. varas de Caſtilla ſon 12. de Valencia 9. pies Caſtellanos hacen 8. Griegos. Mas, 4. pies Caſtellanos hacen 3. Hebreos. Mas 107. pies de Caſtilla hacen 100. de Mallorca, Barcelona, y Caller.
Lo miſmo que ſe dize de pies ſe entiende de palmos, y varas, porque guardan la miſma razon; y aſsi, 13. palmos, ó varas de Caſtilla ſon 12. de Valencia.

El *Moyo* es la mayor medida de coſas liquidas, tiene 16. cantaros, ò arrobas.
El cantaro tiene 8. azumbres.
El azumbre 4. quartillos, ò ſextarios Caſtellanos.
El cantaro de aceyte tiene 4. quartas.
Una quarta 16. panillas. La panilla peſa caſi 4. onzas.
Cinco ſextarios Caſtellanos hacen 4. Romanos, y 6. Hebreos Item, 15. Caſtellanos ſon 16. Griegos. Un ſextario Caſtellano de agua peſa 16. onzas Caſtellanas; y por aqui ſe puede ſacar la correſpondencia à otras medidas.

Un cahìz tiene 12. hanegas, ò medimnos Romanos.
La hanega. 12. celemines, que ſon 6. modios Romanos.
El celemin 4. quartillos; caben en el celemin 10. ſextarios Caſtellanos, ù 8. Romanos.
Dos celemines de Caſtilla ſon un modio Romano, y 8. chenices Griegos. Mas, 3. celemines hacen 5. Gomor. Mas, 12. celemines de Caſtilla ſon 13. celemines Valencianos, ſegun Puig en el lugar citado y 32. hanegas Caſtellanas ſon 25. quarteras de Barcelona.

Monedas, peſos, y medidas de Valencia.

La libra tiene 20. ſueldos, y tambien 10. reales Caſtellanos.

El

El ſueldo 12. dineros.
El real Caſtellano 24. dineros.
El real Valenciano 18. dineros.
El doblon vale 3. lib. 17. ſueld.
El real de á 8. Mexicano 19. ſueldos, y 6. dineros.
El diezyocheno de plata de los ultimos batimientos es medio denario Romano antiguo.

La carga tiene 3. quintales, quando la arroba es de 30. libras; pero quando es de 36. tiene 10. arrobas, y tanto peſa la carga en un caſo como en otro.

El quintal 4. arrobas de 30. libras.

La arroba es en dos maneras, una de 30. lib. que llaman ſutil, ó de peſo delgado; y otra de 36. libras, que es la grueſſa; y eſta es la mas ordinaria. La arroba de la harina tiene 32. libras.

La libra 12. onzas, ſino es de peſcado frezco menudo, que tiene 16. onzas, y de peſcado gordo 18. La de carne 36.

La onza tiene 4. quartos.

El quarto 4. adarmes.

El adarme 36. granos, ſolo el de olores tiene 32. granos.

31. onza de Valencia hacen 32. de Caſtilla: 23. onzas, ò libras de Valencia ſon 24. de Zàragoza, y 20. de Barcelona, y Mallorca, ſegun el dicho Puig.

La vara tiene 4. palmos, y tambien 3. pies.
El palmo 4. quartos.
El quarto 3. dedos.
El codo es media vara.
La braza real tiene 9. palmos; y ſiendo quadrada tendrà 81. palmo.
La cuerda para medir los campos tiene 20. brazas, ó 45. varas.
La fanega de tierra tiene 200. brazas quadradas.
La chaizada 1200. brazas quadradas, ò 6. fanegadas.
La yugada 7200. bazas quadradas, ò 6. cahizadas.

12. palmos, pies, ò varas de Valencia ſon 13. de Caſtilla. Mas, 44. palmos de Valencia hacen 51. de Zaragoza, y 50. de Barcelona, y Mallora ſegun Puig; pero ſegun Cortés, 100. palmos de Valencia ſon 114. de Aragon. El piè de Valencia es igual al Geometrico, ò Romano antiguo.

La carga de vino, y vinagre tiene 15. cantaros, ò arrobas.

El

El cantaro 4. quartas, ò azumbres.

La carga de aceyte tiene 12. cantaros, ò arrobas.

Teniendo el canearo, ò arroba 36. libras, 16. azumbres de Valencia hacen 26. Castellanos, con poca diferencia; pero teniendo el cantaro 30. libras, 22. azumbres Valencianos son los mismos 26. Castellanos, tambien con poca diferencia.

El cahìz tiene 12. barchillas.

La barchilla 4. celemines.

El celemin 4. quarterones.

Trece celemines de Valencia son 12. de Castilla. Mas 48. celemines, ò un cahìz de Valencia son 42. celemines, ò 3. hanegas y media de Aragon, segun Cortès. Item, 104. barchillas de Valencia son 25. quarteras de Barcelona, segun Puig.

Monedas, pesos, y medidas de Aragon.

La libra tiene 20. sueldos.

El sueldo 12. dineros.

El real Castellano 24. dineros.

El doblon vale 3. lib. 4. sueld.

El real de à ocho Mexicano 16. sueldos.

La carga tiene 3. quintales.

El quintal 4. arrobas.

La arroba 24. lib. y 30. lib. y 36. segun fuere la mercaderia.

La libra 12. onzas; y siendo de pescado, ò carne 36.

La onza 4. quartos.

El quarto 4. adarmes.

El adarme 32. granos.

36. onzas de Aragon son 35. de Castilla. Item, 24. lib. de Aragon son 23. de Valencia, y 20. de Barcelena.

La vara tiene 4. palmos.

El palmo 4. quartos.

51. varas de Aragon son 44. de Valencia, y 50. de Barcelona.

Un nietro de vino, ò carga tiene 16. cantaros.

Un cantaro 28. libras.

El

El cahiz tiene 8. hanegas.
La hanega 3. quartales, aunque no en todas partes.
El quartal 4. celemines.
42. celemines de Aragon ſon 48. de Valencia.

Monedas, peſos, y medidas de Cataluña.

La libra vale 20. ſueldos.
El ſueldo 12. dineros.
El real Caſtellano 24. dineros.
La dobla 55. reales.
El real de à ocho Mexicano 14. reales.

La carga tiene 3. quintales.
El quintal 4. arrobas.
La arroba 26. libras.
La libra 12. onzas.
La onza 4. quartos.
El quarto 4. adarmes.
El adarme 36. granos.
100. onzas de Cataluña ſon 117. de Caſtilla, 115. de Valencia, y 120. de Zaragoza, ſegun el dicho Puig.

La cana tiene 8. palmos.
El palmo 4. quartos.
100. palmos de Barcelona ſon 107. de Caſtilla, y 88. de Valencia, y 102. de Zaragoza, ſegun el miſmo Autor.

La carga de vino 32. quarteros.
El quartero 4. quartos.
La carga de aceyte 30. quartanes.
El quartan 16. quartas.

La quartera de trigo tiene 12. quartanes.

El congio Romano, que ſegun queda dicho era un vaſo igual à un cubo de medio piè Geometrico, eſto es á un vaſo quadrado por todas partes, que tenga medio piè Geometrico por cada lado, lleno de las eſpecies ſiguientes peſaria las onzas Romanas, Griegas, Hebreas, ò Caſtellanas (todas ſon iguales) que ſeñala eſta tabla, ſegun las expe-

riencias mas exactas de Mersenno, y otros Autores; de suerte, que un cubo de oro de medio piè Geometrico pesa 2250. onzas; de azogue 1608. onzas y tres quartos, &c. Y assi, con esto queda conocida la proporcion de los metales, y otras especies.

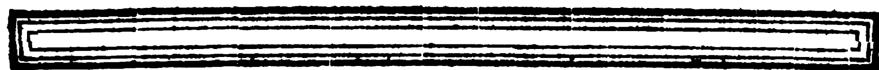
De oro	2250. onzas.	De marmol	472. onz. $\frac{1}{2}$
De azogue	1608. onz. $\frac{3}{4}$	De piedra comun	315. onzas.
De plomo	1361. onz. $\frac{1}{4}$	De cristal	281. onz. $\frac{1}{4}$
De plata	1127. onz. $\frac{1}{2}$	De azufre	270. onzas.
De cobre	1065. onzas.	De miel	180. onzas.
De laton	1012. onz. $\frac{1}{2}$	De agua	120. onzas.
De hierro	945. onzas.	De vino	118. onz. 1
De estaño comun	877. onz. $\frac{1}{2}$	De cera	112. onz. $\frac{1}{2}$
De estaño puro	892. onz. $\frac{1}{2}$	De aceyte	108. onzas.
De piedra iman.	585. onzas.	De harina.	54. onzas.

La correspondencia de las monedas modernas con facilidad se puede saber por el valor del real de à ocho. La de los pesos, y medidas es mas dificultosa, porque no tenemos copia de pesos, y medidas, justos de otros Reynos para conferirlos con toda puntualidad, como pide esta materia; y essa es la causa porque los Autores no concuerdan, sino los que se copian unos à otros. Algunos pesos, y medidas están aqui averiguados con toda la precision que en esto cabe. Otros, solamente segun los traen los Autores. Aora faltan las divisiones del tiempo, y circulo, en orden à la Astronomia.

El año civil, si es comun, tiene 365. dias: pero si bisextil 366.
El dia 24. horas.
La hora 60. minutos.
El minuto 60. segundos.
El segundo 60. tercios; y assi infinitamente.
El mes, por el trato comun, y mercantil se toma por 30. dias.

El circulo tiene 360. grados; y si es la Ecliptica se divide en 12. signos, y cada uno en 30. grados.
El grado tiene 60. minutos.
El minuto 60. segundos.
El segundo 60. tercios; y assi prosiguiendo sin termino.

LI-



LIBRO I.

DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS.

LOGISTICA, es una parte de la Arithmetica practica, que trata de las quatro reglas elementares de Sumar, Restar, Multiplicar, y Partir, que comunmente llaman *Algorithmo* de los numeros. Contiene quatro partes: La primera, trata de los numeros enteros; la segunda, de los quebrados; la tercera, de los numeros denominados por diferentes especies; la quarta, de las partes decimales.

PARTE I.

DE LA LOGISTICA DE LOS ENTEROS.

40 NUMERO entero, es el que se expressa como à todo, sin decir orden à componer, ò ser parte de otro numero; como *6. 10. 24.*

En los Proemiales dimos regla para escrivir cada numero de por sì. (12) Aora, que entramos à tratar de muchos numeros juntos, es forzoso declarar el modo de escrivirlos, segun la disposicion que piden casi todas las reglas de Arithmetica.

41 Eſcrivanſe los numeros unos debaxo de otros, de modo, que las unidades correſponden à unidades; las decenas, à decenas; centenas, à centenas, &c. formando una coluna de unidades, otra de decenas, otra de centenas, &c. como parece en el exemplo. Eſte orden ſe guardará ſiempre que no ſe advierta otra coſa en contrario.

308157
1500
12346
5032
10
1060

Siempre que los numeros ſe huvieren de eſcrivir juntos, ſe tendràn preſentes eſtas dos advertencias. La primera, que la coluna de las unidades, que es la primera, ha de eſtàr ſiempre llena; de ſuerte, que ſi ay algun vacìo, eſtè en las otras colunas, pero no en la primera; lo qual neceſſariamente ſe ſigue del orden que hemos ſeñalado antes, para eſcrivir muchos numeros.

La ſegunda, que en una coluna jamás ſe pongan dos guariſmos, ſino cada uno en ſu coluna, paraque deſte modo no ſe confundan las unidades con decenas, decenas con centenas, &c.

CAPITULO PRIMERO.

DEL SUMAR.

42 SUmar es juntar muchos numeros en uno para ſaber el valor de todos juntos; como ſumando 8. con 4. ſabemos que hacen 12. Los numeros que ſe han de ſumar, comunmente ſe dicen *Partidas*, y el agregado dellas *Suma*. Las partidas, todas han de ſer homogenas; eſto es, de una miſma eſpecie, como libras, ò arrobas, ò varas, &c. porque no ay arte para ſumar libras con varas, Reales con arrobas, &c. La ſuma ſiempre es homogenea con las partidas.

Dirá alguno; còmo puede ſer, que no aya arte para ſumar numeros hetereogeneos, ò de diferentes eſpecies, pues hallamos muchas ſumas como eſta: 4. arrobas, y 20. libras, en las quales eſtán juntas coſas de diferente eſpecie?

Reſpondo, que quando la una es parte de la otra, como las libras, que ſon parte de arroba ſe ſuman poniendo la eſpecie menor al lado de la mayor, mediante las particulas *y*, ò *mas*, deſte modo: 4. arrob. y 20. lib. ò deſte otro: 4. arrob. mas 20. lib. que es lo miſmo que decir, que además de las 4. arrob. ay 20. lib. pero no ſe ſuman haciendo un

nu-

numero de todas las especies, como lo hacemos en los homogeneos; porque cada especie ha de estár distinta: y haciendo un numero de todas, que en el exemplo sería 24. no podriamos decir que eran arrobas, ni libras.

Preceptos.

43 Primero: Escrivanse las partidas, de modo, que las unidades correspondan à unidades, decenas à decenas, &c. como se dixo arriba (41) y tirese una linea por debaxo las pertidas.

44 Segundo: Sumense los numeros de cada coluna, comenzando por las unidades; y si la suma tuviere un solo guarismo, escrivase debaxo la linea enfrente la coluna que se suma; pero si tuviere muchos, escrivase el primero como antes, y el otro, ù otros guardense en la memoria para sumarlos con los numeros de la coluna siguiente; sino es, que la coluna sumada sea la ultima, pues en tal caso los guarismos guardados se escriviràn debaxo la linea mas adelante ácia la mano izquierda.

45 Tercero: Si entre los numeros de alguna coluna ocurriere alguno, ò algunos zeros, no se haga caso dellos, sino sumense los guarismos significativos como antes; y si toda la coluna fuere de zeros, escrivase un zero debaxo la linea, si es que no se guarda algo de la coluna antecedente, pues entonces se deve escrivir lo que se guardò. Con los exemplos estarà todo manifiesto.

Exemplo I.

Escritas las partidas, como està dicho (43) comenzarè la suma por la coluna de las unidades de arriba á baxo, ó al contrario, que en esto no ay singular misterio, diciendo: 3. y 0. hacen 3. y 4. son 7. porque esta suma solo tiene un guarismo, le escrivo debaxo la linea enfrente la coluna que he sumado, y no guardo cosa alguna. Passo à la segunda coluna, diciendo: 0. y 2. son 1. y 2. son 3. escrivo el 3. y nada guardo. Passo à la tercera coluna, diciendo: 1. y 5. son 6. y 2. son 8. pongo 8. y astà concluida la suma.

103
510
224
837

Exemplo II.

Los numeros 8. 0. 5. 7. de la primer coluna, sumados hacen 20. y porque en 20. ay dos guarismos: escrivo el primer 0. debaxo la linea, y enfrente la dicha coluna, y guardo el segundo guarismo 2. para sumarle con los numeros de la coluna siguiente. Pues digo, 2. que

97068
20
28005
9087
134180

guardava, y 6. de la ſegunda coluna hacen 8. y 2. ſon 10. y 0. ſon los miſmos 10. y 8. ſon 18. eſcrivo el 8. y guardo el 1. y porque en la tercer coluna todos ſon zeros, eſcrivo debaxo la linea el 1. que guardava. Los numeros 7. 8. 9. de la coluna quarta hacen 24. pongo 4. y llevo 2. que con los numeros 9. 2. de la ultima coluna ſon 13. pongo el 3. debaxo la ultima coluna, y el 1. un lugar mas adelante.

Exemplo III.

2360000
10000
20500
———
2390500

Porque en la primera, y ſegunda coluna todos ſon zeros, eſcrivo dos zeros debaxo la linea, cada uno enfrente de ſu coluna. En la tercera ſolo eſtá el 5. ſignificativo, pues eſcrivo 5. debaxo la linea. En la quarta coluna todos ſon zeros, y nada guardava, pues pongo 0. En la quinta coluna eſtàn 6. 1. 2. que hacen 9. los quales eſcrivo. En la ſexta coluna ſolo eſtà el 3. el qual eſcrivo debaxo la linea. Paſſo à la ultima coluna, en la qual ſolo hallo al 2. pongole debaxo la linea, y eſtà concluìda la operacion.

Demonſtracion.

La demonſtracion conſiſte en probar, que tantas unidades ay en la ſuma, como en las partidas; porque ſi eſto conſta, eſtarà claro, que la ſuma es igual à todas las partidas juntas. Y paraque la demonſtracion no ſea paramente abſtracta, me valgo del Exemplo II.

Sumando, pues, los numeros de la primer coluna hacen 20. unidades, que ſon dos decenas juſtas, pues por eſſo he pueſto el 0. debaxo la coluna de las unidades, que es decir, que no ay unidad alguna, y he guardado las 2. decenas para juntarlas con la ſegunda coluna, que es de decenas.

Juntando aora eſtas dos decenas con los numeros de la ſegunda coluna hacen 18. decenas; y porque el 8. ſon decenas, las he eſcrito debaxo la coluna de las decenas, y he guardado una decena de decena, ó ciento, para juntarlo con la coluna ſiguiente de las centenas, la qual toda es de zeros, y por eſſo ſe ha eſcrito ſola la decena guardada.

Los millares de la quarta coluna ſon 24. ſe han eſcrito los 4. millares, y ſe han guardado 2. decenas de millar, las quales ſumadas con la ſiguiente coluna, que es decenas de millar, hacen 13. pues ſe han eſcrito las 3. decenas, y la decena de decena, ò cien mil, ſe ha eſcrito un lugar mas adelante. Con que ni ſe ha perdido, ni añadido de nuevo unidad alguna: Luego tantas unidades ay en la ſuma, como en las partidas.

Obſervaciones.

46 Si las partidas fueren muchas, ſerà conveniente, para no fatigar la cabeza, dividirlas en diferentes claſſes; y aviendo ſumado cada

cada

la classe de por sì, se juntarán despues las sumas; como si huviere veinte partidas, tiro una linea por debaxo de las primeras diez, y las sumo: despues sumo las otras diez, y juntando estas dos sumas, tendrè la suma total.

47 La suma de numeros pares siempre es par, Euc. *prop.* 21. *del lib.* 9. La suma de impares serà par quando el numero de las partidas fuere par, Euc. *prop.* 22. *del lib.* 9. Pero si fuere impar, serà tambien la suma impar, Euc. *prop.* 23. *lib.* 9. De donde se infiere, que sumando numero par con par, ó impar con impar, la suma es par; pero sumando par con impar, hace impar.

48 Si dos numeros entre sí primos, como 4. y 7. se suman, el numero de la suma 11. serà tambien entre sí primo á qualquiera dellos, Euc. *prop.* 30. *del lib.* 7.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL RESTAR.

49 Restàr es quitar un numero de otro mayor, ò igual para hallar la diferencia; como quitar 4. de 6. para saber la diferencia 2. ò quitar 4. de 4. para hallar la diferencia zero.

En esta regla solo concurren dos numeros, y se busca un tercero. El primero de los que concurren es de quien se resta, como en el exemplo propuesto es el 6. al qual suelen llamar los Mercaderes *Deuda*. El segundo es el que se resta, como el 4. y se llama *Paga*. El tercero es la *resta*, *diferencia*, ò *residuo*, como el 2. La deuda, y paga han de ser homogeneas, ò de una especie. La resta tambien sale homogenea con la deuda, ò paga.

Preceptos.

50 Primero: Escrivase la paga debaxo la deuda, quando la paga es menor, ò igual; pero quando es mayor, pongase la paga encima, y la deuda debaxo, para saber lo que se pagò mas; desuerte, que el numero menor siempre ha de estàr debaxo del mayor, correspondiendo las unidades à unidades, decenas á decenas, &c. (41) y tirese una linea por debaxo.

51 Segundo: La operacion se comenzará de la mano derecha àcia la izquierda, restando cada guarismo inferior de su superior,

y eſcriviendo la diferencia debaxo la linea, enfrente del guariſmo que ſe reſta. Y porque el guariſmo inferior puede ſer menor, igual, ò mayor que el ſuperior, ſe guardarà el precepto ſiguiente.

52 Tercero: Si el guariſmo inferior es menor que el ſuperior, hecha la reſta, ſe pondrà la diferencia debaxo la linea, como queda dicho. Si es igual, y no ſe guarda algo de la operacion antecedente, eſcrivaſe zero. Pero ſi es mayor, tomeſe la diferencia del guariſmo inferior haſta 10. y juntandola con el guariſmo ſuperior, eſcrivaſe la ſuma debaxo la linea, y entonces ſe guardarà 1. para juntarlo con el guariſmo inferior ſiguiente.

53 Quarto: Si el guariſmo inferior fuere zero, y no ſe guarda algo de la operacion antecedente, eſcrivaſe el miſmo guariſmo ſuperior debaxo la linea; lo miſmo ſe harà quando el guariſmo inferior fuere 9. y ſe guarda 1. de la operacion antecedente.

54 Quinto: Si en el numero ſuperior, ò paga quedan algunos guariſmos que no tengan inferiores, y no ſe guarda algo de la operacion antecedente, eſcrivanſe debaxo la linea. Todo eſtará claro en los exemplos.

Exemplo I.

Pedro devia 869. reales, y pagó 138. reales, quiere ſaber lo que queda deviendo. Eſcrita la deuda, y debaxo la paga; comience la operacion, diciendo: Quien deve 9. y paga 8. queda deviendo 1. eſcrivale debaxo del 8. Paſſe à la otra coluna, diciendo: Quien deve 6. y paga 3. queda à de-	869 138 ——— 731

ver 3. eſcrivale debaxo el 3. Paſſe à la otra coluna: Quien deve 8. y paga 1. deve 7. eſcrivale, y ſabrà que deve 731. reales.

Exemplo II.

Comienzo por las unidades, diciendo: Quien de 8. quita 3. le quedan 5. eſcrivo 5. y paſſo á la ſegunda coluna: quien de 6. quita zero, ò nada, quedan 6. pongo 6. y paſſo à la otra coluna: quien de 3. reſta 4. no puede (aqui entra el precepto tercero) pues	3190368 90403 ——— 3099965

digo, de 4. haſta 10. vàn 6. y 3. de arriba ſon 9. eſcrivoles, y llevo 1. el qual junto con el guariſmo inferior ſiguiente, que es 0. y hace 1. Aora digo: quien del 0. de arriba quita 1. no puede, pues de 1. haſta 10. van 9. y 0. de arriba ſon 9. eſcrivo 9. y llevo 1. que con el 9. inferior ſiguiente hacen 10. Digo aora, quien de 9. de arriba quita 10. no puede, pues de 10. à 10. va zero, y el nueve ſuperior ſon 9. eſcrivole, y llevo 1. Paſſo adelante: quien de 1. quita el 1. que guardava, queda zero; eſcrivole, y tambien el 3. que tiene inferior, y eſtá concluìda la reſta.

Exem-

Exemplo III.

Quien de 1. resta 6. no puede, pues de 6. hasta 10. van 4. y 1. de arriba son 5. escrivo 5. y guardo 1. el qual con el o. hace 1. Digo aora: quien deve 1. y paga 1. nada deve, ponga o. Passo à la otra coluna: quien deve 6. y paga zero, ò nada, deve los mismos 6. escrivolos y passo à la otra coluna: quien deve zero, y paga zero, nada deve; escrivo o. y passo à la otra coluna, diciendo: quien de 5. resta 7. no puede, pues de 7. hasta 10. van 3. y 5. son 8. escrivo 8. y llevo 1. el qual con el 9. son 10. Digo aora: quien de 3. quita 10. no puede, pues de 10. hasta 10. va zero, y 3. de arriba son 3. escrivoles, y llevo 1. el qual supongo que està debaxo el 2. ultimo. Digo pues: quien de 2. resta 1. queda deviendo 1. escrivole, y està acabada la resta.

2350611
970006
1380605

Escolio.

54 Quando el guarismo inferior es mayor que el superior, suelen algunos hacer la resta de otro modo, del qual nos valdrèmos en el partir. En el exemplo siguiente se han de restar 8. de 3. y porque no se puede, toman una decena del numero superior siguiente (qualquier que sea) la qual con el 3. hace 13. Aora pues, restan 8. de 13. quedan 5. y llevan 1. para juntarlo con el 6. inferior siguiente, y hacen 7. restan 7. de 9. y quedan 2. con que la resta es 25. Este modo en la sustancia es el mismo que hemos dado, como aora veremos.

93
68
25

Demonstracion.

Solo demonstrarè la regla del restar, quando el guarismo inferior es mayor que el superior, porque quando es igual, ó menor no ay dificultad. Supongo, pues, que lo mismo es tomar una decena del numero superior, como se hizo en este escolio, que tomar la diferencia del guarismo inferior hasta 10. y juntarla con el superior, como lo hemos enseñado; porque aquel 10. cuya diferencia se toma, es la decena del numero superior.

Esto supuesto, digo, que aquella decena que se tomò del numero superior, se avia de quitar despues del mismo numero, y quedarian 8. en el exemplo antecedente, entonces se restarian 6. de 8. pues porque el quitar la decena del numero superior incluye alguna circunstancia mas facil añadirla al numero inferior 6. dexando intacto el superior 9. y restar 7. de 9. y en los dos casos quedarà la misma diferencia; porque el 6. se ha aumentado una unidad, y el 9. tambien se ha aumentado otra unidad, supuesto que se avia de quitar. Luego la misma diferencia avrà de 6. à 8 que de 7. à 9. porque si á dos quantidades añadimos partes iguales, la diferencia serà la misma.

Observaciones.

55 Si muchas partidas se huvieren de restar de otras muchas, serà preciso sumar primero todas las partidas de la deuda, y despues las de la paga, para poder hacer la resta con las sumas; como si un Mercader quiere ajustar sus cuentas, para saber su caudal, sume por una parte todas las partidas que le deven, y por otra todas las que èl deve, reste pues una suma de otra, y tendrà lo que buscava.

56 Si de un numero par se quita par, ò de impar se resta impar, quedarà par, Euc. *prop.* 24. *y* 26. *del lib.* 9. Pero si de numero par se resta impar, ò de impar se quita par, el residuò serà impar, Euc. *prop.* 25. 27. y *del lib.* 9.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR.

57 MUltiplicar un numero por otro, es aumentar, ò tomar el uno tantas veces, como unidades tiene el otro: Y assi, lo mismo es multiplicar 5. por 4. que aumentar el 5. quatro veces. El numero que se multiplica se dice *Cantidad*, ò *Multiplicando*. Por quien se multiplica se llama *Multiplicador*, ò *Multiplicante*. El que sale de la multiplicacion se dice *Producto*.

De la difinicion del multiplicar se infiere lo primero, que el multiplicar es un sumar abreviado; porque lo mismo es multiplicar 5. por 4. que sumar quatro cincos. Lo segundo, que la misma razon tiene el producto à un numero de los multiplicantes, como el otro à la unidad; esto es, en el exemplo propuesto el producto 20. tiene el mismo respeto al 5. que al 4. al 1. porque para hacer el 20. se ha tomado el 5. tantas, veces, como unidades tiene el 4. Luego el 20. contiene al 5. tantas veces, como el 4. à la unidad.

Assimismo, la misma razon ay del 20. al 4. que del 5. à la unidad; porque para hacer el 20. se ha tomado el 4. cinco veces; esto es, tantas veces como unidades tiene el 5. Luego el 20. contiene al 4. tantas veces, como el 5. contiene à la unidad. De aqui se infiere, que el multiplicar es hallar un numero que tenga la misma razon à uno de los multiplicantes, como el otro à la unidad.

58 En los numeros contractos, ò en lo mercantil, el numero multiplicando, de ordinario es la especie que se compra, ò vende, y el multipli-

tiplicador es el precio; con que en esta regla los numeros dados no es necessario que sean homogeneos, ò de una misma especie, como en el sumar, y restar. El producto es de la especie del precio.

59 Aunque lo mismo es multiplicar un numero por otro, que este por aquel, v. g. *6.* por *4.* que *4.* por *6.* como lo demuestra Euc. *en la prop. 16. del lib. 7.* con todo esso, para mayor facilidad en los numeros abstractos se pondrá el mayor arriba, y el menor debaxo, y en los contractos, la especie arriba, y el precio debaxo, correspondiendo siempre unidades á unidades, decenas á decenas, &c. Este capitulo tiene tres Problemas.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR UN NUMERO DIGITO POR otro digito.

60 EL producto de un guarismo por otro, como *6.* por 8. (que son numeros digitos) se hallarà, ò por el natural conocimiento, ò por el frequente exercicio, ó por la tabla Pytagorica, ò por la regla que el vulgo llama del *Perezoso*.

Por la siguiente tabla, la qual de su autor Pytagoras, se dice Pitagorica, se hallarà el producto de la multiplicacion de dos numeros digitos del modo siguiente. Se ha de multiplicar *7.* por 8. busquese uno destos numeros en el lado izquierdo, y el otro arriba en la frente de la tabla, y corriendo las dos colunas adentro en la casilla comun, que corresponde á los dos se hallarà el producto *56.*

Assimismo, para saber quanto hacen *6.* multiplicados por 8. busquese el *6.* en el lado, y el 8. arriba, ò al contrario, y corriendo la linea de uno, y otro, en el angulo comun se hallará el 48.

Tabla Pytagorica.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Por la regla del perezoso (la qual solo es de conveniencia quando los numeros digitos son mayores que 5.) hallarémos el producto deste mo-

modo. Supongo que ſe han de multiplicar 7. por 8. eſcrivo el uno debaxo el otro, y al lado las diferencias de cada uno haſta 10. las quales ſon 3. y 2. Multiplico las diferencias entre sì, (lo qual no es dificultoſo por ſer numeros pequeños) cuyo producto 6. le eſcrivo debaxo las dichas diferencias. Deſpues reſto en cruz qualquier diferencia del numero opueſto; eſto es, reſto 3. de 8. ò 2. de 7. y quedan cinco; con que ſerà el producto 56.

7——3	
8——2	
5	6

Otro exemplo: Se han de multiplicar 6. por 7. eſcritos eſtos numeros, y ſus diferencias haſta 10. como antes, multipliquenſe las diferencias 4. y 3. entre sì, y ſerá el producto 12. el qual porque tiene dos guariſmos, eſcrivaſe el primero, que es 2. debaxo las diferencias, y guardaſe el otro; deſpues reſtanſe las diferencias en cruz, y quedaràn 3. á los quales ſe añadirà el 1. guardado; con que ſerà el producto 42.

6——4	
7——3	
4	2

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR UN NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS por numero digito.

Preceptos.

61 PRimero: Eſcrivaſe el numero menor debaxo del mayor en el lugar de las unidades, y tireſe una linea por debaxo.

62 Segundo: comenzando la operacion de la derecha àcia la izquierda, multipliqueſe cada guariſmo del numero ſuperior por el guariſmo inferior, conforme ſe dixo en el Problema antecedente; y ſi el producto tiene un guariſmo ſolo, ſe eſcrivirà debaxo el guariſmo multiplicado del numero ſuperior; pero ſi tuviere dos, eſcrivaſe el primero como antes, y el otro guardaſe en la memoria para juntarlo con el producto ſiguiente, ſi no fuere el ultimo, porque en tal caſo ſe eſcrivirà un lugar mas adelante àcia la izquierda.

63 Tercero: Si en la cantidad huviere algun zero, en llegando à multiplicarſe ſe pondrà zero en el producto, ſi es que no ſe guarda algo de la operacion antecedente, porque entonces ſe ha de eſcrivir aquello que no ſe guardò. Practiquémos los preceptos.

Exem-

Exemplo I.

Tengo de multiplicar 1036. por 2. Multiplico 2. por 6. diciendo: dos veces 6. ſon 12. eſcrivo el 2. debaxo el 6. y guardo 1. Proſigo diciendo: dos veces 3. ſon 6. y 1. que guardava ſon 7. eſcrivo el 7. debaxo el 3. y nada guardo. Paſſo adelante: dos veces 0. es 0. y porque nada guardava, eſcrivo el 0. Digo deſpues: dos veces 1. ſon 2. eſcrivole, y eſtà concluìda la operacion.

1036
2
2072

Exemplo II.

Siete veces 5. ſon 35. eſcrivo el 5. y guardo 3. Otra vez: ſiete veces 1. ſon 7. y 3. que guardava ſon 10. pongo el 0. y guardo 1. Proſigo: ſiete veces 0. es 0. y 1. que guardava es 1. eſcrivole. Deſpues digo: ſiete veces 6. ſon 42. eſcrivo el 2. y llevo 4. Ultimamente: ſiete veces 9. ſon 63. y 4. que llevava ſon 67. eſcrivo el 7. debaxo el 9. y el 6. un lugar mas adelante.

96015
7
672105

Exemplo III.

Nueve veces 0. es 0. eſcrivole. Otra vez; nueve veces 8. ſon 72. eſcrivo el 2. y guardo el 7. Nueve veces 3. ſon 27. y 7. que guardava hacen 34. eſcrivo el 4. y llevo 3. Nueve veces 0. es 0. y 3. que llevava ſon 3. eſcrivole, y nada guardo. Otra vez: nueve veces 0. es 0. y porque nada guardo, eſcrivo el 0. Nueve veces 2. ſon 18. eſcrivo el 8. debaxo el 2. y el 1. una caſa mas afuera.

200380
9
1803420

Demonſtracion.

Atendiendo con cuydado à la operacion, ſe verá que es manifieſta; porque ſi el primer producto parcial tiene dos guariſmos, el primero pertenece à las unidades, y por eſſo ſe eſcrive debaxo el primer guariſmo de la cantidad: y el ſegundo pertenece à las decenas, y eſſa es la cauſa porque ſe guarda para juntarlo con el ſegundo producto parcial que es de decenas; el qual ſi tiene dos guariſmos, ſe eſcrive el primero, que es de las decenas, debaxo el ſegundo guariſmo de la cantidad, que tambien es de las decenas, y ſe guarda el ſegundo guariſmo para juntarlo con el tercero producto parcial, que es de las centenas, y aſsi de los demás. Lo que ſe vè en el exemplo preſente, donde eſcriviendo los productos parciales cada uno de por sì, el 4. del primer producto 40. (que ſe avia de guardar, para juntarle con el primer numero del ſegundo producto) correſponde à eſte, que es el 2. con quien ſe ſuma.

345
8
40
32
24
2760

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR UN NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS por otro tambien de muchos guarismos.

Preceptos.

64 PRimero: Dispuesto los numeros de modo, que en los *Abstractos* el menor, y en los *Contractos* el precio, estèa debaxo, correspondiendo unidades à unidades, &c. (59) y tirada una linea, multiplicase cada guarismo del numero inferior por todos los del superior, como si estuviera solo, segun se dixo en el Problema antecedente, comenzando à escrivir cada producto debaxo el guarismo que multiplica, procediendo ácia la izquierda.

65 Segundo: Sumense los productos parciales del mismo modo que están escritos, y la suma será el producto total. Los preceptos quedarán manifiestos con los exemplos.

Exemplo I.

Multiplico el 4. por todos los guarismos de la cantidad, ò numero superior, como si estuviera solo, conforme queda dicho en el Problema antecedente, y el producto le comienzo à escrivir baxo el mismo 4. y voy procediendo ácia la izquierda. Del mismo modo multiplico el segundo guarismo del numero multiplicador, que es 2. por todos los guarismos de la cantidad, comenzando à escrivir el producto baxo el mismo 2. Despues sumo los productos parciales segun están escritos, y tengo el producto total que buscava.

```
  8006
    24
------
 32024
16012
------
192144
```

Exemplo II.

Multiplico el o. del multiplicador por toda la cantidad, cuyo producto es todo de zeros, los quales comienzo à escrivir baxo el mismo o. Multiplico despues el 1. del multiplicador por toda la cantidad, comenzando à escrivir el producto baxo el mismo 1. y porque la unidad no aumenta la multiplicacion, basta copiar la misma cantidad en el lugar del producto. Multiplico ultimamente el 9. por toda la cantidad, comenzando à escrivir el producto baxo el mismo 9. Hago la suma, y tengo el producto total deseado.

```
   1600
    910
-------
   0000
  1600
 14400
-------
1456000
```

Exem-

Exemplo III.

	90136
	8018
	721088
	90136
	00000
	721088
	722710448

Multiplico el 8. por todos los guarismos de la cantidad, y el producto le comienzo à escrivir baxo el mismo 8. como se dixo antes. Despues multiplico el 1. por toda la cantidad; y porque la unidad no aumenta la multiplicacion, basta copiar la cantidad, comenzando à escrivirla baxo el mismo 1. Multiplico el 0. del multiplicador por toda la cantidad, cuyo producto todo es de zeros. Multiplico ultimamente el 8. por toda la cantidad; y porque en el multiplicador ay otro 8. basta copiar el producto correspondiente al primer 8. porque es el mismo, ò igual, el qual comienzo à escrivir baxo el 8. que se multiplica; despues sumando los productos parciales del modo que están escritos, hallo el producto total que buscava.

Demonstracion.

Que la regla, para hallar los productos parciales sea verdadera, yà està demonstrado en el Problema antecedente. Aora solo falta probar, que los dichos productos parciales se devan comenzar à escrivir baxo el guarismo multiplicador, y despues sumarlos segun están escritos; lo qual es evidente, porque el primer guarismo del multiplicador, que pertenece à las unidades, multiplicando los guarismos de la cantidad, primero produce unidades, despues decenas, centenas, &c. y assi su producto se ha de comenzar à escrivir baxo las unidades.

El segundo guarismo del multiplicador, porque pertenece á las decenas, produce primero decenas, despues centenas millares, &c. y assi su producto se ha de comenzar à escrivir baxo las decenas, suponiendo que en el lugar de las unidades ay un zero, el qual no se escrive por no confundir.

El tercer guarismo es de las centenas; y por esso quando multiplica los guarismos de la cantidad, produce primero centenas, despues millares, decenas de millar, &c. con que su producto se ha de comenzar à escrivir baxo las centenas, suponiendo que al principio ay dos zeros para llenar los lugares de las unidades, y decenas, que no se escriven por no perturbar, y assi de los demás productos. Luego los productos están bien escritos para sumarlos; porque aunque la primer coluna no estè llena, pero faltan zeros que la llenen, como está dicho.

Escolio.

66 Para alivio de los que se fatigan la cabeza en cuentas largas, ser-

ſervirá la regla ſiguiente de multiplicar por ſumas, la qual es muy ſegura, y de grande deſcanſo, en particular quando una miſma cantidad ſe ha de multiplicar muchas veces por diferentes numeros.

Eſcrivaſe la cantidad aparte, y doblandola, que es multiplicar por 2. ſaldrá la ſegunda linea; ſumenſe la primera, y ſegunda linea, y tendrèmos la tercera: ſumando la primera con la tercera hallarèmos la quarta: juntando la primera con la quarta, conocerèmos la quinta, y aſsi de las demás. Al lado de cada linea eſcrivanſe los exponentes 1. 2. 3. 4. &c. como parece en la formula.

653	1
1306	2
1959	3
2612	4
3265	5
3918	6
4571	7
5224	8
5877	9

Supongo, pues, que ſe ha de multiplicar la cantidad miſma por 829. porque el primer guariſmo del multiplicador es 9. copieſe la linea del 9. comenzando debaxo el 9. del multiplicador. Porque el ſegundo guariſmo del multiplicador es 2. copieſe la linea del 2. comenzando baxo el ſegundo guariſmo del multiplicador. Y porque el tercer guariſmo del multiplicador es 8. copiaſe la linea del 8. comenzando à eſcrivirla baxo el miſmo 8. Deſpues ſe ſumarán los productos, para ſaber el producto total. Eſte modo de obrar, en la ſubſtancia es el miſmo que hemos dado en los Problemas antecedentes.

```
     653
     829
  ------
    5877
   1306
  5224
  ------
  541337
```

Obſervaciones.

67 Para hacer con mayor brevedad algunas operaciones del multiplicar, obſervanſe eſtas reglas, nacidas de las que hemos dado arriba. La primera: Si entre los guariſmos del multiplicador ocurriere algun zero, baſta poner zero en el producto parcial, baxo el miſmo zero del multiplicador; y paſſando al otro producto, ſe eſcrivirà en la miſma linea, como parece en eſte exemplo, en el qual para multiplicar el zero, ſolo ſe ha eſcrito un zero, y el producto de la multiplicacion por el 2. ſe ha continuado en la miſma linea; porque ſi ſe eſcrivieran los zeros, como en el exemplo tercero, los que eſtan entre los otros guariſmos no mudan la ſuma, y aſsi no es neceſſario eſcrivirlos.

```
     637
     205
  ------
    3185
  12740
  ------
  130585
```

68 La ſegunda: Si en el principio de la cantidad, ò multiplicador huviere alguno, ò algunos zeros, como en el exemplo preſente

baſta

basta multiplicar los guarismos significativos, como si estuvieran solos, y al producto añadirle tantos zeros como huviere en la cantidad, ò en el multiplicador, ò en entrambos juntos. La razon deste modo de abreviar entendrá claramente quien la cotejáre con el Exemplo II.

2360
1400
944
236
3304000

69 De aqui se infiere, que si un numero se ha de multiplicar por 10. 100. 1000. 10000. &c. basta añadirle tantos zeros como tiene el multiplicador; y assi, multiplicando 84. por 100. será el producto 8400. Porque como la unidad no aumenta la multiplicacion, queda el mismo numero, ò cantidod por producto: à mas desto, quando en el multiplicador ay zeros al principio, basta añadirlos al producto, como se dixo antes; luego multiplicando por numero que tiene una unidad, y zeros, con añadir otros tantos zeros à la cantidad, queda multiplicada.

70 Un numero par, multiplicado por qualquier numero par, produce par: un numero impar, multiplicado por par, hace par, Euc. *prop.* 28. *del lib.* 9. Tambien un numero impar, multiplicado por impar, hace impar, Euc. *prop.* 29. *del lib.* 9.

71 Si un numero multiplica à otros dos, los productos tienen la misma razon, que los numeros multiplicados: como si el 6. multiplica al 8. y 4. los productos 48. y 24. tienen entre sì la misma razon que los numeros multiplicados 8. y 4. con que son quatro proporcionales, como 8. à 4. assi 48. à 24. (32) esto demuestra Euc. *en la prop.* 17. *del lib.* 7.

72 Si dos numeros, como 5. y 3. fueren primos à un tercio 4. el producto 15. de los dos será tambien primo al mismo 4. Euc. *prop.* 26. *del lib.* 7. Y si dos numeros, como 7. y 5. cada uno fuere primo à cada uno de otros dos, como à 3. y à 2. el producto 35. de los primeros será tambien primo al producto 6. de los segundos, Euclides *prop.* 28. *del lib.* 7.

73 Si dos numeros, como 4. y 7. fueren entre sì primos, y el uno 4. se multiplica por sì mismo, el producto 16. será tambien primo al otro 7. Euc. *prop.* 27. *del lib.* 7. y si cada uno de los mismos numeros se multiplica por sì mismo, los productos 16. y 49. serán tambien entre sì primos. Y si otra vez estos productos se multiplican por los mismos numeros, los productos que saldrán 64. y 343. serán tambien entre sì primos, y assi infinitamente, Euc. *prop.* 29. *del lib.* 7.

74 Si quatro numeros, como 8. 2. 12. 3. son proporcionales, esto es, si la mesma razon tiene el primero 8. al segundo 2. que el ter-

cero 12. al quarto 3. será el producto de los extremos 8. y 3. igual al producto de los medios 2. y 12. esto es, multiplicando 8. por 3. sale 24. y multiplicando 2. por 12. tambien sale 24. Y al contrario: si de quatro numeros el producto de los extremos fuere igual al producto de los medios, los quatro numeros seràn proporcionales, Euc. *prop.* 19. *del lib.* 7.

Aplicacion del multiplicar.

75 Por esta regla del multiplicar, aplicada à numeros contractos, sabremos el valor de lo que se compra, ò vende, multiplicando la especie por el precio; como si Pedro comprò 12. varas de paño à 3. libras la vara, para saber quanto valen multiplique 12. por 3. y hallarà 6. libras, que es el valor de las 12. varas.

Assi mismo: Pedro vende 32. cavallos por 25. reales de à ocho cada uno; si quiere saber el valor de todos, multiplique 32. por 25. y hallará que valen 800. reales de à ocho. Del mismo modo: Pedro compra 18. arrobas de azucar à razon de 30. reales la arroba, para saber quanto deve, multiplique 18. por 30. y hallarà 540. reales.

76 Tambien por esta misma regla convertirèmos la especie de mayor valor en la de menor, ò la moneda mas alta en la mas baxa, multiplicandola por el numero en que la especie mayor, ò mas alta se divide para hacer la menor, ò mas baxa, que es el numero de las veces que la especie mayor contiene à la menor, el qual se hallará en la segunda parte de los proemiales.

Quiero reducir 36. libras, moneda de Valencia, à sueldos: porque la libra contiene 20. sueldos: multiplico 36. por 20. y hallo 720. sueldos; los quales, si los quiero convertir en dineros, porque el sueldo tiene 12. dineros, multiplico los 720. sueldos por 12. y salen 8640. dineros.

Para reducir 48. libras de la misma moneda à dineros, conviertolas primero à sueldos, multiplicando por 20. y salen 960. sueldos, los quales multiplico por 12. y hallo 11520. dineros. Podia tambien de primera instancia hacer lo mismo, multiplicando las 48. libras por 240. dineros que tiene cada libra, y saldrà lo mismo.

Otro exemplo: Se han de reducir 20. reales, moneda de Castilla, à maravediz; porque cada real consta de 34. maravediz, multiplico los 20. reales por 34. y hallo 680. maravediz. Assimismo: He de convertir 10. cahices de Castilla à celemines; porque cada cahiz tiene 12. hanegas, multiplico 10. cahices por 12. y salen 120. hanegas; y porque cada una contiene 12. celemines, multiplicolas por 12. y hallo 1440. celemines.

Para

Para reducir toda esta cantidad 8. libras 17. sueldos, y 10. dineros, moneda de Valencia, à la ultima especie, que son dineros, multiplicarè las 8. libras por 20. sueldos que tiene cada libra, y al producto 160. añadirè los 17. sueldos de la cantidad, y serán 177. sueldos; los quales multiplicarè por 12. dineros que tiene cada sueldo, y al producto 2124. añadirè los 10. dineros de la cantidad, y estará toda reducida à 2134. dineros.

Del mismo modo: Si quiero reducir 5. arrobas 18. libras, y 9. onzas, peso de Castilla, à la ultima especie, que son onzas, multiplicarè las 5. arrobas por 25. libras que tiene cada arroba Castellana, y al producto 125. añadirè las 18. libras de la cantidad, con que serán 143. libras, las quales multiplicarè por 16. onzas que tiene cada libra en Castilla, y al producto 2288. añadirè las 9. onzas de la cantidad, y quedará reducida à 2297. onzas.

CAPITULO QUARTO.

DEL PARTIR.

77 PArtir un numero por otro es distribuirle en tantas partes quantas unidades tiene el numero por quien se parte; como partir 12. por 4. es dividir el 12. en quatro partes, porque tantas unidades tiene el 4. De otro modo se puede explicar, diciendo, que partir es sacar un numero de otro, tantas veces quantas se contiene en èl.

Al numero que se parte llamaremos *Cantidad*, ò *Dividendo*; à aquel por quien se parte *Partidor*, ò *Divisor*; y à lo que sale de la division *Quociente*, porque señala las veces que el partidor se contiene en la cantidad. La cantidad, y el partidor no es preciso que sean de una misma especie; pero el quociente casi siempre sale de la especie de la cantidad.

78 De lo dicho se infiere dos cosas; la primera, que el partir es un restar abreviado; porque es sacar un numero de otro tantas veces como se contiene en èl; luego es lo mismo que restarle las mismas veces: como si el 4. se resta del 12. quedará el residuo 8. con que yá se ha sacado un 4. del 12. Si otra vez se resta el 4. del 8. quedará 4. yá se ha sacado otro 4. Si otra vez se resta 4. de 4. queda zero, yá se ha sacado otro 4. y asi se han sacado tres quatros; pues para no hacer

tantas restas se divide el 12. por 4. y viene al quociente 3. que son las veces que el 4. se contiene en el 12. Por esso algunos à la division suelen llamar *Aplicacion*, porque un numero se entiende que se aplica muchas veces para restarle.

79 La segunda, que despues de hecha la division, la misma razon tiene el quociente con la unidad, que la cantidad con el partidor; como en el exemplo propuesto el quociente 3. tiene à 1. la misma razon que 12. à 4. porque como el partir sea sacar un numero de otro tantas veces quantas se contiene en èl, y tantas veces se contiene quantas unidades tiene el divisor: luego la misma razon ay del quociente à la unidad, que de la cantidad al divisor. Y assi, el partir se puede explicar de otro modo, diciendo, que es buscar un numero que tenga con la unidad la misma razon, que la cantidad con el divisor.

Esta regla de partir es inversa, ò contraria à la del multiplicar; porque enseña à resolver lo que compone el multiplicar, y lo que la una hace, la otra deshace: como por la multiplicacion de 5. por 3. se hace el 12. y por la division del 12. por 4. se resuelve el mismo 12. viniendo al quociente 3. Este capitulo contiene dos problemas; en el primero se enseña à partir por numero digito, que vulgarmente llaman medio partir: En el segundo se dá regla para partir por numero de muchos guarismos, que es entero partir.

PROBLEMA I.

PARTIR POR NUMERO DIGITO, O MEDIO PARTIR.

Preceptos.

80 PRimero: Escrivase el divisor al lado de la cantidad, tirando una linea por el lado, y que corra por debaxo, y la operacion se comenzará de la izquierda à la derecha; porque como la division resuelve lo que compuso la multiplicacion, ha de comenzar por donde èsta acaba; pues lo ultimo de la composicion, es lo primero en la resolucion.

81 Segundo: Si el ultimo guarismo de la cantidad es igual, ó mayor que el partidor, pongase una distincion antes de dicho ultimo guarismo; pero si fuere menor, se tomarà un guarismo mas, poniendo la dicha distincion antes de los dos ultimos guarismos, y con esto quedará separado el primer miembro, y el quociente ha de tener tantos

gua-

guarismos, quantos tuviere la cantidad, contando al primer miembro por un solo guarismo, aunque en él aya muchos.

82 Tercero: Dividase el primer miembro por el divisor; esto es, mirese quantas veces el partidor cabe en el dicho miembro, que es lo mismo que vèr por què numero se multiplicará el partidor, de suerte, que el producto iguale, ò haga el numero proxime menor, que pueda caber en el mismo miembro, y serà el quociente, el qual se escrivirà debaxo el partidor. Despues se multiplicarà el quociente por el partidor, y restando el producto del miembro, se escrivirà el residuo debaxo, el qual no puede ser mayor, ni igual al partidor, sino menor; porque si fuera igual, ò mayor, podria el partidor caber en la cantidad alomenos una vez mas.

83 Quarto: De la cantidad se abaxarà el guarismo siguiente al miembro, poniendole al lado del residuo, y harà el segundo miembro, el qual se partirà por el divisor, como antes; despues se abaxarà el siguiente guarismo de la cantidad al lado del segundo guarismo, para tener el tercer miembro; y asi de los demás.

84 Quinto: Si algun miembro, por ser menor, no se puede partir por el divisor, se pondrá zero en el quociente, y se abaxarà el guarismo siguiente, para tener el otro miembro.

85 Sexto: Si divididos todos los miembros sobràre algo, se escrivirà al lado derecho del quociente encima de una linea, y debaxo se pondrà el partidor en forma de quebrado. Practiquèmos los preceptos.

Exemplo I.

	6,27	3
	0 2	2

Se ha de partir este numero de 627. reales à 3. hombres; dispuestos los numeros, como parece en la formula, porque el ultimo guarismo 6. de la cantidad, es mayor que el partidor 3. pongo una distincion al 6. y divido el 6. por el 3. esto es, veo quantas veces càbe el 3. en el 6. ò por qual numero se ha de multiplicar el 3. paraque haga 6. ù otro numero proxime menor, y hallo que es el 2. escrivole debaxo el partidor, (que es el lugar del quociente) y le multiplico por el mismo partidor, diciendo: Dos veces 3. son 6. restoles del 6. de la cantidad, y queda zero, escrivole por primer residuo debaxo el 6. del miembro.

	6,27	3
	0 27	209
	0	

Despues abaxo el 2. de la cantidad, poniendole al lado del primer residuo, para hacer el segundo miembro 02, el qual divido por 3. Y porque no puedo por ser menor que el divisor,

 pon-

pongo o. en el quociente à la derecha del 2. y abaxo el 7. de la cantidad, escriviendole al lado del residuo segundo, que es 02. y será el tercer miembro 27. Aora divido el 27. por 3. y hallo el quociente 9. escrivole al lado del o. y multiplico el 9. por 3. diziendo: Nueve veces. 3. son 27. restolos del miembro 27. queda o. con que está concluida la operacion, siendo el quociente 209. reales, que son los que tocan à cada un hombre.

Exemplo II.

He de partir 10540. à 6. porque el ultimo guarismo 1. es menor que el partidor 6. tomo un guarismo mas, y separo el primer miembro 10. con una distincion; y porque en la cantidad ay quatro guarismos, contando el primer miembro por uno, sabrè que el quociente ha de tener tambien quatro guarismos. Divido, pues, el miembro 10. por 6. diciendo: 10. partidos à 6. doy 1. al quociente (porque el 6. sola uno vez cabe en el 10.) escrivo el 1. debaxo el partidor, y le multiplico por el mismo partidor, diciendo: Una vez 6. son 6. restados de 10. quedan 4. escrivoles debaxo el miembro 10. y tengo el primer residuo 4.

```
10,540 |_6_
4        1
```

Para tener el miembro segundo abaxo el 5. escriviendole al lado del residuo 4. y será 45. dividiendole por 6. y caben al quociente 7. escrivo 7. en el lugar del quociente al lado del 1. y multiplicando los 7. por 6. resto el producto 42. del miembro 45. quedan 3. que escrivo debaxo el 5. del miembro, y será el 3. el residuo segundo.

```
10,540 |_6_
4 5      17
  3
```

Despues abaxo el otro guarismo 4. de la cantidad, poniendole al lado del residuo 3. para hacer el tercer miembro 34. el qual divido por 6. y hallo que al quociente le caben 5. escrivolos en el quociente al lado de 17. y multiplicando 5. por el divisor 6. resto el producto 30. del miembro 34. y queda el residuo 4. el qual escrivo debaxo el 4. del 34.

```
10,540 |_6_
4 5      175
  34
   4
```

Luego abaxo el o. de la cantidad al lado del residuo 4. para tener el miembro quarto 40. dividole por 6. y hallo que le tocan à 6. escrivolos en el quociente, y aviendolos multiplicado por el partidor 6. resto el

```
10,540 |_6_
4 5      1756 4
  34
   40
    4
```

pro-

producto 36. del miembro 40. y quedan 4. y porque este residuo es el ultimo, pongole al lado del quociente, tirando por debaxo una linea pequeña, debaxo de la qual escriviré el partidor 9. como parece el formula.

Exemplo III.

Se han de repartir 108035. hanegas de trigo entre nueve casas. Pongo la distincion al 10. porque el ultimo guarismo 1. es menor que el partidor, y parto el primer miembro 10. á 9. hallo que el quociente es 1. escrivole debaxo el partidor, y multiplicando 1. por 9. hacen 9. restolos de 10. queda 1. por residuo, el qual escrivo debaxo del 0.

10,8035 | 9
1 | 1

Abaxo el 8. de la cantidad, escriviendole al lado del residuo 1. y tendré el segundo miembro 18. dividole por 9. y le doy al quociente à 2. escrivo 2. en el quociente al lado del 1. y multiplicando el 2. por el partidor 9. resto el producto 18. del miembro 18. y queda 0. por residuo, el qual escrivo debaxo el 8. del 18.

10,8035 | 9
18 | 12
0

Prosigo en abaxar el guarismo siguiente 0. de la cantidad, y será el tercer miembro 00. y porque no le puedo partir por el 9. escrivo 0. en el quociente, y abaxo el otro guarismo 3. para hacer el miembro quarto 003. el qual tampoco puede partirse por el 9. por ser menor, pues pongo otro 0. en el quociente.

10,8035 | 9
18 | 1200
003

Ultimamente, abaxo el 5. de la cantidad, y tendrè el otro miembro 35. dividole por 9. y le doy 3. al quociente; multiplico 3. por 9. son 27. rastoles de 35. y quedan 8. y por ser el ultimo residuo le escrivo al lado del quociente encima una linea, y debaxo el partidor 9. Con que pertenecen à cada casa 12003. hanegas, y ocho novenos de hanega.

10,8035 | 9
18 | 12005 $\frac{8}{9}$
0035
8

Si preguntares què significa el ultimo residuo encima de una linea, y debaxo el partidor? Digo, que si una unidad de la cantidad se considera dividida en tantas partes como unidades tiene el divisor, se han de tomar tantas destas, como unidades tiene el ultimo residuo; como en el exemplo presente, una hanega se ha de dividir en 9. partes iguales, y destas se han de tomar 8. que tocan à cada casa; de suerte, que

à demàs de las 12003. hanegas que tocan à cada casa, se han de tomar 8. partes de las 9. en que se ha de dividir una hanega, que son ocho novenos de hanega: y para esso son las 8. hanegas que sobran.

Demonstracion.

La demonstracion contiene muchas partes, las quales se demonstraràn de por sì. La primera: que la operacion se aya de comenzar de la izquierda àcia la derecha, ya se hizo notorio en el precepto primero.

La segunda: que el quociente conste de tantos guarismos como ay en la cantidad, contando el primer miembro por uno, como queda advertido en el precepto segundo, es manifiesto, porque tantas veces se puede aplicar el partidor à la cantidad; y si bien se advierte, multiplicando el partidor por el quociente, se verà que los productos parciales tienen correspondencia con los miembros de la division, y en particular quando nada sobra.

La tercera: que qualquier guarismo del quociente sea el verdadero (si està bien hecha la operacion) lo pruevo assi: Multiplicando el quociente parcial por el partidor, y restando el producto del miembro, queda un residuo menor que el divisor: luego el dicho guarismo, ò quociente parcial es el verdadero, pues manifiesta quantas veces cabe el partidor en el miembro.

La quarta: que quando sobra algo en la particion, se aya de poner encima de una linea, y el divisor debaxo en forma de quebrado, es claro si se considera lo siguiente: Supongo, que partiendo un qualquier numero de reales á 4. compañeros, sobra 1. real, sin duda que este real que sobra se ha de partir en quatro partes iguales, y à cada compañero le tocarà una parte, que es un quarto de real, ò 6. dineros; si sobran 2. reales tocarà à cada compañero dos quartos, ò 12. dineros, porque sobrando un real tocò un quarto à cada uno; luego sobrando dos reales tocarán dos quartos: si sobran 3. reales, vendràn à cada compañero tres quartos, ò 18. din ros, porque sobrando un real tocò à cada uno un quarto; luego sobrando 3. reales tocaràn tres quartos: con que obrando conforme mandan los preceptos, saldrà el verdadero quociente.



PRO-

PROBLEMA II.

PARTIR POR NUMERO DE MUCHOS GUARISMOS, *ó entero partir.*

EN este Problema los preceptos son casi los mismos que en el antecedente; pero paraque no aya la menor dificultad en aplicarlos, pondrè los mas principales.

Preceptos.

86 Primero: Despues de escritos el partidor, y cantidad, como en el Problema passado, se han de separar de la cantidad con una distincion tantos guarismos, quantos tuviere el partidor, con tal que hagan numero igual, ò mayor que el partidor; porque si hicieren numero menor, se ha de tomar un guarismo mas, y quedarà distinguido el primer miembro.

87 Segundo: Partase el ultimo guarismo del miembro, (ò los dos ultimos) quando el miembro tuviere un guarismo mas que el divisor, por el ultimo guarismo del mismo divisor, dandole por quociente aquel numero, que despues de multiplicado por todo el divisor pueda el producto restarse de tal miembro; y assi, no siempre se podrà dar al quociente todas las veces que el ultimo guarismo del divisor cabe en el ultimo, ò ultimos del miembro, porque se ha de atender à la multiplicacion: ni tampoco se podrà dar al quociente 10. porque en un assiento no puede aver dos guarismos, (41) con que lo mas que se puede dar son 9. Hecho esto, vayase multiplicando el quociente por todos los guarismos del partidor, camenzando por la derecha; y juntamente restando los productos parciales del miembro, comenzando tambien à restar de la derecha, y escriviendo el residuo debaxo el miembro; el qual residuo (como està dicho) no puede ser igual, ni mayor que el partidor.

88 Tercero: Baxese el guarismo siguiente de la cantidad, escriviendole al lado del residuo, para hacer el miembro segun, el qual se partirà del mismo modo. Si algun miembro no se pudiere partir por ser menor que el divisor, se pondrà 0. en el quociente; y se abaxarà el guarismo siguiente de la cantidad, para hacer el otro miembro. Si à lo ultimo sobràre algo, se pondrà al lado del quociente encima de una linea, y debaxo se escrivirà el divisor, como està dicho en el Problema antecedente. Esto es dificultoso, y quiere mucha practica.

Exem-

Exemplo I.

Tengo 984. reales de renta cada año, y quiero saber quanto tengo cada mes: porque el año tiene 12. meses, divido los 984. reales por 12. deste modo. Separo los dos guarismos ultimos de la cantidad con una distincion, (porque hacen numero mayor que los del divisor) y tendrè el primer miembro 98. Divido el ultimo guarismo del miembro, que es 9. por el ultimo del divisor, que es 1. y le doy à 8. por quociente, el qual escrivo debaxo el partidor. Multiplico aora el quociente 8. por todos los guarismos del divisor, y juntamente resto el producto de todos los guarismos del miembro, deste modo: Ocho veces 2. son 16. los quales porque no puedo restarlos del 8. del miembro, tomo una unidad del 9. y seràn 18. resto aora 16. de 18. y quedan 2. que escrivo debaxo el 8. del miembro, y guardo 1. por la unidad que tomè: despues multiplico 8. por 1. son 8. y 1. que guardava son 9. restolos del 9. del miembro, y queda 0. Con que serà el primer residuo 2.

98,4	12
02	8

Abaxo el guarismo siguiente 4. de la cantidad, escriviendole al lado del residuo, y tengo el segundo miembro 24. Divido aora el 2. del 24. por el 1. del 12. y le doy 2. por quociente, el qual escrivo al lado del quociente parcial 8. multiplico el 2. por el 2. del partidor, y el producto 4. le resto del 4. del miembro, queda 0. multiplico otra vez el quociente parcial 2. por el 1. del partidor, y resto el producto 2. del otro guarismo 2. del miembro, queda 0. y està concluìda la operacion. Con que cada mes tengo 82. reales.

98,4	12
2 4	82
0 0	

Exemplo II.

Se han de partir 23065. à 79. porque los dos ultimos guarismos 23. de la cantidad son numero menor, que los del partidor, pongo la distincion al tercero, y será el primer miembro 230. el qual, porque tiene un guarismo mas, que el partidor, parto los dos ultimos guarismos, esto es, el 23. por el ultimo 7. del partidor; y aunque parece que podia dar al quociente 3. pero si atiendo à la multiplicacion, no puedo dar sino 2. escrivole en el lugar del quociente: aora multiplico el 2. del quociente por el 9. del partidor, y el producto 18. le resto del primer guarismo 0. del miembro, pues porque no puedo restarle, por ser menor, tomo dos decenas del 23. y seràn 20. resto aora 18. y quedan 2. los quales escrivo debaxo el 0. y guardo 2. por

230,65	79
72	2

por las dos decenas que tomè prestadas; multiplico otra vez el quociente 2. por el 7. del partidor, y al producto 14. añado las dos decenas que guardava; con que seràn 16. restolos de 23. y quedan 7. que escrivo debaxo el 3. y serà el residuo 72. menor que el partidor.

Hecho esto, baxo el guarismo siguiente 6. de la cantidad, y le escrivo al lado del residuo, para hacer el segundo miembro 726. el qual porque tiene un guarismo mas que el divisor, parto los dos guarismos ultimos 72. por el 7. del partidor, y le doy 9. al quociente, el qual escrivo al lado del quociente parcial 2. Aora multiplico el quociente 9. por los 9. del partidor, y el producto 81. le resto del 6. del miembro, pues porque no puedo, tomo ocho decenas del 72. y seràn 86. de los quales restando 81. quedan 5. que escrivo debaxo el 6. y guardo 8. por las decenas tomadas; multiplico otra vez el 9. del quociente por el 7. del partidor, y al producto 63. añado los 8. que guardava, y son 71. restados de 72. del miembro queda 1. Con que serà el residuo 15.

230,65	79
72 6	29
1 5	

Aora abaxo el guarismo siguiente 5. de la cantidad, y le pongo al lado del residuo 15. para hacer el miembro 155. el qual tiene un guarismo mas que el partidor, pues parto los dos ultimos 15. al ultimo del partidor 7. y doy uno al quociente, el qual escrivo en su lugar; multiplico 1. por 9. del partidor, y el producto 9. le resto del primer guarismo 5. del miembro, ó de 15. tomando una decena, y quedan 6. que escrivo debaxo el 5. y llevo 1. multiplico otra vez el 1. del quociente por el 7. del partidor, y al producto 7. añado 1. que guardava, y son 8. restolos de 15. del miembro, y quedan 7. Con que el residuo serà 76. el qual escrivo encima de una linea, y debaxo pongo el partidor, como parece en el exemplo.

230,65	79
72 6	291 $\frac{76}{97}$
1 55	
76	

Exemplo III.

Se han de partir 26492. ducados entre 358. Soldados: Porque el partidor tiene tres guarismos, veo si los tres ultimos guarismos de la cantidad hacen numero mayor, menor, ó igual al partidor, y hallo que menor, (18) pues tomo un guarismo mas, separando con una distincion al primer miembro 2649. y porque tiene un guarismo mas que el partidor, divido los dos ultimos 26. por el ultimo 3. del partidor, dando 7. al quociente, el qual escrivo en su lugar,

2649,2	358
143	7

gar,

gar. Aora multiplico el 7. por el 8. del partidor, y el producto 56. le resto del primer guarismo 9. del miembro, ò de 59. tomando cinco decenas, y quedan 3. que escrivo debaxo el 9. y guardo 5. Multiplico otra vez el 7. por el 5. del partidor, y al producto 35. añado los 5. que guardava, y son 40. restolos del segundo guarismo 4. del miembro, ò de 44. tomando quatro decenas, y quedan 4. que escrivo, y guardo 4. Multiplico otra vez 7. por 3. del partidor, son 21. añado los 4. que guardava, y son 25. restolos de 26. del miembro, y queda 1. Con què serà el primer residuo. 143.

Baxo el guarismo siguiente 2. de la cantidad, escriviendole al lado del residuo, para hacer el miembro 1432. el qual tiene un guarismo mas que el partidor, pues

2649,2	358
143 2	74
00 0	

divido los dos guarismos ultimos 14. por el ultimo 3. del partidor, dando 4. al quociente, el qual escrivo al lado del quociente parcial 7. Aora multiplico el 4. del quociente por el 8. del partidor, y resto el producto 32. del primer guarismo 2. del miembro, ò de 32. tomando tres decenas del 143. para hacer la resta, y queda 0. y guardo 3. por las decenas tomadas. Multiplico otra vez el 4. por el segundo guarismo del partidor, que es 5. y al producto 20. añado el 3. que guardava, son 23. resto del segundo guarismo 3. del miembro, ò de 23. tomando dos decenas, y queda 0. y guardo 2. Multiplico otra vez el 4. del quociente por el 3. del partidor, y al producto 12. añado 2. que guardava, son 14. restolos de 14. del miembro queda 0. Con que tocan à cada Soldado 74. ducados justos.

Exemplo IV.

Se han de partir 4575397. á 5719. porque el partidor tiene quatro guarismos, examino si los quatro guarismos ultimos de la cantidad hacen numero mayor igual, ò menor que el divisor, y hallo que menor, pues separo con una distincion un guarismo mas; con que el primer miembro serà 45753. y porque tiene un guarismo mas que el partidor, divido los dos ultimos 45. por el ultimo 5. del divisor, y doy al quociente 8. (no puedo darle à 9. porque tengo de atender á la multiplicacion de los otros guarismos del divisor) el qual escrivo en su lugar.

Aora multiplico los 8. del quociente por el 9. del partidor, y resto el quociente 72. del primer guarismo 3. del miembro, ò de 73. tomando siete decenas, y sobra 1. que escrivo debaxo el 3. y guardo 7. Multiplico otra vez el 8. por el segundo

45753,97	5719
0001	8

gua-

guarismo 1. del divisor, y al producto 8. añado los 7. que guardava, son 15. restolos del segundo guarismo 5. del miembro, ò de 15. tomando una decena queda 0. y guardo 1. Otra vez multiplico el 8. por el tercer guarismo 7. del divisor, y al producto 56. añado 1. que guardava, son 57. restolos del tercer guarismo 7. del miembro, ò de 57. tomando 5. decenas queda 0. y guardo 5. Multiplico otra vez el 8. por el 5. del partidor, y al producto 40. añado los 5. que guardava, son 45. restados de 45. del miembro queda 0. Con que el primer residuo es 1.

4575319,97	5719		
1 97	800	$\frac{197}{5719}$	

Baxo el guarismo siguiente 9. de la cantidad, escriviendole al lado del residuo para hacer el miembro 19. el qual por no poderse partir por el divisor, por ser menor, escrivo 0. en el quociente, y baxo el siguiente guarismo 7. para hacer el miembro 197. y porque tampoco se puede partir, pongo otro 0. en el quociente, quedando el ultimo residuo 197. el qual escrivo al lado del quociente encima de una linea, y debaxo el divisor, como parece en la formula.

Este modo de partir, à quien los Italianos llaman *Patir por Danda*, no está muy usado en España, pero es el mejor, y el mas alabado de los Autores; porque procede con grande claridad, y distincion en escrivir cada miembro, y residuo; de suerte, que si en el quociente huviere avido algun yerro, con facilidad se puede enmendar, borrando el residuo, y bolviendo à hacer la operacion de aquel miembro solamente, sin ser necessario bolver à comenzar desde el principio, lo qual no es facil hacerlo siempre en el modo ordinario, y en particular quando ay muchos guarismos. A mas desto es muy breve, pues no es necessario escrivir muchas veces el partidor, ni borrar guarismos, como en otros modos. La demonstracion es la misma que dimos en el problema antecedente.

Escolio.

El partir es la regla mas dificil de toda la Logistica, y el escollo en donde suelen naufragar los principiantes; toda su dificultad consiste en conocer lo que se deve dar al quociente, paraque se puede restar el producto, y el residuo no sea mayor, ni igual al partidor. No ay en esto regla fixa, porque depende de los guarismos que acompañan al ultimo guarismo del partidor, y del miembro; si estos guarismos en el partidor, y en particular el penultimo, fueren de grande valor, como 9. 8. 7. por lo regular no se podrá dar al quociente tanto, como veces cabe el ultimo guarismo del divisor en el ultimo, ò dos ultimos del miembro; pero si fueren de poco valor, como 0. 1. 2. casi siempre se podrán dar al quociente las

veces

veces que el ultimo guariſmo del diviſor cabe en el ultimo, ò dos ultimos del miembro.

Aunque, como queda advertido, no ay regla fixa para conocer el verdadero quociente, pero ay dos ſeñales infalibles; el primero, que deſpues de hecha la multiplicacion del quociente por el partidor, ſe pueda reſtar el producto del miembro; porque ſi no ſe puede, es mayor el quociente de lo juſto. El ſegundo, que hecha la reſta ſea el reſiduo menor que el diviſor; porque ſi fuere mayor, ò igual, ſerá el quociente menor que el verdadero. De ſuerte, que tomando el quociente mayor que el verdadero, no ſe podrá reſtar el producto; y tomandole menor de lo juſto, ſerá el reſiduo mayor, ó igual al partidor: Con que el verdadero quociente parcial tiene las dos circunſtancias, de poderſe reſtar el producto, y quedar menor el reſiduo.

Pues guiado el principiante deſtos dos ſeñales, podrá hacerſe facil en conocer quanto deve dar al quociente, exercitandoſe muchas veces en darle aquel numero que le pareciere mas congruente, y haciendo la multiplicacion, y deſpues la reſta, verá ſi ſe puede reſtar, ò ſi el reſiduo es igual, ò mayor que el partidor; porque ſi no ſe pudiere reſtar, avrá de tomar el quociente menor; y ſi el reſiduo fuere igual, ò mayor que el diviſor, avrá de aumentar el quociente, y borrando el reſiduo, y quociente, bolver à hacer la operacion, haſta que encuentre con el quociente verdadero. Y para no hacer tantos borrones, podrá con la imaginacion hacer la multiplicacion, y reſta, antes de eſcrivir el quociente.

Pero paraque el principiante tenga norte fixo en hallar los quocientes, podrá valerſe deſta otra regla, que aunque larga, y canſada, pero muy ſegura, y no fatiga la cabeza; la qual es muy util para quando ſe han de hacer muchas particiones por un miſmo partidor.

Eſcrivaſe el partidor aparte, y hagaſe la tabla que ſe enſeñò en el eſcolio del problema 3. del multiplicar. Supongo, pues, que ſe han de partir 1200567. à 296. formo la tabla del partidor, y pongo la diſtincion en la cantidad como antes, y tendrè el primer miembro 1200. Aora buſco en la tabla què numero es el mayor de los que pueden caber en dicho miembro, y hallo que es el 1184. cuyo exponiente es 4. eſcrivole debaxo del miembro, y al lado el 4. por quociente: hago la reſta, y queda el reſiduo 16.

296	1
592	2
888	3
1184	4
1480	5
1776	6
2072	7
2368	8
2664	9

Abaxo el ſiguiente guariſmo 5. de la cantidad, eſcriviendole al lado del reſiduo, para hacer el ſegundo miembro 165. Veo qual numero de la tabla

tabla es el proxime menor, y ninguno hallo, porque todos ſon mayores, pues pongo zeros debaxo del miembro y al lado zero por quociente, hago la reſta, y queda el reſiduo 165.

Baxo el ſiguiente guariſmo 6. de la cantidad, y ſerá el tercer miembro 1656. veo qual numero de la *tabla* es el proxime menor, y hallo el 1480. cuyo exponente es 5. eſcrivole debaxo del miembro, y al lado 5. por quociente: hago la reſta, y quedan 176.

1200,567	
1184	4
0165	
000	0
1656	
1480	5
1767	
1480	5
287	

Baxo el otro guariſmo 7. para hacer el miembro 1767. buſco què numero en la tabla es el proximo menor, y hallo que es el 1480. cuyo exponente es 5. eſcrivole debaxo del miembro, y al lado el 5. por quociente, hago la reſta, y quedan 287. que ſe han de eſcrivir encima una linea, y debaxo el partidor, como antes: *Con que el quociente* ſerà 4055. y mas el quebrado.

La razon deſte modo de partir es clara, porque los numeros de la tabla ſon los productos de los quocientes, que ſon los exponentes, por el partidor, ò primer numero, y por eſſo ſe eſcriven debaxo de cada *miembro para* hacer la reſta; en lo demás es la miſma operacion que hemos explicado en los problemas antecedentes.

Obſervaciones.

89 Para abreviar algunas operaciones del partir, ſerá bien obſervar lo ſiguiente. Quando el partidor tiene al principio alguno, ò algunos zeros, ſe ſepararán los dichos zeros, y otros tantos guariſmos primeros de la cantidad con un parenteſis, y deſpues haciendo la particion en lo que quedáre, ſe pondrá el ultimo reſiduo à la izquierda de los guariſmos ſeparados de la cantidad, para hacer quebrado, como aora diremos.

Supongo que ſe han de partir 3624. à 2900. porque en el partidor ay dos zeros al principio, los ſeparo con un parenteſis; y aſsimiſmo ſeparo otros tantos guariſmos de la cantidad, y quedarán 36. en la cantidad, y 29. en el partidor. Divido aora 36. à 29. por el modo ordinario, y cabe al quociente 1. y ſobran 7. los quales pondrè al lado izquierdo de los guariſmos ſeparados de la cantidad, y ſerán 724.

36(24	29(00
7	1 $\frac{724}{2900}$

eſcri-

escrivolos encima de una linea, y todo el partidor debaxo en forma de quebrado, como parece en el exemplo.

La razon desto es manifiesta; porque aviendo zeros al principio del partidor, los primeros guarismos de la cantidad quedan intactos, porque los primeros productos del quociente por el partidor son zeros, los quales restados de los primeros guarismos de la cantidad, quedan los mismos.

90 De aqui se colige, que si el partidor es 10. 100. 1000. &c. esto es, una unidad con zeros, basta separar tantos guarismos primeros de la cantidad, quantos zeros ay en el partidor, y los que quedàren en la cantidad serán el quociente; los que están separados se escrivirán encima de una linea, y todo el partidor debaxo: como partiendo 97895. à 100. será el quociente 978 $\frac{95}{100}$.

Pero si los guarismos separados de la cantidad fueren tambien zeros, en tal caso se quitarán del todo, tanto de la cantidad, como del partidor, y se hará la particion en lo que quedáre; porque quitando zeros de una cantidad, es lo mismo que partirla por un numero que conste de una unidad, y tantos zeros como se quitan; y asi, quitando tantos zeros de la cantidad como del divisor, es lo mismo que partirlos por un mismo numero; luego quedarán proporcionales, como luego dirèmos; luego el quociente será el mismo. Y asi, para partir 3800. por 90. quitando un zero de cada parte, se partirán los 380. por 9. como está dicho, y vendrá 42. y 2. novenos al quociente.

91 Si un numero menor se ha de partir por otro mayor, no ay mas que hacer, sino poner la cantidad encima de una linea, y el partidor debaxo en forma de quebrado: como para partir 24. à 96. será el quociente $\frac{24}{96}$, porque la cantidad 24. no puede contener aun una vez al divisor 96. luego el quociente ha de ser quebrado, que es lo mismo que el ultimo residuo de la division.

Deste modo de partir en forma de quebrado suelen usar muchas veces los Arithmeticos, aun quando la cantidad es mayor que el partidor; y en particular, quando la cantidad no contiene veces justas al partidor, y despues se ha de hacer alguna otra operacion.

92 Si dos numeros desiguales, como 93. y 12. tienen tantos guarismos el uno como el otro, el mayor contendrà al menor menos que 10. veces; porque si el menor 12. se multiplica por 10. serà 120. con que tendrá un guarismo mas que el mayor 93. luego el 120 será mayor que el 93. (18) y asi, necessariamente el 93. ha de contener al 12. menos que diez veces, porque el 93. es menor que 120. el qual contiene al 12. diez veces justas.

Si

93 Si un numero tiene un guarismo mas que otro, como 124. y 98 y el ultimo guarismo del 124. es menor que el ultimo del 98. contendrà el 124. al 98. menos que diez veces; porque si multiplicamos al 98. por 10. el producto 980. contendrá al 98. diez veces justas, y el 980. tendrá tantos guarismos, y será mayor (18) que el 124. luego el 124. no puede incluir, ò contener al 98. diez veces.

94 Si dos numeros, como 24. y 12. se dividen por un qualquier numero 3. los quocientes 8. y 4. tendrán la misma razon que los divididos 24. y 12. porque multiplicando los quocientes 8. y 4. por el divisor 3. se restituyen los numeros 24. y 12. los quales tienen la misma razon que 8. à 4. segun Euc. *prop.* 17. *del lib.* 7. (71) luego son proporcionales 24. à 12. como 8. à 4.

95 Si un numero impar, como el 3. mide à par como al 12. tambien mide á su mitad 6. Euc. *prop.* 30. *del lib.* 9. Y si un numero impar, como el 5. es entre sì primo à otro 4. tambien serà primo al duplo 8. Euc. *prop.* 31. *del lib.* 9.

96 Si un numero mide à uno de dos entre sì primos, es necessario que el mismo numero sea entre sì primo con el otro de los dos; y assi, porque el 3. mide á uno destos dos 9. 7. es à saber al 9. serà el 3. entre sì primo con el otro 7. Euc. *prop.* 25. *del lib.* 7.

97 A todo numero compuesto, como al 12. mide algun numero primo, como el 3. Euc. *prop.* 33. *lib.* 7. Y assi todo numero, ò es primo, ò es medido de algun primo, Euc. *prop.* 34. *del lib.* 7.

98 Si un numero se divide por 9. quedará el mismo residuo, que si la suma de sus guarismos (no atendiendo al lugar, sino como si fueran unidades) se divide tambien por 9. como partiendo 38. à 9. sobran 2. partiendo, pues, la suma de 3. y 8. que es 11. por 9. tambien sobran 2. Del mismo modo, dividiendo 45. à 9. sobra 0. pues dividiendo la suma de 4. y 5. que es 9. à 9. sobra tambien 0.

La razon desto depende de la disposicion de los guarismos; porque el 3. en el primer exemplo, por estàr en segundo lugar, vale diez veces mas de lo que significa, (13) luego vale nueve veces lo que èl significa, y sobran 3. unidades, las quales juntas con las 8. unidades del 38. son 11. quitando 9. quedan 2. con que resolviendo el 38. en nueves, se vienen á sumar los guarismos 3. y 8. luego el mismo residuo queda de la division de 38. por 9. que de la suma 11. por el mismo 9. Este es el fundamento de las pruebas del 9. que traen muchos Autores.

Aplicacion del partir.

99 Por esta regla de partir, dado el valor total de la especie, y el numero dellas, vendrèmos en conocimiento del precio de cada una;

ò ſabiendo el valor total, y el precio de cada eſpecie, conoceremos el numero de las eſpecies, dividiendo el valor total por el numero de las eſpecies, ò por el precio de cada una dellas.

Pedro empleò 1000. ducados en comprar 50. cavallos, y quiere ſaber á como coſtò cada uno. Divida 1000. por 50. y el quociente 20. ſerá lo que buſcava. Otro exemplo: Un Mercader comprò una pieza de paño por 2540. reales, y cada vara le coſtò à 30. reales, para ſaber quantas varas tiene la pieza, divida los 2540. por 30. y hallarà 84. varas, y dos tercios.

100 Tambien por eſta regla del partir convertirèmos la eſpecie menor, ò moneda mas baxa en la mayor, ò mas alta, dividiendola por el numero de las veces que la moneda, ò eſpecie mayor contiene à la menor, el qual ſabrèmos por la ſegunda parte de los Proemiales.

Se han de reducir 510. maravedis à reales Caſtellanos: porque cada real tiene 34. maravedis, divido los 510. por 34. y hallo que ſon 15. reales. Aſsi miſmo, ſi ſe han de reducir 1540. dineros á ſueldos, y libras de Valencia, porque cada ſueldo tiene 12. dineros, divido los 1540. por 12. y hallo 128. ſueldos, y 4. dineros; y porque cada libra tiene 20. ſueldos, divido los 128. ſueldos por 20. y hallo 6. libras, y 8. ſueldos: Con que los 1540. dineros hacen 6. libras 8. ſueldos, y 4. dineros.

Otro exemplo: Se han de reducir 624. quartos de palmo á canas, medida de Cataluña: porque cada palmo tiene 4. quartos, divido los 624. quartos por 4. y hallo 156. palmos juſtos; y porque cada cana tiene 8. palmos, divido los 156. palmos por 8. y hallarè 19. canas, y 4. palmos.

Otro exemplo: Se han de reducir 1005. minutos de tiempo en horas: porque cada hora tiene 60. minutos, divido los 1005. minutos por 60. y hallarè 16. horas, y 45. minutos. Aſsi miſmo, tengo de convertir 11264. minutos de circulo en grados, y ſignos: porque cada grado tiene 60. minutos, dividolos por 60. y hallo 187. grados, y 44. minutos; y porque cada ſigno tiene 30. grados, divido los 187. grados por 30. y hallo 6. ſignos 7. grados, y 44. minutos.



ÇAPI-

CAPITULO QUINTO.

DEL EXAMEN DE LAS QUATRO *operaciones de la Logistica de los Enteros.*

101 EXamen es una prueba con que se averigua si está bien hecha la operacion. No se examina la regla, sino la obra; aquella pide demonstracion, este examen, ó prueba. Por muchos modos se pueden examinar las quatro operaciones de Sumar, Restar, Multiplicar, y Partir; pero no todos son infalibles. Solo explicarè el que comunmente llaman *Prueba real*, dexando los otros por no gastar tiempo en cosa de poco provecho, pues casi todos se contentan con bolver à hacer la operacion.

```
364
180
 15
134
———
693
364
———
329
180
———
149
 15
———
134
134
000
———
```

Prueba del sumar.

102 La prueba real del sumar es restar. En el exemplo presente restese la primer partida 364. de la suma 693. y quedarán 329. de donde se restarà la segunda partida 180. y quedarà el residuo 149. del qual se restarà la tercera partida 15. y quedarà 134. de donde se restarà la ultima partida 134. y quedan zeros, con que está bien hecha la suma; porque como la suma 693. es igual á todas las partidas juntas, si estas se restan ha de quedar zero, ò nada.

Para abreviar basta quitar la primer partida de la suma, y el residuo 329. ha de ser la suma de las otras partidas; esto es, sumando 180. 15. y 134. han de hacer 329.

Prueba del restar.

103 La prueba real del restar es sumar. Sumese la paga con la resta, y ha de salir la deuda, como parece en el exemplo; porque sacando la paga de la deuda, queda la resta: luego sumando la paga con la resta, buelve à hacer la deuda.

2611	*Deuda.*
305	*Paga.*
2306	*Resta.*
2611	*Suma.*

Prueba del multiplicar.

104 La prueba real del multiplicar es partir. Dividase el producto por el multiplicador, y ha de salir la cantidad; ò dividase el producto por la cantidad, y ha de salir el multiplicador: como multiplicando 24. por 8. sale el producto 192. pues para examinar la operacion, dividase el producto 192. por 24. y saldrà el quociente 8. ò dividase por 8. y serà el quociente 24. porque la division resuelve lo que compuso la multiplicacion: luego partiendo el producto por uno de los numeros multiplicantes, ha de salir el otro.

```
 24
  8
———
192
```

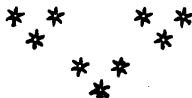
Prueba del partir.

105 La prueba real del partir es multiplicar. Multipliquese el quociente por el partidor, y si en la division sobrò algo añadase al producto, y ha de salir el numero dividiendo: como dividiendo 29568. por 869. salen al quociente 34. y sobran 22. pues multipliquense los 34. por 869. ò al contrario, y al producto 29546. añadanse los 22. que sobraron, y seràn 29568. que es el dividendo: porque la multiplicacion compone lo que la division resuelve; luego multiplicando el quociente por el divisor, saldrà la cantidad que se dividiò.

```
29568 |896
 3498 |———
   22   34   22
             896
```

Aqui dirà alguno que las pruebas reales son circulos viciosos, como dicen los Filosofos; porque el sumar se prueba por el restar, y el restar por el sumar: como si uno probàra que es de dia, porque luce el Sol; y juntamente probàra que luce el Sol, porque es de dia, cometer à circulo vicioso, y de ninguno seria admitida esta prueba.

Respondo, que estas no son pruebas demonstrativas, sino señales, ò indicios, con los quales se descubre si ay algun yerro en la operacion; y assi no cometen circulo vicioso, pues solo manifiestan que la operacion no està errada, fundandose en que es casi impossible, que dos modos de obrar entre sì opuestos estèn cerrados, y convengan en la verdad.



CAPITULO SEXTO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los enteros.

PAraque el principiante se exercite en las quatro reglas de Sumar, Restar, Multiplicar, y Partir enteros, me ha parecido conveniente poner aqui algunas questiones, à cuya semejanza podrà inventar otras.

106 Question 1. Què numero se sumará con 12. que la suma sea 32.? Restense 12. de 32. y quedaràn 20. que es el numero buscado; porque si de la suma 32. se resta una partida 12. quedarà la otra 20. y sumandolas bolveràn à hacer el mismo 32. Si la suma 32. fuera menor, ò igual al numero dado, la question es imposible.

106 Question 2. Con qual numero se sumarà el producto de 4. por 6. que la suma sea 84.? Multipliquese 4. por 6. y el producto 24. restese del 84. y quedarán 60. por el numero buscado: Si no se puede restar, la question es imposible.

107 Question 3. De qué numero se restarán 8. paraque queden 16.? Sumense 8. con 16. y la suma 24. será el numero que se busca, como està claro.

108 Question 4. De qual numero se podrà restar el quociente de la division de 40. por 8. que la resta sea 15.? Dividase 40. por 8. y el quociente 5. sumese con 15. y serà la suma 20. Digo, que si de 20. se quita el quociente 5. serà la resta 15. porque como 5. y 15. se sumaron; luego restando 5. de la suma 20. quedarà el 15. quando el quociente tiene quebrado, se resolverà la question por las reglas de quebrados, que luego darèmos, porque hasta aora aun no se puede resolver.

109 Question 5. Por qual numero se multiplicarà 7. paraque hagan 140.? Dividanse los 140. por 7. y hallaremos 20. que es el numero buscado; porque por la multiplicacion de 7. por 20. se restituye el numero 140. Si en la division vienen quebrados, no se podrà resolver la question hasta que tratèmos de quebrados.

110 Question 6. Què numero ha de ser partido por 8. paraque el quociente sea 5.? Multipliquese el 8. por 5. y hallarèmos 40.

111 Question 7. Por qual numeros se partiràn 84. paraque el quo-

quociente sea 12.? Dividanse los 84. por 12. y vendràn 7. que es el numero buscado.

112 Question 8. Què numero serà tanto mayor que 8. quanto menor que 24.? Sumense 8. y 24. y la metad de la suma 32. que es 16. serà el numero que se busca; esto es, el 16. es mayor que el 8. en 8. y es menor que el 24. tambien en 8. porque sumando los dos numeros dados, la metad de la suma dista igualmente dellos.

113 Question 9. El 6. de què numero es un septimo? Multipliquese por 7. y serà el producto 42. el numero buscado: porque el 6. tomando, ò repetido siete veces, hace al 42. luego es su septimo.

114 Question 10. El 10. de què numero es dos tercios! Porque los tercios son dos, dividiendo en dos partes al 10. y serà 5. la una; aora multiplico el 5. por 3. porque son tercios, y hallarè 15. digo que el 10. es dos tercios de 15. porque aviendo de ser el 10. dos tercios: luego partiendo por dos tendrè un tercio, y multiplicandole por 3. tendrè tres tercios; luego el 10. serà dos tercios destos tres. Si ay quebrados, se resolverà la question quando tratarèmos dellos.

115 Question 11. Què numero multiplicado por 4. y el producto partido por 6. harà 12.? Multipliquese el 12. por 6. y el producto 72. partase por el 4. y serà el quociente 18. el numero buscado.

116 Question 12. Pedro mercò 90. arrobas de cierta mercaderia, peso de Castilla, à razon de 5. reales la libra, y despues la vende à 6. reales, preguntase quanto gana. Reduzganse las 90. arrobas à libras (76) multiplicandolas por 25. libras que tiene cada arroba en Castilla, y seràn 2250. libras, las quales se han de multiplicar por 5. reales, que es el precio de la compra, y el producto 11250. seràn los reales, que costaron las 90. arrobas. Y pues se vendieron à 6. reales la libra, multipliquense las mismas libras 2250. por 6. y vendrà el valor de la venda 13500. Restese el valor de la compra del de la venda, esto es, 11250. de 13500. y se hallarà la ganancia 2250. reales.

117 Question 13. Un Mercader quiere emplear 50. doblones en Valencia en tres generos de ropas: la vara del primer genero vale 10. sueldos, la del segundo 8. sueldos, y la del tercero 7. sueldos, y quiere tantas varas de un genero como de otro, quantas varas tomarà de cada uno? Porque el precio de las varas son sueldos, y los doblones se han de emplear en Valencia, reduzganse los 50. doblones à sueldos, multiplicandolos por 77. sueldos que vale cada doblon en Valencia, y seràn 3850. sueldos. Aora juntense los tres precios 10. 8. y 7. y haràn 25. sueldos, que es el valor de 3. varas, una de cada genero; dividanse los 3850. por 25. y serà el quociente 154. varas de cada genero, que es

lo

lo que buscava; porque si 25. sueldos es el valor de 3. varas, de las quales cada una es de un genero: luego dividiendo los 3850. sueldos por 25. se hallaràn las varas de cada genero.

118 Question 14. Pedro prestò à Juan 10. doblones en Valencia, y quiere que se los buelva en quatro generos de moneda, es à saber, en reales de à ocho, en reales de à quatro, en medios doblones, y en diezyochenos, de suerte, que aya tantas piezas de unos, como de otros; quantas piezas avrà de cada uno? Esta question es la misma que la antecedente.

El real de à ocho en Valencia vale 19. sueldos, y 6. dineros; el de à quatro 9. sueldos, y 9. dineros; el medio doblon vale una libra 18. sueldos, y 6. dineros; el diezyocheno vale 1. sueldo, y 6. dineros; pues porque en el valor de las monedas ay dineros, que es la minima especie, reduzganse à dineros. (76) y assi, los 10. doblones seràn 9240. dineros. El real de à ocho reducido serà 234. dineros. El real de à quatro reducido serà 117. dineros. El medio doblon 462. dineros. El diezyocheno son 18. dineros. Sumense los 234. 117. 462. y 18. dineros, y serà la suma 831. dineros; dividanse los 9240. dineros, que valen 10. doblones, por esta suma, y se hallarà que le ha de bolver 11. y $\frac{89}{831}$ de cada pieza.

119 Question 15. Pedro mercò 4. piezas de tafetan, que cada una tirava 100. varas, à 8. sueldos la vara, à como le bolverà à vender, paraque gane 40. libras? Multipliquense las 4. piezas por 100. varas, y seràn 400. varas, multipliquense por 8. sueldos, y serà el valor de todas 3200. sueldos; y porque quiere ganar 40. libras, reduzganse à sueldos, y seràn 800. sueldos, y sumense con los 3200. sueldos, y seràn 4000. sueldos, que es el valor de las quatro piezas, al precio que se han de vender; dividanse los 4000. sueldos por las 400. varas, y se hallarà que ha de vender la vara à 10. sueldos.

120 Question 16. Pedro quiere emplear 8000. reales en tres especies de ganados; halla terneras à 80. reales cada una, carneros à 20. reales cada uno, y cabritos à 10. reales: quiere que aya doblados carneros que terneras, y doblados cabritos que carneros, quantas cabezas comprarà de cada suerte?

Si quisiera mercar tanto de una especie como de otra, estava resuelta la question, segun la practica de la question 13. pero porque quiere dobladas cabezas de carneros que de terneras, se doblarà el valor de cada carnero, que serà 40. reales; y porque quiere doblados cabritos que carneros, se quatrodoblarà el precio de cada cabrito, y serà tambien 40. reales; porque como el precio de los carneros se doblò, y los ca-

cabritos han de ser doblados de los carneros, se ha de quatrodoblar, que es doblarle dos veces; sumense estos precios 80. 40. y 40. y la suma 160. serà el partidor, por quien se dividiràn los 8000. reales: con que vendràn al quociente 50. que es el numero de las terneras; doblandole serà 100. el numero de los carneros; y doblandole otra vez serán 200. el numero de los cabritos. La prueba es multiplicar los 50. por 80. reales, los 100. por 20. y los 200. por 10. y todo ha de sumar los 8000. reales.

121 Question 17. San Geronymo, en la vida de San Hilarion afirma, que havia un hombre llamado Marsita, que llevava à qualquier distancia 15. modios Romanos de trigo: preguntase quantas libras Castellanas de peso llevava. Para la resolucion desta question es menester suponer lo que dice Plinio *en el lib.* 18. *cap.* 7. que un modio de trigo levissimo no excede 20. libras: y la experiencia del P. Mariana, *fol.* 85. que un modio de trigo el mas pesado, pesa 21. libra Romana. Pues supongo, que el trigo que llevava Marsita era de mediano peso, y que cada modio pesava 20. libras Romanas: Multipliquense 20. por 15. y saldràn 300. libras Romanas; quitese el tercio, porque la libra Castellana es el tercio mayor que la Romana, y quedarán 200. libras Castellanas, que son 2. quintales Castellanos.

122 Question 18. El Coloso de Rhodas fue una estatua muy grande de metal, que segun Plinio *en el lib.* 34. tenia de alto 70. codos; costò de fabricar 300. talentos de plata por espacio de 12. años; cayò por un terremoto el año 223. antes de la venida de Christo; quedò postrada hasta el año 653. que el Rey Mahuvias la vendiò, y se cargaron de su metal 900. Camellos, segun lo escrive Casalio. Preguntase quan alta era, que valìa, y que pesava, segun las monedas, pesos, y medidas de Valencia.

Porque cada codo contiene dos palmos de Valencia, multipliquense los 70. codos por 2. y saldrán 140. palmos que tenia el Coloso. Cada talento tiene 60. minas, ò 6000. drachmas, ò reales de plata; pues multipliquense los 300. talentos que costò èl Coloso por 6000. drachmas, y valdrá 1800000. drachma; y porque cada drachma vale 29. dineros, y $\frac{1}{4}$ de Valencia, multipliquense las 1800000. por 29. y $\frac{1}{4}$ y se hallaràn 52650000. dineros, los quales reducidos á libras, sueldos, y dineros (100) son 219375. libras justas: y tanto valia el Coloso.

En quanto al peso del Coloso es de notar, que segun Plinio, y Diodoro *lib.* 3. *cap.* 12. la carga ordinaria de un Camello era de 10. medimnos de trigo, que pesava cada uno 120. libras Romanas, ò Atticas; pues si multiplicamos las cargas de los 900. Camellos por 1200. libras

que

que llevava cada uno, hallarèmos 1080000. libras Romanas, ò Atticas, que con poca diferencia son iguales à las de Valencia; y assi; pesava cerca de 30000. arrobas.

123 Question 19. Pedro ha comprado 10. varas de vayeta, que tiene 8. palmos de ancho, y la quiere aforrar de olandilla, que tiene 3. palmos de ancho: preguntase quantas varas de olandilla avrà menester. Multipliquense las 10. varas por lo ancho 8. y seràn 80. palmos; partense por 3. que es lo ancho del aforro, y vendràn 26. varas, y $\frac{2}{3}$ de la olandilla.

124 Question 20. En el Templo de Salomon avia un vaso muy grande de agua, el qual por su capacidad, y materia se llamava *Mare aeneum*, Mar de bronce; cabian en èl 2000. Bathos de agua, como consta del 3. de los Reyes *cap.* 7. *v.* 26. los quales eran legales de 72. sextarios Romanos, ò 3000. Metretas, como consta del 2. del Paralipomenon *cap.* 4. *v.* 5. que eran iguales à la Anfora Romana de 48. sextarios, Alapide, Alcazar, y Tirino: Preguntase quantas onzas de agua cabian.

Porque cada sextario contenia 20. onzas de agua, como queda dicho en la 2. parte de los Proemiales, multipliquense los 2000. Bathos por 72. sextarios: ò las 3000. Metretas por 48. sextarios; y de entrambas multiplicaciones saldràn 144000. sextarios, los quales se multiplicaràn por 20. onzas, y seràn 2880000. las onzas de agua que cabian en el *Mare aeneum*, que son cerca de 8000. cantaros de agua, de la medida de Valencia.

Bastan estas questiones para exercicio, à cuya semejanza podrà el estudioso hallar otras: aora passemos à los quebrados.



PAR-

PARTE II.

DE LA LOGISTICA DE LOS Quebrados.

125 NUMERO *Quebrado*, como queda advertido en los Proemiales, es parte, ò partes de la unidad, en quanto ſupone, ò repreſenta algun todo dividido en partes iguales; como ſi un real eſtà dividido en quatro partes iguales, y dellas ſe toman tres, ſerá quebrado.

Siendo, pues, el quebrado parte, ò partes de un todo dividido, neceſſariamente ha de decir algun orden, ò reſpeto à las partes en que eſtà dividido el dicho todo, porque las partes que ſe toman, alguna denominacion han de tener; pues no baſta decir tres partes, ſino que ſe ha de declarar quales ſean; eſto es, ſi ſon partes de quartos, quintos, ſextos, &c.

Y paraque eſto ſe entienda mejor, uſarè de exemplos en numeros contractos. Supongo que un real que en Valencia llamamos Caſtellano, y tiene 24. dineros, ſe divide en quatro partes, de las quales ſe toman tres; cada parte de las 4. ſon 6. dineros; y aſsi, las tres partes ſerán 18. dineros. Supongo otra vez, que el miſmo real ſe divide en 6. partes, y ſe toman tres, aora cada parte de las 6. ſon 4. dineros; y aſsi las tres ſerán 12. dineros.

En entrambos caſos ſe han tomado tres partes del real; pero como en el primero las tres partes eran de quartos, y en el ſegundo de ſextos, por eſſo en ambos caſos, aunque ſea el miſmo numero de partes el que ſe toma, pero no es el miſmo valor, pues en el primer caſo las tres partes valen 18. dineros, y en el ſegundo valen 12. Con que es preciſo, que las partes que ſe toman (que es el quebrado) tengan algun orden à las partes en que eſtà dividido el todo, ò la unidad.

126 Con eſto queda manifieſto, que es forzoſo que el quebrado ſe declare, y eſcriva con dos numeros. El uno enſeña las partes que ſe toman del todo dividido, y ſe dice *Numerador*, porque numera las partes tomadas, el qual ſe eſcrive encima de una linea. El otro manifieſta

sesta en quantas partes se divide el mismo todo, y se llama *Denominador*, ò *Nombrador*, porque dá nombre, y explica quales sean las partes del todo, y se escrive debaxo de el numerador.

Sea un qualquier todo, como un real dividido en ocho partes iguales, de las quales si tomamos una, serà el quebrado un ochavo (de ordinario para expressar el denominador se añade desta particula *Avo*, ò *Avos*) el qual se escrivirá assi $\frac{1}{8}$. Si tomamos dos partes, será el quebrado *Dos ochavos*, y se señalará deste modo $\frac{2}{8}$. Si separámos tres partes, será *Tres ochavos*, y assi $\frac{3}{8}$; y assi de los demás.

En estos quebrados, ò en qualquier otros, el numerador es el numero que está encima de la linea, y el denominador el que está debaxo; con que el numerador de $\frac{5}{7}$ es 5. y el denominador 7.

127 Aqui es menester advertir, que aunque es verdad, que escrivimos, y nombramos qualquier quebrado con dos numeros: pero el quebrado solo consiste en el numerador, no tomado absolutamente sin respeto à otro, sino con orden al denominador; porque el quebrado son las partes que se toman del todo: luego solo consiste en el numerador que las numèra, diciendo relacion al denominador, para expressar quales sean las partes tomadas, por lo qual se diferencia del entero.

Y assi, esta diferencia ay del numero entero al quebrado; que las unidades del entero son absolutas, sin expressar respeto, ni orden à componer, ò ser partes de algun todo, alomenos en lo explicito; porque implicitamente tambien son respectivas, como luego dirèmos. En el quebrado las unidades no son absolutas, sino que expressamente dicen orden al todo de quien son partes; y assi, quando de un entero partido en 6. partes, tomamos cinco, no decimos absolutamente cinco, sino *cinco sextos*.

Con que el entero no se diferencia del quebrado en otra cosa mas, que las unidades del entero son expressamente absolutas, y las del quebrado respectivas; pero en la realidad en nada difieren, porque las unidades del entero tambien dicen orden à la unidad. Supongo para explicarme, que 35. varas de paño se han de repartir entre 8. hecha la division vienen al quociente 4. varas, y tres quartos de vara (los quebrados de ordinario salen de la particion) entonces el quarto significa 4. unidades de vara, y el quebrado denota tres unidades de quarto de vara: con que tanto el entero 4. como el quebrado *tres quartos* de vara, dicen orden à la unidad; pero en los enteros no se expressa el orden, y en los quebrados si.

128 De aqui se infiere, que podemos expressar qualquier numero

mero entero como quebrado, poniendole encima de una linea, y una unidad debaxo, lo qual ſe eſtila en la multiplicacion, y diviſion de los quebrados, como veremos en ſu lugar; y aſsi eſte numero 10. le podemos expreſſar deſte modo $\frac{10}{1}$, porque qualquier numero entero dice orden implicito à la unidad, pues conſta de muchas unidades.

129 Paraque el principiante no halle dificultad en algunos quebrados que encontrarà en el diſcurſo deſte tratado, es meneſter que advierta, que aunque el quebrado tomado con todo rigor ſea menor que la unidad, y por conſiguiente ſu numerador aya de ſer menor que ſu denominador, el qual ſupone por la unidad; eſſo no obſtante acoſtumbran los Arithmeticos para facilitar la operacion, poner algunos quebrados mayores, ò iguales à la unidad, eſto es, cuyos numeradores ſean mayores, ò iguales à los denominadores; como $\frac{3}{2}$ $\frac{5}{2}$ $\frac{6}{6}$ $\frac{8}{3}$ &c. Y para conocer qual quebrado ſea mayor, igual, ò menor que la unidad, ſe guardarà eſta regla: Siempre que el numerador fuere menor que el denominador, el quebrado ſerà menor que la unidad: Siempre que el numerador, y denominador fueren iguales, ſerà el quebrado igual à la unidad, ò à un entero: Pero quando el numerador fuere mayor que el denominador, entonces el quebrado tambien ſerà mayor que la unidad, como luego diremos; y por conſiguiente contendrà alomenos un entero.

130 Con las noticias, que haſta aqui hemos dado de los quebrados, no ſerà dificultoſo el nombrarlos, y eſcrivirlos: porque primero ſe nombra el numerador, y deſpues el denominador, añadiendole caſi ſiempre la particula *avo*, ò *avos*, como queda advertido; y aſsi eſte quebrado $\frac{8}{12}$ ſerà ocho dozavos; eſte otro $\frac{124}{356}$ ſerà ciento y veinte y quatro, treſcientos cinquenta y ſeiſavos. Para eſcrivirlos ſe pondrá el primer nombre en guariſmo encima de una linea, y el ſegundo debaxo; como dos tercios ſe eſcrivirà aſsi $\frac{2}{3}$.

131 El quebrado ſe divide en ſencillo, y compueſto. Quebrado ſencillo, ò ſimple, es aquel que es parte, ò partes de un entero, ò de la unidad, como dos tercios de un real. Quebrado compueſto es aquel que es parte, ò partes de un quebrado ſimple, tomado como à todo; como ſi $\frac{2}{3}$ ſe ſuponen divididos en quatro partes, y ſe toman tres, ſeràn $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, tres quartos de dos tercios.

132 El quebrado compueſto ſe ſubdivide en quebrado de quebrado, y en quebrado de parte de quebrado. El quebrado de quebrado es parte, ò partes de otro quebrado. El quebrado de parte de quebrado es parte, ò partes de una unidad de quebrado. Con un exemplo contracto lo explicarè mejor. Si $\frac{2}{3}$ de dia (que ſon 16. horas, porque cada

da tercio son 8. horas) se supone dividiendo en 4. partes, de las quales se toman 3. serán $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia, que son 12. horas, porque cada quarto de 16. es 4. y tomando tres, serán las 12. horas: si los $\frac{3}{4}$ se suponen divididos en 16. partes, y se toma 4. será $\frac{4}{6}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia, que son 8. horas, porque los $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$ de dia son 12. Cada sexto son 2. horas; pues si se toman 4. sextos, serán 8. horas, y entonces será quebrado de quebrado de quebrado, y assi infinitamente.

En el mismo quebrado $\frac{2}{3}$ de dia, explicarè el quebrado de parte de quebrado; supongo que una parte, ò unidad de $\frac{2}{3}$, que es $\frac{1}{2}$, está dividida en dos partes, y se toma una, será $\frac{1}{2}$ de una unidad de $\frac{2}{3}$; y como el tercio del dia sean 8. horas, será la mitad 4. horas; con que $\frac{1}{2}$ de una unidad de $\frac{2}{3}$ de dia son 4. horas. Tambien una unidad desta $\frac{1}{2}$ se puede dividir en otras partes, para hacer quebrado de quebrado. Con que el quebrado de quebrado es parte, ò partes de un quebrado siemple: y el quebrado de parte de quebrado es parte, ò partes de una unidad de quebrado simple.

Observacion.

133 Quando dos, ò mas quebrados se comparan entre sì, ò se habla dellos, siempre se ha de entender, que son parte, ò partes de un mismo entero, mientras no se advierta otra cosa en contrario. Y assi, tratando destos dos quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{4}{6}$, se entiende que son partes de un mismo *todo*, ò sea libra, sueldo, vara, ó qualquier otro todo de quien se hace mencion; y assi, no se ha de entender que el un quebrado es de libra, y el otro de vara, ò de qualquier otro todo, sino entrambos de un mismo todo.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA THEORICA DE LOS Quebrados.

ESte Capitulo comprehende todos los fundamentos de la Logistica de los quebrados. Es de mucha importancia; quien le entendiere bien, no hallarà dificultad en toda la Logistica de los quebrados; pero quien solo gustáre de la practica, sin atender á la demonstracion, podrà omitirle.

THEO-

THEOREMA I.

QUALQUIER QUEBRADO TIENE LA MISMA RAZON á su todo, ò á la unidad, que el numerador al denominador.

Exposicion.

134 SEa qualquier quebrado $\frac{2}{3}$ dos tercios de un dia, que son 16. horas. Digo que la misma razon ay de $\frac{2}{3}$ de dia á 1. dia, que del numerador 2. al denominador 3. esto es, que si el numerador 2. se contiene una vez y media en el denominador 3. tambien los $\frac{2}{3}$, que son 16. horas, se contienen en un dia, que son 24. horas, una vez y media.

Demonstracion.

El quebrado es el mismo numerador; y la unidad, ò todo dividido es el mismo denominador. (127) Luego el mismo respeto, ò razon dice el quebrado á la unidad, que el numerador al denominador: como si un padre se llama Pedro, y su hijo se dice Juan, el mismo respeto ò relacion de paternidad dice el padre al hijo, que Pedro à Juan.

Consectarios.

135 Quanto mayor fuere el numerador, respeto del mismo, ò igual denominador, tanto mayor serà el quebrado, y al contrario; y assi, $\frac{3}{4}$ es mas que $\frac{2}{4}$, porque el 3. al 4. dice mayor razon, que el 2. al mismo 4. (32)

Con què si un numerador fuere doblado de otro será tambien doblado el quebrado del otro, con tal que tengan un mismo denominador; y assi, $\frac{4}{7}$ es doblado de, $\frac{2}{7}$ y lo mismo es de qualquiera otra razon.

136 Quando el numerador es menor que el denominador, el quebrado es menor que la unidad; porque como el denominador supone por la unidad, y la misma razon ay del numerador al denominador que del quebrado à la unidad: y si el numerador es menor que el denominador, tambien el quebrado serà menor que la unidad.

Quando el numerador es igual al denominador, el quebrado es igual á la unidad, ò contiene un entero justamente; porque entonces el numerador contiene una vez sola al denominador: luego el quebrado tambien contiene una vez sola al entero, ò unidad.

Quando el numerador es mayor que el denominador, tambien el quebrado es mayor que la unidad, y contiene à lo menos un entero; porque como el quebrado tiene la misma razon al entero, ò unidad, que el numerador al denominador, si el numerador es mayor que el denominador, tambien el quebrado serà mayor que la unidad.

THEO-

THEOREMA II.

LOS QUEBRADOS, CUYOS NUMERADORES TIENEN UNA misma razon á sus denominadores, son iguales.

Exposicion.

137 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$ de un mismo entero, cuyos numeradores 2. y 4. tengan una misma razon à sus denominadores 3. y 6. esto es, que asi como el 2. se contiene en su denominador 3 una vez y media, tambien el 4. es contenido en su denominador 6. una vez y media. Digo que los quebrados dichos son iguales

Demonstracion.

Porque por el Theotema antecedente la misma razon tiene el quebrado $\frac{2}{3}$ à su entero, que 2. à 3. Y la misma razon tiene el quebrado $\frac{4}{6}$, al mismo entero (entrambos son quebrados de un mismo entero, como está advertido arriba) que 4. á 6. Luego siendo la razon de 2. à 3. la misma que la de 4. à 6. por la supoficion, será tambien la razon del quebrado $\frac{2}{3}$ à su todo la misma que de $\frac{4}{6}$ al mismo todo; con que los dichos quebrados tienen una misma razon al todo; luego son iguales; porque quando dos quantidades tienen una misma razon á una tercera, son iguales entre sì, como consta de la *prop. 9. del lib 5. de Euc.*

Consectario.

138 De aqui se infiere, que la magnitud de los quebrados no se ha de tomar de la magnitud de los numeros con que se expressan, sino de la razon que los numeradores tienen à sus denominadores; de suerte, que un quebrado no serà mayor que otro porque tenga mayores numeros, sino porque el numerador diga mayor razon al denominador; y asi, $\frac{2}{7}$ serà menor que $\frac{1}{2}$; porque menor razon tiene el 2. al 7. que el 1. al 2. (32) Tambien $\frac{10}{20}$, aunque se expresse con numeros mayores que $\frac{1}{20}$, es igual al dicho $\frac{1}{2}$, porque asi como 10. es mitad de 20. tambien 1. es mitad de 2.

THEOREMA III.

AQUEL QUEBRADO ES MAYOR CUYO NUMERADOR tiene mayor razon à su denominador.

Exposicion.

139 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, y la razon del numerador 5. al denominador 6. sea mayor que la de 1. á 2. Digo, que el quebrado $\frac{5}{6}$ mayor que $\frac{1}{2}$.

De-

Demonstracion

Siendo la razon de 5. à 6. mayor que la de 1. à 2. serà la razon del quebrado $\frac{5}{6}$ à su todo mayor (134) que la del quebrado $\frac{1}{2}$ al mismo todo. (son quebrados de un mismo todo) Luego $\frac{5}{6}$ es mayor que $\frac{1}{2}$; porque de dos quantidades, la que tiene mayor razon à una tercera, que aqui es el todo, ó unidad, es mayor, como consta por la *prop.* 10. *del lib.* 5. *de Euclides*.

THEOREMA IV.

LOS QUEBRADOS QUE TIENEN IGUAL, O UN MISMO denominador, tienen entre sì la razon de los numeradores.

Exposicion.

140 SEan dos, ò mas quebrados $\frac{3}{6}$ $\frac{1}{6}$ de un mismo todo, los quales tengan un mismo, ò igual denominador 6. Digo, que la misma razon tienen el quebrado $\frac{3}{6}$ á $\frac{1}{6}$ que el numerador 3. à 1. Esto es, que si el 3. es triplo del 1. tambien el quebrado $\frac{3}{6}$ es triplo de $\frac{1}{6}$.

Demonstracion.

El quebrado consiste en el numerador con respeto al denominador. (127) Luego siendo el denominador igual, tendrán los quebrados la misma razon de los numeradores.

A mas desto, siendo los denominadores iguales, toda la igualdad, ò desigualdad de los quebrados depende de los numeradores; luego los quebrados tienen la misma razon de los numeradores.

Consectarios.

141 De aqui se buelve á inferir, que quanto mayor serà el numerador, respeto de un mismo denominador, tanto mayor serà el quebrado; y assi, $\frac{3}{5}$ es mayor que. $\frac{2}{5}$ Tambien $\frac{3}{5}$ será menor que $\frac{4}{5}$; porque teniendo entrambos quebrados un mismo denominador, tienen la razon de los numeradores.

142 Si el numerador de un quebrado se multiplica por un qualquier numero, crece el quebrado tantas veces, como unidades ay en el tal numero; como si el numerador 3. deste quebrado $\frac{3}{7}$, se multiplica por 4. será el nuevo quebrado $\frac{12}{7}$, quatro veces mayor que $\frac{3}{7}$; porque como $\frac{12}{7}$, y $\frac{3}{7}$ tienen igual denominador, tienen la razon de los numeradores, la qual es quadrupla, porque en el 12. entra quatro veces el 3. que son tantas veces como unidades tiene el 4. por quien se ha multiplicado.

143 Pero si el numerador de un quebrado se parte por un qualquier numero, se disminuye el quebrado tantas veces, como unidades tiene el

par-

partidor; y assi, partiendo el numerador 24. deste quebrado $\frac{24}{30}$ por 6. saldrá $\frac{4}{30}$ que será seis veces menor, que el primero; porque $\frac{24}{30}$, y $\frac{4}{30}$ tienen igual denominador, con que tienen la razon de los numeradores, de los quales el 4. es seis veces menor que el 24.

THEOREMA V.

LOS QUEBRADOS TIENEN ENTRE SI LA MISMA RAZON que los productos de la multiplicacion en cruz de los numeradores por los denominadores.

Exposicion.

144 SEan dos quebrados $\frac{3}{6}$, y $\frac{2}{8}$, multiplicando el numerador 3. por el denominador 8. sale el producto 24. multiplicando el numerador 2. por el denominador 6. sale el producto 12. de modo que las multiplicaciones se han de hacer en cruz como se vè figurado. Digo, pues, que la misma razon tiene el quebrado $\frac{3}{6}$ à $\frac{2}{8}$, que 24. à 12. que son los productos de cada numerador, por los denominadores opuestos, y porque 24. es doblado de doce, tambien tres sextos serà doblado de dos octavos.

24		12
$\frac{3}{6}$	X	$\frac{2}{8}$
	48	

Antes de la demonstracion es menester suponer dos cosas. La primera, que los denominadores 6. y 8. se multipliquen entre sí, y harán 48. La segunda, que si un numero multiplica à otros dos, los productos tienen la misma razon entre sì, que los numeros multiplicados; como lo demuestra Euclides en la *proposicion 17. del libro 7.* y lo vemos insinuado en las observaciones del multiplicar.

Demonstracion.

El 6. multiplicando al 2. y al 8. produce 12. y 48. y assi tendrà el 12. al 48. la misma razon que el 2. al 8. luego los quebrados $\frac{2}{8}$, y $\frac{12}{48}$ serán iguales. (137) Assi mismo el 8. multiplicando al 3. y al 6. produce 24. y 48. que tendrán la misma razon que 3. y 6. con que los quebrados $\frac{3}{6}$, y $\frac{24}{48}$ serán iguales; (137) pues porque los quebrados $\frac{24}{48}$ $\frac{12}{48}$, tienen un mismo, ò igual denominador, tienen entre sí la razon de los denominadores 24. à 12. (140) luego sus iguales $\frac{3}{6}$ $\frac{2}{8}$ tienen entre sí la razon de 24. à 12.

Consectario.

145 De aqui consta claramente, que multiplicando en cruz, como está dicho, si salieren los productos iguales, serán los quebrados iguales; pero si los productos fueren desiguales, tambien serán los quebrados desiguales; y aquel quebrado será mayor, cuyo numerador multi-

plicando al denominador opuesto produxere mayor numero.

Con que con facilidad se puede conocer si dos quebrados son iguales, ò desiguales: sean, pues, dos quintos, y tres sep- 14 15
timos: para conocer si son iguales, ò qual de los dos es mayor, multiplico en cruz: y porque 15. es mayor que 14. di- $\frac{2}{5}$ X $\frac{3}{7}$
rè, que tres septimos es mayor que dos quintos. Asi mismo multiplicando en cruz en estos otros quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{10}{20}$ salen los productos iguales, por lo qual diré que los quebrados son iguales.

THEOREMA VI.

LOS QUEBRADOS QUE TIENEN IGUALES NUMERADOres, tienen entre sì la razon reciproca de los denominadores.

Exposicion.

146 SEan los quebrados dos tercios, y dos sextos, cuyos numeradores sean iguales. Digo que el quebrado dos tercios al quebrado dos sextos, tendrá la misma razon que 12 6
el denominador 6. al denominador 3. que es razon reciproca; y asi dos tercios será doblado de dos sextos, porque el $\frac{2}{3}$ X $\frac{2}{6}$
6. es doblado del 3.

Demonstracion.

Siendo los numeradores iguales, toda la desigualdad de los quebrados proviene de los denominadores; pues multiplicando en cruz, tendrán los quebrados la misma razon de los productos, (144) los quales tienen la misma razon, que los denominadores, porque los numeradores son iguales, que es lo mismo que si fuera un solo numero, el qual multiplicando à otros dos, produce numeros proporcionales, (71) con que los productos 12. y 6. tienen la misma razon que los denominadores; y por averse multiplicado en cruz, se han invertido; de suerte, que la misma razon ay de 12. à 6. que del numerador 6. à 3. Los quebrados, pues, dos tercios, y dos sextos, tienen la misma razon que 12. à 6. y esta es la misma que 6. à 3. luego los dichos quebrados tienen la razon reciproca de los denominadores.

Consectario.

147 De aqui consta, que si el denominador de un quebrado se multiplica por un qualquier numero, se disminuye el quebrado tantas veces, quantas unidades ay en el multiplicador; como multiplicando el denominador deste quebrado $\frac{3}{5}$ por 4. sale el quebrado $\frac{3}{20}$ quatro ve-

ces

ces menor; porque los quebrados $\frac{3}{20}$ $\frac{3}{5}$, tienen la razon reciproca de 5. á 20. pues como el 5. se ha multiplicado por 4. será el 20. quatro veces mayor que el 5. y el 5. será quatro veces menor: y assi el un quebrado quatro doblado del otro.

148 Pero si el denominador de un quebrado se parte por qualquier numero, quedando el mismo numerador como antes, crece el quebrado tantas veces, quantas unidades ay en el partidor: y assi partiendo el denominador deste quebrado $\frac{6}{40}$ por 5. saldrá el quebrado $\frac{6}{8}$ cinco veces mayor: porque los quebrados $\frac{6}{8}$ $\frac{6}{40}$, tienen la razon de 40. à 8. que es cinco veces mayor.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA REDUCCION DE LOS QUEBRADOS.

REduccion de los quebrados es una mutacion de unos en otros, guardando el mismo valor. Contiene este Capitulo algunos Problemas necessarios para la Logistica de los quebrados, y otros solamente utiles, y convenientes. Tambien se comprenden aqui las reducciones de enteros à quebrados, y destos à aquellos.

PROBLEMA I.

REDUCIR UN QUEBRADO A LOS MINIMOS TERMINOS.

ESte Problema solo es conveniente, pero no necessario. Enseña à reducir un quebrado de numeros grande à otro del mismo valor, que esté expressado con los menores terminos que se puedan hallar, quedando en el mismo valor.

Ya queda advertido, (138) que el valor, ò magnitud de un quebrado, no depende de la magnitud de los numeros con que se significa, sino de la razon que tiene el numerador al denominador; porque un mismo quebrado se puede expressar con diferentes numeros, como parece en estos $\frac{102}{204}$ $\frac{100}{200}$, &c. los quales todos valen una mitad.

Esto supuesto, lo que se busca en este Problema, es reducir un quebrado de numeros grandes, como el $\frac{100}{200}$, à un quebrado que tenga los minimos terminos, ò numeros de todos aquellos, con que se puede signi-

nificar el mismo valor del dicho quebrado, que será $\frac{1}{2}$ porque no hay otros numeros menores, que puedan significar una mitad.

Esta reduccion, como queda dicho, no es necessaria, porque todas las operaciones de los quebrados se pueden hacer sin ella; pero es de grande conveniencia, porque mas facilmente se conoce el valor del quebrado, y mejor se obra con numeros pequeños, que con grandes. Para la reduccion es menester saber lo siguiente.

Propuestos dos, ó mas numeros, conocer si son entre sì primos, ò compuestos, y hallar la maxima medìda comun.

149 Quales sean los numeros entre sí primos, ò compuestos, ya queda explicado en los Proèmiales, (35. y 37.) aora lo que buscamos es conocerlos. Partase el mayor por el menor, y si sobra algo dividase el amor por el residuo: si desta particion sobra algo, partase el primer residuo por el segundo; y desta suerte se ha de continuar hasta que sobre zero, ò unidad: si sobra zero son los tales numeros entre sì compuestos, y el ultimo partidor será la maxima medìda comun; pero si sobra 1. serán entre sì primos.

Sean estos dos numeros 3241. y 159. los que se han de examinar. Divido el mayor por el menor, y quedan 61. (no se hace caso del quociente, sino del residuo) Divido el menor 159. por el residuo 61. y sobran 37. Divido el primer residuo 61. por el segundo 37. y sobran 24. Divido el segundo residuo 37. por el tercero 24. y sobran 13. Divido el 24. por 13. y sobran 11. Divido el 13. por 11. y sobran 2. Divido el 11. por 2. y sobra 1. con que son numeros entre sì primos.

Otro exemplo: Tengo de examinar estos numeros 824. y 278. Divido el mayor por el menor, y sobran 268. Divido el menor 278. por el residuo 268. y sobran 10. Divido el 268. por 10. y sobran 8. Divido el 10. por 8. y sobran 2. Divido el 8. por 2. y sobra 0. con que son numeros entre sì compuestos, y el ultimo partidor 2. será la mayor medìda comun.

Si los numeros propuestos fueren mas que dos, primeramente se han de examinar dos de ellos, los quales si fueren entre sì primos, tambien todos los numeros propuestos serán entre sì primos; pero si fueren compuestos, tomese la maxima medida comun, y comparandola con el otro de los numeros propuestos, vease si hacen numeros entre sì primos, ò compuestos; si primos, todos serán primos, si compuestos saquese la maxima medìda comun, la qual serà maxima medìda comun de todos los tres numeros propuestos. Si huviere mas numeros, se con-

conferirà esta medìda comun del mismo modo con el quarto numero, y assi de los demás.

Sean estos tres numeros 84. 32. 16. los que se han de examinar. Primeramente miro si los dos 84. y 32. son entre sì primos, ò compuestos, y hallo que son compuestos, cuya maxima medìda comun es 2. Examino si esta medida comun 2. y el otro numero 16. son entre sí primos, ò compuestos, y hallo que son compuestos, cuya maxima medìda comun tambion es 2. pues, digo, que el 2. es maxima medìda comun de los tres numeros propuestos.

Otro exemplo: Sean propuestos quatro numeros 12. 18. 24. 30. Examino los dos 12. y 18. y hallo que son compuestos, y que su medida comun es *6*. Examino otra vez el *6*. y el 24. y hallo que son compuestos, y que su maxima medida comun es otra vez *6*. Examino este *6*. y el 30. y hallo que son compuestos, y que su medìda comun es tambien el *6*. pues, digo, que el *6*. es maxima medída comun de todos los quatro numeros propuestos. Estos modos de obrar enseña Euclides *en las proposiciones 2. y 3. del lib. 7.*

Resuelvese el Problema.

150 Examinense el numerador, y denominador del quebrado si son entre sì primos, ò compuestos: si son primos ya está el quebrado reducido à los minimos terminos; de suerte, que aunque estè expressado con grandes numeros, como $\frac{216}{537}$, no se puede reducir quedando el mismo valor, por ser los minimos terminos en aquella razon que dice el numerador al denominador, en la qual consiste el valor del quebrado.

Pero si el numerador, y denominador son entre sì compuestos, busquese la mayor medída comun, por la qual se partiràn los mismos numerador, y denominador, y los quocientes seràn los terminos del quebrado reducido.

Como para reducir $\frac{84}{100}$ á minimos terminos, buscarà primero la maxima medìda comun, (149) que es 4. por la qual partirè el 84. y el 100. y estarà el quebrado reducido à $\frac{21}{25}$. Assi mismo este otro quebrado $\frac{128}{368}$, se reducirà à los minimos terminos, partiendo el numerador, y denominador por 16. que es la maxima medida comun entre el numerador, y denominador, y vendrà el quebrado reducido $\frac{8}{23}$.

Demonstracion.

Dividiendo dos numeros por un partidor, salen los quocientes proporcionales, ò en una misma proporcion, que todo es uno, con los nume-

 ros

ros dividendos, (94) luego en el exemplo primero, los quocientes 21. y 25. son proporcionales con los dividendos 84. y 100. y assi, los quebrados $\frac{84}{100}$, y $\frac{21}{25}$ son iguales, porque tienen los numeradores la misma razon á los denominadores. (137) A mas desto, dividiendo por la maxima medida comun, salen los quocientes minimos, porque quanto mayor es el divisor, es menor el quociente; y consta tambien por el corolario de la *prop.* 35. *del lib.* 7. de Eucl. luego el quebrado $\frac{21}{25}$, es igual à $\frac{84}{100}$, y está reducido à los minimos terminos.

Escolio.

151 Esta reduccion, como dixe, no es necessaria, sino conveniente; y assi por no gastar tiempo, y fatigar la cabeza en esta operacion, la qual suele ser muy cansada, se podrá reducir el quebrado las mas veces á menores terminos, aunque no siempre à los minimos, deste modo.

Saquese la mitad, tercio, quarto, quinto, sexto, &c. ò aquella parte que se pudiere del numerador, y denominador del quebrado; esto es, partanse por 2. 3. 4. 5. 6. &c. hagase lo mismo del quebrado que saliere; y assi, prosiguiendo hasta que no se pueda partir mas; entonces estará reducido el quebrado à menores terminos, y muchas veces à los minimos; porque partiendo los terminos del quebrado por un numero, no se muda la proporcion, y por consiguiente, ni el valor del quebrado.

Como para reducir este quebrado $\frac{48}{96}$, divido los terminos por 2. que es sacar mitad, y será $\frac{24}{48}$, dividiendole otra vez por 2. saldrà $\frac{12}{24}$, dividiendole otra vez por 2. sale $\frac{6}{12}$, aora por abreviar sacando el sexto, ò partiendole por 6. saldrà $\frac{1}{2}$, que es lo mas que se puede reducir.

Si en el numerador, y denominador huviere al principio alguno, ò algunos zeros, quitense tantos de uno, como de otro, y quedarà mas reducido, como en este $\frac{240}{600}$, quito un zero de cada parte, y restarà $\frac{24}{60}$, que es lo mismo que partir por 10. Assi mismo, quitando dos zeros deste quebrado $\frac{600}{000}$, que es lo mismo que partir por 100. quedarà mas reducido à $\frac{6}{100}$; porque partiendo por un mismo numero, quedan los quebrados iguales, como se dixo antes.

152 A esta regla de reducir quebrados à minimos, ò menores terminos, suelen llamar los Arithmeticos, *abreviar quebrados*; su opuesta es, la regla de aumentarlos; la qual, aunque es de poco, ò de ningun provecho, pero para cumplimiento deste escolio no omitirè el enseñarla.

Multipliquense el numerador, y denominador del quebrado que se ha de aumentar por un qualquier numero, ò por aquel que importàre; y saldrà el quebrado aumentado à mayores terminos; como para aumentar $\frac{2}{3}$ multiplico por 4. y tendrè $\frac{8}{12}$; si multiplico por 5. tendrè $\frac{10}{15}$; porque quando un numero multiplica à otros dos, salen los productos pro-

proporcionales; (71) luego los quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{8}{12}$ $\frac{10}{15}$ son iguales, porque los numeradores tienen la misma razon á sus denominadores.

Examen.

153 Para examinar la reduccion, ò aumento de los quebrados, se harà assi: Multipliquense los terminos del quebrado reducido por la maxima medida comun, y saldrà el quebrado que se reduxo, como si $\frac{84}{100}$ està reducido á $\frac{21}{25}$, multiplico el 21. y el 25. por 4. que es la medida comun, y se bolverá á restituir el $\frac{84}{100}$ como es manifiesto.

Si los terminos aumentados del quebrado se dividen por el numero que se multiplicaron, bolverà á salir el quebrado primero, como si $\frac{2}{3}$ se aumentò à mayores terminos $\frac{20}{30}$, multiplicando por 10. Dividase aora por 10. y bolverà á salir como antes.

PROBLEMA II.

REDUCIR LOS QUEBRADOS A UN COMUN *denominador.*

154 Reducir los quebrados à una denominacion, ò comun denominador, es buscar otros iguales, ó del mismo valor, que tengan un mismo, comun, ò igual denominador.

Si los quebrados son dos, como $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$, se reducirán multiplicando entre sí los denominadores 3. y 5. y será el producto 15. el comun denominador. Para hallar los numeradores competentes al comun denominador, multipliquense los numeradores en cruz por los denominadores, como en el exemplo propuesto, multiplicando 2. por 5. sale el numerador 10. y multiplicando el 4. por 3. sale el otro numerador 12. con que los $\frac{2}{3}$, y $\frac{4}{5}$ estarán reducidos á un comun denominador $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$.

$$\begin{matrix} 10 & & 12 \\ \frac{2}{3} & \times & \frac{4}{5} \\ & 15 & \end{matrix}$$

Otro exemplo. Se han de reducir los quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{5}{6}$ á un comun denominador. Multiplico los denominadores 2. y 6. y saldrà el comun denominador. Multiplico aora en cruz, y saldràn los nuevos numeradores 6. y 10. con que estarán reducidos, á $\frac{6}{12}$ y $\frac{10}{12}$. *La demonstracion desta primera parte del Problema, es la misma que la del Theorema 5.*

$$\begin{matrix} 6 & & 10 \\ \frac{1}{2} & \times & \frac{5}{6} \\ & 12 & \end{matrix}$$

Si los quebrados, que se han de reducir fueren mas que dos, se multiplicarà el denominador del primero, por el denominador del se-

gundo ; y el producto, por el denominador del tercero, y este producto, por el denominador del quarto, &c. El ultimo producto, serà el denominador comun. Para hallar los numeradores competentes à este denominador comun, multipliquese el numerador de cada quebrado por los denominadores de los otros quebrados, no por el propio, y el producto será el numerador competente al comun denominador.

Como si se han de reducir los quebrados $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{7}$. Multiplicando 3. por 5. y el producto 15. por 7. serà el comun denominador 105. Para los nuevos numeradores, multiplico, el numerador 2. por los denominadores 5. y 7. diciendo 2. veces 5. son 10. otra vez 10. veces 7. son 70. que es el un numerador. Multiplico el numerador 4. por 3. y 7. y serà 84. el otro numerador. Multiplico el numerador 6. por 3. y 5. y serà el otro numerador 90. con que los quebrados reducidos à un comun denominador, seràn $\frac{70}{105}$ $\frac{84}{105}$ $\frac{90}{105}$.

70	84	90
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{7}$
	105	

Otro exemplo: Se han de reducir estos quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{8}$ à un comun denominador. Multiplicando los denominadores entre sì, saldrà el denominador comun 384. Multiplicando cada numerador por todos los denominadores, menos que por el propio, saldrán los numeradores nuevos 192. 288. 320. 336. con que estaràn reducidos à $\frac{192}{384}$ $\frac{288}{384}$ $\frac{320}{384}$ $\frac{336}{384}$.

192	288	320	336
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$
	384		

Demonstracion.

Si se atiende con cuydado à la operacion, constará claramente, que es lo mismo que reducir los quebrados de dos en dos á un comun denominador; porque si en el exemplo primero se reducen los $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$ à un comun denominador, seràn $\frac{10}{15}$ y $\frac{12}{15}$; y si cada uno destos se hermana con el otro quebrado $\frac{6}{7}$ reduciendolos à un comun denominador; esto es, reduciendo por una parte $\frac{10}{15}$ y $\frac{6}{7}$, y por otra $\frac{12}{15}$ y $\frac{6}{7}$, quedaràn todos reducidos, porque es la misma operacion que hemos hecho antes: pues como la reduccion de dos quebrados estè ya demonstrada, lo estará tambien la de muchos.

Escolio.

155 De otro modo podemos hacer la misma reduccion en quanto al hallar los nuevos numeradores. Multipliquese cada numerador por el

co-

comun denominador, y partiendo el producto por el denominador propio de cada quebrado, los quocientes seràn los nuevos numeradores. Como si se han de reducir $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ á un comun denominador. Multiplicando los denominadores 3. 3. y 4. entre sì, tendrè el denominador comun 36. Aora multiplico el numerador 1. por el comun denominador 36. y el producto (que es 36.) le divido por el denominador 3. del quebrado $\frac{1}{3}$ serà el quociente el numerador nuevo 12. Assimismo: multiplico el numerador 2. por el 36. y partiendo el producto 72. por el denominador 3. del quebrado $\frac{2}{3}$ saldrà el nuevo numerador 24. Ultimamente: multiplico el numerador 3. por el comun denominador 36. y el producto 108. le divido por el denominador 4. del quebrado $\frac{3}{4}$ el quociente 27. serà el nuevo numerador.

12	24	27
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
	36	

La razon desto depende de lo que dirèmos en la demonstracion de la regla de tres; porque aqui ay una regla de tres implicita deste modo: Si el denominador 3. (en el primer quebrado) dà el numerador 1. quedará el comun denominador 36. la qual regla se hace multiplicando el termino segundo por el tercero, que aqui es el 1. por el 36. y partiendo el producto por el primer termino, que es el denominador 3. como le verèmos en su lugar.

Examen.

Para examinar esta reduccion, solo se ha de atender à que los quebrados reducidos sean iguales à los quebrados antes de reducir; porque el saber si tienen un comun denominador no necessita de prueba, pues se vè à la primera vista. Supongo, pues, que estos quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{4}$ estàn reducidos á estos $\frac{8}{20}$ y $\frac{15}{20}$. Examinense si los quebrados $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$ si son iguales multiplicando en cruz, y viendo si los productos salen iguales. (145) Del mismo modo se examinaràn los otros dos $\frac{3}{4}$ y $\frac{15}{20}$, y si los $\frac{8}{20}$, y $\frac{15}{20}$ fueren iguales á $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{4}$ estará bien hecha la reduccion.

PROBLEMA III.

REDUCIR UN QUEBRADO A UN DENOMINADOR DEterminado quando se puede hacer.

156 REducir un quebrado á un denominador determinado, es buscar un quebrado de igual valor, que tenga el denominador, que se pide. Multipliquese el numerador del quebrado por el denominador señalado, y el producto partase por el denominador del

del mismo quebrado, el quociente será el nuevo numerador competente al denominador determinado.

Este quebrado $\frac{2}{3}$ se ha de reducir á un quebrado que tenga por denominador 6. Multipliquese el numerador 2. por 6. y el producto 12. dividase por el denominador 3. del quebrado, el quociente 4. será el numerador competente al denominador 6. con que el quebrado reducido es $\frac{4}{6}$ igual á $\frac{2}{3}$.

Otro exemplo: Tengo de reducir $\frac{6}{8}$ á quartos, ò á un denominador 4. multiplico 6. por 4. y el producto 24. le parto por el denominador 8. y será el quociente 3. con que el quebrado reducido es $\frac{3}{4}$.

Demonstracion.

157 Que el quebrado reducido $\frac{4}{6}$ en el primer exemplo, (lo mismo se dirà de qualquier otro) sea igual á los $\frac{2}{3}$ estarà manifiesto por el Theor. 2. con que puebe, que la misma razon tiene el numerador 2. al denominador 3. que el otro numerador 4. à su denominador 6. esto es, que estos quatro numeros 2. 3. 4. 6. son proporcionales, lo qual pruebo assi. El 2. se ha multiplicado por el otro extremo 6. y el producto 12. que es de los dos extremos, se ha partido por el 3. que es un medio, para hallar el otro medio 4. y assi multiplicando 3. por 4. se buelve à restituír el 12. que es el producto de los medios: con que de los quatro numeros 2.3.4.6. el producto de los extremos es igual al de los medios luego por la *prop.* 19. *del lib.* 7. de Euc. son proporcionales; que es el intento.

Observacion.

158 Quando el producto del numerador por el denominador determinado no se puede partir enteramente por el denominador del quebrado, no tiene lugar esta reduccion sin aver quebrado de parte de quebrado; como reduciendo $\frac{2}{5}$ á octavos, salen $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{5}$ de un octavo: con que no siempre se podrà hacer esta reduccion á quebrado simple. El examen desta operacion es el mismo que dimos en el Problema antecedente. En esta doctrina se fundan las partes Decimas, que explicarèmos en la quarta parte deste Libro, y el Problema siguiente.

Hallar el valor de un quebrado.

159 Hallar el valor del quebrado, es saber lo que vale en alguna especie determinada; como que $\frac{3}{4}$ de vara son 3. palmos. Primeramente es necessario saber el valor del entero, respeto de quien es quebrado; esto es, en que partes se divide el dicho entero: pues multiplicando el valor del entero por el numerador del quebrado, y partiendo el producto por el denominador, se hallará lo que se busca.

Exemplo: Para saber $\frac{3}{5}$ de libra, moneda de Valencia, què valen: porque la libra tiene 20. sueldos, multiplico el numerador 3. por 20.

sa-

salen 60. dividolos por el denominador 5. y hallo 12. pues tantos sueldos son los $\frac{3}{5}$ de libra.

Otro exemplo: Si se busca què valen $\frac{2}{3}$ de libra, moneda de Valencia Multiplico el 2. por 20. son 40. sueldos; dividolos por 3. caben 13. sueldos, y sobra $\frac{1}{3}$ de sueldo, el qual porque contiene 12. dineros, multiplico el numerador 1. deste ultimo quebrado por 12. y el producto 12. le divido por el denominador 3. salen 4. dineros: con que valdrá el quebrado 13. sueldos y 4. dineros.

Otro exemplo: Quiero saber el valor de $\frac{2}{7}$ de arroba peso de Castilla; porque la arroba en Castilla tiene 25. libras, multiplicolas por 2. y el producto 50. le divido por el denominador 7. caben à 7. y sobra $\frac{1}{7}$ de libra; la qual porque tiene 16. onzas las multiplico por el numerador 1. deste ultimo quebrado, y partiendo el producto 16. por el denominador 7. caben à 2. y sobran $\frac{2}{7}$ de onza; la qual porque tiene 8. ochavas, las multiplico por el numerador 2. deste ultimo quebrado, y dividiendo el producto 16. por 7. hallo 2. ochavas, y sobran $\frac{2}{7}$ de ochava la qual porque tiene 75. granos, les multiplico por 2. y parto el producto 150. por 7. caben à 21. granos, y sobran $\frac{3}{7}$ de grano, el qual ya no tiene division: con que los $\frac{2}{7}$ de arroba son 7. libras, 2. onzas, 2. ochavas, 21. granos, y $\frac{2}{7}$ de grano.

Demonstracion.

El quebrado se reduce al denominador en que se divide el entero, como en el exemplo primero los $\frac{3}{5}$ de libra, segun la operacion, estàn reducidos á $\frac{12}{20}$ de libra; y porque el denominador son las mismas partes del todo, que aqui es la libra, no ay necessidad de nombrarle, sino solo el numerador 12. sueldos. De suerte, que saber el valor de un quebrado, es reducirle à un denominador, que sea el numero de las partes en que se divide el todo, ò especie mayor, para hacerla menor, ó mas baxa.

PROBLEMA IV.

REDUCIR LOS ENTEROS A QUEBRADOS.

Reducir un entero á quebrado, es buscar un quebrado igual al mismo entero. Tiene este Problema muchos casos.

Caso primero.

160 Para reducir un entero à qualquier quebrado sin determinar la especie, ò el denominador, se pondrá debaxo del entero una unidad, y estarà reducido, como consta por lo que advertimos arriba (128.) y assi para reducir 12. à quebrado se hará deste modo $\frac{12}{1}$.

Ca-

Caso segundo.

161 Pero para reducir el entero à quebrado, cuyo denominador se ha determinado, se multiplicará el entero por el denominador señalado, y el producto serà numerador respeto del dicho denominador; como si 16. se han de reducir á quintos, multipliquense los 16. por 5. y serà el quebrado $\frac{80}{5}$. Si la unidad se ha de reducir à un denominador determinado, como à 5. pongase un 5. encima la linea, y otro dabaxo asi $\frac{5}{5}$, y estará reducida.

La razon de esto es, porque si el 16. le ponemos como à quebrado asi $\frac{16}{1}$, para reducirle à quintos, multiplicamos el 16. por 5. y para hallar el nuevo numerador partimos el producto por el denominador 1. del quebrado; (156) pues como partir por 1. no disminuye la cantidad, quedará por numerador nuevo el mismo producto de 16. por 5. luego con multiplicar el entero por el denominador determinado, y el producto ponerle encima del mismo denominador, estarà reducido el entero à quebrado.

Caso tercero.

162 Para reducir, ò incorporar el entero en un quebrado, multipliquese el entero por el denominador del quebrado, y al producto añadase el numerador del mismo quebrado; la suma serà el nuevo numerador: como si 10. se han de reducir á $\frac{2}{3}$, multiplico 10. por 3. y al producto 30. añado el numerador 2. serà todo 32. que es el numerador nuevo, debaxo del qual pondrè el mismo denominador, y estarà reducido asi $\frac{32}{3}$.

Porque si el entero 10. solo se huviera de reducir á tercios, serìa $\frac{30}{3}$, por la regla antecedente, à mas desto ay 2. tercios: luego se han de añadir para hacer $\frac{32}{3}$: y como la unidad no aumenta la multiplicacion, se sigue desta regla, que para reducir la unidad à un quebrado, basta sumar el numerador, y denominador, y la suma serà el nuevo numerador, debaxo del qual se pondrà el mismo denominador; y asi si 1. se ha de reducir à $\frac{3}{4}$, sumense 3. y 4. y debaxo la suma 7. pongase el mismo denominador 4. con que seran $\frac{7}{4}$.

Caso quarto.

163 Se han de reducir 12. y $\frac{3}{4}$ à $\frac{2}{8}$. Primeramente reduzganse los 12. enteros al quebrado $\frac{3}{4}$ que les acompaña por la regla antecedente, y seràn $\frac{51}{4}$, los quales se reduciràn á un quebrado, que tenga por denominador 8. (156) y seràn $\frac{102}{8}$ añadanse los 2. octavos, y serà el quebrado reducido $\frac{104}{8}$. *La reduccion de este caso no es universal, porque depende del Problema antecedente, el qual no siempre tiene solucion, como asi se advirtiò.*

PRO-

PROBLEMA V.

REDUCIR LOS QUEBRADOS A ENTEROS.

QUando el numerador es mayor que el denominador, el quebrado es mayor que la unidad, y por consiguiente contiene à lo menos un entero. (136) Pues lo que se busca en este Problema, es hallar quantos enteros ay en un quebrado mayor que la unidad.

164 Dividase el numerador por el denominador, y el quociente enseñará los enteros: Como en este quebrado $\frac{36}{9}$, dividiendo 36. por 9. hallarèmos que ay 4. enteros justos. En este otro $\frac{45}{6}$, dividiendo el 45. por 6. hallarèmos 7. enteros, y sobran $\frac{3}{6}$. La razon es clara, porque como el denominador es un entero, partiendo por èl, sabremos quantos enteros contiene el quebrado. El examen serà reducir los enteros al quebrado, que tenga por denominador el mismo de antes, (161. y 162.) y ha de salir el quebrado, que se reduxo.

PROBLEMA VI.

REDUCIR EL QUEBRADO COMPUESTO A SIMPLE.

REducir el quebrado compuesto à simple, es hallar un quebrado sencillo, que sea igual al compuesto. Y como el quebrado compuesto sea en dos maneras; es à saber, quebrado de quebrado, y quebrado de parte de quebrado, (132) tendrà este Problema dos partes.

Primera parte.

165 Para reducir quebrado de quebrado, à quebrado simple, multipliquense los numeradores entre sì unos por otros, y saldrà el nuevo numerador: multipliquense del mismo modo los denominadores, y el producto será el nuevo denominador.

Como para reducir $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ à quebrado sencillo, multiplicando los numeradores 2. y 4. serà 8. el nuevo numerador; multiplicando tambien los denominadores 3. por 5. serà 15. el nuevo denominador, y el quebrado simple reducido serà $\frac{8}{15}$.

Si ay quebrado de quebrado de quebrado, como $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$, multiplicando assi mismo los numeradores entre sì 1. por 3. y el producto por 2. saldrá el nuevo numerador 6. Multiplicando tambien entre sì los denominadores 2. por 4. y el producto 8. por 3. serà 24. el nuevo deno-

mina-

minador, y el quebrado reducido $\frac{6}{24}$, ò $\frac{1}{4}$. Del miſmo modo ſe reducirán muchos quebrados de quebrados.

Demonſtracion.

En el exemplo primero (lo miſmo dirè de qualquier otro) los $\frac{2}{3}$ ſon de $\frac{4}{5}$: luego ſi $\frac{4}{5}$ ſe dividen en tres partes, y ſe toman dos, ſe tendrà el intento. Pues dividir los $\frac{4}{5}$ en tres partes es multiplicar el denominador 5. por 3. ò aumentarle tres veces, porque tanto quanto ſe aumenta el denominador, mengua el quebrado, (147) con que el tercio de $\frac{4}{5}$ ſerà $\frac{4}{15}$. Y porque ſon dos tercios ſe ha de tomar dos veces el quebrado $\frac{4}{15}$, que es lo miſmo que multiplicar el numerador 4. por 2. porque quanto crece el numerador, ſe aumenta el quebrado, (142) y ſerà $\frac{8}{15}$, que es el miſmo quebrado producido. Pues ſi eſte modo de obrar ſe mira bien, es lo miſmo que multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, que es lo que avemos hecho en el exemplo. Lo miſmo es quando ay muchos quebrados de quebrados.

Segunda parte.

166 Para reducir el quebrado de parte de quebrado, à quebrado ſimple, ſaqueſe una parte del quebrado de quien el otro es parte, con la qual, y el quebrado de parte ſe harà la reduccion como antes.

Como ſi $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{4}$ ſe han de reducir à quebrado ſimple, tomeſe una parte de los $\frac{3}{4}$, y ſerá $\frac{1}{4}$ con que los $\frac{2}{5}$ reſpeto de $\frac{1}{4}$ ſerán quebrado de quebrado: deſte modo $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{4}$, reduzganſe multiplicando numerador por numerador, y denominador por denominador, (165) y ſerá el quebrado ſimple reducido $\frac{2}{20}$.

Otro exemplo: Sean $\frac{3}{7}$ de una parte de $\frac{2}{3}$, tomando una parte de los $\frac{2}{3}$ ſerá lo miſmo, que $\frac{3}{8}$ de $\frac{1}{3}$, reduzganſe, (165) y ſerán $\frac{3}{21}$. Otro exemplo: Sean $\frac{1}{2}$ de una parte de $\frac{4}{5}$ de una parte de $\frac{2}{7}$. Tomando cada parte de los quebrados ſerá $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{7}$, y reducidos como antes ſerán $\frac{1}{70}$ la demonſtracion es la miſma.

Examen.

En los quebrados de quebrado, dividanſe los terminos del quebrado ſimple por los terminos de qualquiera de los quebrados de quebrado, y ſaldrà el otro: Como ſi $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{6}$ eſtán reducidos à $\frac{8}{18}$, partiendo el 8. y el 18. por los terminos 2. y 3. del quebrado $\frac{2}{3}$ ſaldrà el otro quebrado $\frac{4}{6}$, porque como $\frac{8}{18}$ provino de la multiplicacion de los terminos de $\frac{2}{3}$, y $\frac{4}{6}$: luego partiendo por los terminos de un quebrado, ſaldrá el otro.

En los quebrados de parte de quebrado ſe hará el miſmo examen, pero no con todo el quebrado, ſino con la parte del quebrado: Como ſi ſon $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$ ſaqueſe una parte deſte quebrado, y ſerá $\frac{1}{7}$, co-

mo

mo ſe dixo antes, y ſerán $\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{7}$, los quales reducidos à quebrado ſimple ſerá $\frac{2}{35}$; pues ſi los terminos deſte quebrado ſe dividen por los terminos de $\frac{2}{5}$, ſaldràn los terminos de $\frac{1}{7}$, pues es la miſma operacion de antes.

Obſervacion.

El quebrado, que ſe reduce en eſtas dos operaciones, es el primero, ò el que es parte, porque no ſe ha de entender, que todos los quebrados juntos ſe reducen tanto el que es parte, como el que es todo, ſino ſolo el que es parte; de ſuerte, que el reducir $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ es hallar quanto valdrà $\frac{1}{3}$ de la mitad; y ſi la mitad es de ſueldo, (que conſta de 12. dineros) valdrá 6. dineros, con que $\frac{1}{3}$ deſta mitad ſeràn 2. dineros, y aſsi $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de ſueldo valdrá 2. dineros. En el Problema ſiguiente reduciremos todos los quebrados, tanto el que es parte, como el que es todo.

PROBLEMA VII.

INCORPORAR LOS QUEBRADOS COMPUESTOS.

EN el Problema antecedente dimos regla para reducir el quebrado compueſto à ſimple; aora enſeñaremos el modo de incorporarlos, ò reducirlos à un quebrado ſolo, que ſea igual al quebrado que es parte, y al que es todo, de ſuerte, que todos ſe haga uno ſolo. Contiene tambien eſte Problema dos partes.

Primera parte.

167 Incorporar un quebrado de quebrado, es hallar un quebrado ſimple, que ſea igual al quebrado que es parte, y al que es todo: Como ſi ſon $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$, para incorporarlos ſe ha de buſcar un quebrado, que ſea la ſuma de entrambos; eſto es, que ſea igual à los $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ los dos juntos.

Reduzganſe primero à quebrado ſencillo, (165) y ſerán en el exemplo propueſto $\frac{8}{15}$. Aora multipliqueſe el numerador del quebrado $\frac{4}{5}$, que es el todo, por el denominador del quebrado $\frac{2}{3}$, que es parte, y el producto 12. añadaſe al numerador del quebrado reducido $\frac{8}{15}$, ſerán $\frac{20}{15}$ el quebrado que ſe buſca.

$\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{20}{15}$

Otro exemplo: Se ha de incorporar el quebrado $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ en el miſmo quebrado $\frac{3}{4}$. Reducidos à quebrado ſimple ſon $\frac{3}{8}$; multiplicando el numerador 3. por el denominador 2. ſon 6. añadidos al numerador 3. del quebrado reducido $\frac{3}{8}$ ſon $\frac{9}{8}$, que es la ſuma de $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{9}{8}$

Si

Si ay muchos quebrados de quebrados ſe incorpararán primero los dos primeros, y deſpues el ſiguiente, &c. como ſi ſon $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{7}$. Por la regla antecedente ſe incorporarán los $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, y ſerán $\frac{5}{6}$, deſpues ſe incorporarán los $\frac{5}{6}$ en los $\frac{2}{5}$, y ſerán $\frac{22}{30}$, los quales ſe incorporarán con los $\frac{3}{7}$, y ſerán $\frac{156}{210}$, que es el quebrado que ſe buſca.

Demonſtracion.

En el primer exemplo, (lo miſmo diré de qualquier otro) multiplicando el denominador 3. por los terminos del quebrado $\frac{4}{5}$, ſaldrá el quebrado $\frac{12}{15}$ igual à $\frac{4}{5}$, como conſta por el Problema 2. A mas deſto el quebrado $\frac{8}{15}$, por la conſtruccion es igual al quebrado de quebrado $\frac{2}{3}$. (165) luego ſumando los quebrados $\frac{12}{15}$ con $\frac{8}{15}$, (que teniendo un miſmo, ò igual denominador, baſta añadir los numeradores, como luego diremos) ſerá la ſuma $\frac{20}{15}$ el quebrado que ſe buſca. Quando ay muchos quebrados de quebrados, la demonſtracion es la miſma, pues que ſe incorporan de dos en dos.

Segunda parte.

168. Para incorporar un quebrado de parte de quebrado, como $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$, ſe multiplicarán los denominadores, y ſerá el nuevo denominador 35. Para hallar el nuevo numerador ſe multiplicará el numerador 3. del quebrado de quien ſe toma la parte, por el denominador 5. del quebrado que es parte; y al producto 15. ſe añadirá el numerador 2. y ſerá el nuevo numerador 17. y todo el quebrado $\frac{17}{35}$.

$\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$ $\frac{17}{35}$

Otro exemplo: Se han de incorporar $\frac{3}{4}$ de una parte de $\frac{1}{2}$, multiplicando los denominadores 4. por 2. ſalen 8. multiplicando el numerador 1. por el denominador 4. y al producto 4. añadiendo el numerador 3. ſalen 7. que es el nuevo numerador, y todo el quebrado $\frac{7}{8}$.

$\frac{3}{4}$ de una parte de $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{8}$

Si ſon muchos quebrados; como $\frac{1}{2}$ de una parte de $\frac{3}{4}$, de una parte de $\frac{2}{3}$, de una parte de $\frac{4}{5}$, ſe incorporarán de dos en dos; eſto es, $\frac{1}{2}$ con $\frac{3}{4}$, y ſerán $\frac{7}{8}$, los quales ſe incorporarán con $\frac{2}{3}$, y ſerán $\frac{23}{24}$, los quales ſe incorporarán con $\frac{4}{5}$, y ſerán todo $\frac{119}{120}$.

Demonſtracion.

En el exemplo primero el quebrado $\frac{2}{5}$ de una parte de $\frac{3}{7}$, reducido à quebrado ſimple es $\frac{2}{35}$. (166) El quebrado $\frac{3}{7}$ es igual à $\frac{15}{35}$, como conſta por el Problema 2. luego teniendo un comun denominador los dos quebrados baſta añadir los numeradores, y ſerá el quebrado $\frac{17}{35}$ el que ſe buſca. Quando ay muchos quebrados es lo miſmo, porque ſe incorporan de dos en dos, como eſtà dicho.

CA-

CAPITULO TERCERO.

DEL SUMAR QUEBRADOS.

ESte Capitulo, y los tres ſiguientes contienen diferentes reglas, las quales reducirè à Problemas, para proceder con toda claridad, y diſtincion.

PROBLEMA I.

SUMAR QUEBRADOS.

169 SI los quebrados tienen un miſmo, ò igual denominador, ſumenſe los numeradores, y la ſuma ſerà el nuevo numerador, debaxo del qual ſe pondrà el miſmo denominador: como ſi ſe han de ſumar $\frac{2}{5}$ con $\frac{3}{5}$, ſumando los numeradores 2. y 3. ſerá la ſuma 5. debaxo del qual ſe pondrà el denominador 5. y ſerà el quebrado, ò ſuma $\frac{5}{5}$, que es lo miſmo que un entero.

Otro exemplo: Sean $\frac{3}{7}$, y $\frac{6}{7}$, ſumando 3. con 6. ſerà el nuevo numerador 9. debaxo del qual ſe pondrà el 7. y ſaldrá la ſuma $\frac{9}{7}$, que es uno entero, y $\frac{2}{7}$.

Pero ſi los quebrados que ſe han de ſumar tienen diferentes denominadores, reduzganſe primero à un comun denominador; (154) deſpues ſumenſe los numeradores nuevos, poniendo debaxo de la ſuma el denominador comun: como para ſumar $\frac{2}{3}$ con $\frac{5}{7}$, reduzganſe à $\frac{14}{21}$, y $\frac{15}{21}$, ſumenſe 14. y 15. ſeràn 29. debaxo ſe pondrán el 21. y aſsi ſerà la ſuma $\frac{29}{21}$, que es un entero, y $\frac{8}{21}$.

Otro exemplo: Se han de ſumar $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, y $\frac{4}{6}$, reducidos à un comun denominador, (154) ſon $\frac{30}{60}$, $\frac{24}{60}$, $\frac{40}{60}$; ſumenſe los numeradores 30. 24. y 40. debaxo de la ſuma 94. eſcrivaſe el comun denominador 60. con que la ſuma ſerà el quebrado $\frac{94}{60}$.

Demonſtracion.

Teniendo los quebrados un comun denominador, ſeràn partes de un todo denominadas por un miſmo numero; eſto es, ſeràn partes homogeneas, ò de una miſma eſpecie: luego la ſuma deſtas partes (en las

quales consisten los quebrados, como se dixo arriba) en orden al comun denominador, como serà la suma de los quebrados.

PROBLEMA II.

SUMAR ENTERO CON QUEBRADO.

170 TRes casos puede tener este Problema. El primero, es sumar un entero con un quebrado, y este caso no tiene dificultad; porque si se pone el quebrado al lado derecho del entero, estarà sumado: como si se han de sumar 12. enteros con $\frac{2}{5}$, será la suma 12. y $\frac{2}{5}$; porque como el quebrado no es homogeneo con el entero, se suma con la conjuncion, y como està dicho en el numero 42.

El segundo caso es, quando se han de sumar muchos enteros con un quebrado: Sumense los enteros, y al lado de la suma escrivase el quebrado como antes: como para sumar 12. y 15. con $\frac{2}{5}$, sumo 12. y 15. y al lado de la suma 27. pongo el quebrado assi: 27. y $\frac{2}{5}$.

El tercer caso, es quando han de sumar uno, ò muchos enteros con muchos quebrados; como en el exemplo: Sumense los quebrados, y seràn $\frac{13}{10}$. (169) Y porque el numerador es mayor que el denominador, reduzganse á enteros, (164) y serà 1. y $\frac{3}{10}$; escrivanse los $\frac{3}{10}$, y el 1. se sumarà con los enteros; con que serà la suma 45. y $\frac{3}{10}$. La razon deste modo de obrar por sì missma es manifiesta.

10	
34	
	$\frac{1}{2}$
	$\frac{4}{5}$
45	$\frac{3}{10}$

PROBLEMA III.

SUMAR ENTEROS, Y QUEBRADOS, CON ENTEROS, y quebrados.

171 SUmense primero los quebrados, (169) y reducida la suma à enteros (si es que el numerador fuere igual, ò mayor que el denominador) se escrivirà el quebrado que sobràre debaxo de la linea, y enfrente de los otros quebrados; despues sumando los enteros hallados por el quebrado reducido (si es que los ay) con los enteros de las partidas, estarà concluìda la suma.

Como

Como si se han de sumar 6. y quatro quintos, con 12. y tres quartos, la suma de los quebrados es $\frac{31}{20}$, sacados los enteros, ò reducidos, es 1. y $\frac{11}{20}$; escrivanse los $\frac{11}{20}$, y sumese 1. con los 6. y 12. y serà toda la suma 19. y $\frac{11}{20}$.

6	$\frac{4}{5}$
12	$\frac{3}{4}$
19	$\frac{11}{20}$

Otro exemplo: Se han de sumar los numeros, ò partidas que están en el exemplo: los quebrados sumados son $\frac{534}{216}$, y reducidos à enteros son 2. y $\frac{102}{216}$; escrivase este quebrado, y guardense los 2. enteros, para sumarlos con los enteros de las partidas; con que serà la suma 178. y $\frac{102}{216}$.

16	$\frac{8}{9}$
10	$\frac{3}{4}$
150	$\frac{5}{6}$
178	$\frac{102}{216}$

CAPITULO QUARTO.

DEL RESTAR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

RESTAR UN QUEBRADO DE OTRO.

172 SI los dos quebrados tienen igual denominador, restese el menor numerador del mayor, y la diferencia, ò resta serà el nuevo numerador, debaxo del qual se pondrà el denominador de los quebrados: como si se han de restar tres quintos de quatro quintos, restense 3. de 4. y quedarà 1. y el quebrado de la resta serà un quinto. Otro exemplo: Se han de restar $\frac{8}{12}$ de $\frac{11}{12}$, restando 8. de 11. quedaràn 3. y el quebrado residuo serà $\frac{3}{12}$.

Pero si no tienen un mismo, ò igual denominador, reduzganse à un comun denominador por el Problema 2. del Capitulo 2. y se harà la resta como antes: como si se han de restar tres quintos de tres quartos, reducidos son $\frac{12}{20}$, y $\frac{15}{20}$; y restando 12. de 15. quedaràn 3. que serà el numerador nuevo, debaxo del qual se pondrá el comun denominador; con que la resta serà $\frac{3}{20}$.

Otro exemplo: Se han de restar dos tercios de quatro sextos, reducidos son $\frac{12}{18}$, $\frac{12}{18}$, restando 12. de 12. queda zero; con que ningun

 resi-

reſiduo queda; porque quien deve $\frac{2}{3}$, ò $\frac{12}{18}$, y paga $\frac{4}{6}$, ò $\frac{12}{18}$, todo lo ha pagado, y nada queda deviendo.

Demonſtracion.

Los quebrados conſiſten en el numerador, (127) y ſiendo el denominador el miſmo, ò comun, ſeràn partes de un todo denominado por un miſmo numero, y toda la igualdad, ò deſigualdad eſtà en los numeradores: luego reſtando un numerador de otro, quedarà la diferencia, reſta, ò reſiduo.

Obſervacion.

En el reſtar quebrados no pueden concurrir mas que dos numeros, como ſe dixo en el reſtar enteros; y aſsi, quando ſe huviere de reſtar un quebrado de muchos, ò al contrario, ſe hará primero la ſuma, y deſpues la reſta: como para reſtar tres quartos de un medio y dos quintos, ſe ſumarán los dos, y de la ſuma $\frac{9}{10}$ ſe reſtarán los tres quartos, y quedarán $\frac{6}{40}$.

Si un quebrado no ſe puede reſtar de otro, por ſer eſte menor, como tres quartos de un medio, ſe hará la reſta al contrario, para ſaber lo que ſe pagò mas, (como ſe dixo en el reſtar enteros) reſtando un medio de tres quartos.

PROBLEMA II.

RESTAR QUEBRADOS DE ENTERO.

173 REſuelvaſe una unidad del entero en quebrado, cuyo denominador ſea igual al denominador del quebrado que ſe ha de reſtar; (161) deſpues reſteſe el quebrado dado de la unidad aſsi reducida, y reſtando 1. que ſe tomò del entero, quedarà la reſta.

Como ſi ſe han de reſtar dos quintos de 16. tomo una unidad de los 16. y reducida á quintos ſerà cinco quintos; reſtenſe aora dos quintos de cinco quintos, y quedaràn tres quintos, que ſe eſcriviràn debaxo la linea; deſpues reſteſe 1. que ſe tomò del numero 16. y quedarán 15. con que ſerà la reſta 15. y tres quintos: la razon deſte modo de obrar por sì miſma es manifieſta.

$$\begin{array}{r} 16 \\ \frac{2}{5} \\ \hline 15\ \frac{3}{5} \end{array}$$

Obſervacion.

174 Atendiendo con cuydado à la regla ſobredicha, conſta claramente,

mente, que se puede restar quebrado de entero, sin hacer reduccion de unidad; porque como la unidad reducida tenga el numerador igual al denominador del quebrado que se resta, es lo mismo quitar el numerador deste quebrado de su denominador, que del numerador de la unidad reducida; y assi para hacer la resta, basta quitar el numerador del quebrado de su denominador, y luego quitar 1. del entero: como para restar cinco sextos de 8. restese el numerador 5. del denominador 6. y quedarà un sexto: aora restese 1. de 8. y quedarà toda la resta 7. y un sexto.

PROBLEMA III.

RESTAR ENTERO, Y QUEBRADO, DE ENTERO SOLO.

175 ESte Problema es casi el mismo que el antecedente. Restese el numerador del quebrado de su denominador, (usando de la observacion antecedente); despues añadase 1. à la paga, y hagase la resta de los enteros del modo ordinario: como si se han de restar 6. y dos septimos de 12. restando el numerador 2. del denominador 7. quedan 5. y el quebrado es cinco septimos: añadese 1. à los 6. y seràn 7. restados de 12. quedan 5. con que es la resta 5. y cinco septimos.

$$\begin{array}{r} 12 \\ 6\,\frac{2}{7} \\ \hline 5\,\frac{5}{7} \end{array}$$

PROBLEMA IV.

RESTAR ENTERO, DE ENTERO, Y QUEBRADO.

176 REstese el un entero del otro (49), y al lado escrivase el quebrado: como para rastar 8. de 10. y dos tercios, restando 8. de 10. quedarán 2. y con el quebrado será la resta 2. y dos tercios.

$$\begin{array}{r} 10\,\frac{2}{3} \\ 8 \\ \hline 2\,\frac{2}{3} \end{array}$$



PROBLEMA V.

RESTAR ENTEROS, Y QUEBRADO, DE ENTEROS, y quebrado.

177 TRes casos tiene este Problema. El primero es quando el quebrado de la paga es igual al de la deuda; y entonces, con restar solamente los enteros, como parece en el exemplo, està concluìda la operacion; porque restando un quebrado de su igual, queda zero.

24	$\frac{1}{2}$
16	$\frac{1}{2}$
8	0

178 El segundo es, quando el quebrado de la paga es menor que el de la deuda; y entonces restese un quebrado de otro, (172) y escrivase la diferencia debaxo la linea; despues hagase la resta de los enteros por el modo ordinario, como parece en el exemplo.

18	$\frac{3}{4}$
10	$\frac{1}{2}$
8	$\frac{2}{8}$

179 El tercero es, quando el quebrado de la paga es mayor que el de la deuda; y en tal caso tomese una unidad de los enteros de la deuda, la qual se reducirá al quebrado que le acompaña (162); despues hagase la resta, como en el segundo caso, pero añadiendo 1. à los enteros de la paga, por la unidad que se tomò de la deuda: como en el exemplo, tomese 1. de 10. y reducido à $\frac{1}{2}$, serà $\frac{3}{2}$: restense aora tres quartos de $\frac{3}{2}$ (172), y quedaràn seis ochavos, que se han de escrivir debaxo la linea: despues, juntando 1. con los enteros 6. de la paga, seràn 7. restense de 10. y quedan 3. con que la resta son 3. y $\frac{6}{8}$. La razon deste modo de obrar por sì mismo es manifiesta.

10	$\frac{1}{2}$
6	$\frac{3}{4}$
3	$\frac{6}{8}$

De otro modo: Tomese lo que falta para un entero del quebrado $\frac{3}{4}$ de la paga, que será un quarto, sumese con el quebrado $\frac{1}{2}$ de la deuda, y seràn $\frac{6}{8}$; añadase 1. à los enteros de la paga, serán 7. restese como antes. Este modo no se diferencia en la substancia del que hemos usado en el restar enteros.

¶ En todos estos Problemas se reducen los quebrados compuestos à sus simples (quando les ay) antes de cada operacion, por el Problema 6. del cap. 2.

CAPITULO QUINTO.

DEL MULTIPLICAR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR QUEBRADO POR QUEBRADO.

180 MUltipliquenſe los numeradores uno por otro, y el producto ſerà el nuevo numerador: Multipliquenſe tambien los denominadores, y ſaldrá el nuevo denominador: como ſi ſe han de multiplicar dos quintos por quatro ſeptimos; multiplicando 2. por 4. ſale 8. multiplicando 5. por 7. ſale 35. con que el quebrado producido ſerà $\frac{8}{35}$. Otro exemplo: Para multiplicar tres quartos por un medio, multipliquenſe los numeradores 3. por 1. y tambien los denominadores 4. por 2. y ſerà el quebrado producido $\frac{3}{8}$.

$\frac{2}{5}\ \frac{4}{7}\quad \frac{8}{35}$

Aunque los quebrados multiplicados ſean muchos, ſe harà del miſmo modo: como para multiplicar dos tercios por tres quintos, y el producto por un medio, y el producto otra vez por tres ſeptimos, ſe multiplicarán los numeradores unos por otros; eſto es, 2. por 3. y el producto 6. por 1. y el producto 6. por 3. ſerán 18. Multipliquenſe del miſmo modo los denominadores, y ſerá el producto 210. con que el quebrado producido ſerà $\frac{18}{210}$. Si ſe han de multiplicar quebrados compueſtos, ſe reducirán à ſimples por el Problema 6. cap. 2. y deſpues ſe hará la multiplicacion.

$\frac{2}{3}\ \frac{3}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{7}\quad \frac{18}{210}$

Demonſtracion.

El multiplicar quebrados es lo miſmo que reducir quebrado de quebrado á quebrado ſimple. (160) Y para explicar eſto, me valdrè de numeros contactos; porque con ellos ſe percibirà mejor el fin del multiplicar, el qual entendido, eſtarà clara la demonſtracion.

Supongo, pues, que valiendo la vara de cinta medio real, se toma solamente media vara: Con que se ha de multiplicar la cantidad media vara por el precio medio real: Pues valiendo toda la vara medio real, sin duda que la media vara valdrà la mitad de medio real; con que será quebrado de quebrado; esto es, $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$, que será $\frac{1}{4}$.

Asimismo, si la vara vale dos tercios de real, y se toman tres quartos de vara, se avrán de multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$; esto es, tomar $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{3}$. Luego lo mismo es multiplicar, que reducir quebrado de quebrado à quebrado simple. Y como esta reduccion estè demonstrada en el Problema 6. del cap. 2. estará tambien demonstrado el multiplicar. Porque entrambas operaciones se hacen del mismo modo, multiplicando los numeradores entre sì, para hacer el numerador; y multiplicando los denominadores, para hacer el denominador.

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR ENTERO POR QUEBRADO.

181 Reduzgase el entero à quebrado, poniendole debaxo una unidad, (160) y hagase la multiplicacion como antes: como si se han de multiplicar 4. por $\frac{2}{3}$, reducido el entero serà $\frac{4}{1}$; multipliquese, pues, por $\frac{2}{3}$, y serà el producto $\frac{8}{3}$.

$\frac{4}{1}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{8}{3}$

Lo mismo se harà sin reducir el entero à quebrado con solo multiplicar el entero por el numerador del quebrado; porque como la unidad, que sirve de denominador al entero, no aumenta la multiplicacion, lo mismo es que si no estuviera; y assi, basta multiplicar el entero por el numerador del quebrado.

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR POR ENTERO, Y QUEBRADO.

182 Reduzgase el entero al quebrado que le acompaña, (162) y hagase la multiplicacion como antes: (181) como si se han de multiplicar 6. por 2. y $\frac{3}{5}$; reducidos los 2. à los $\frac{3}{5}$ son $\frac{13}{5}$; aora multipliquese el entero 6. por el numerador 13. y serà el producto $\frac{78}{5}$, que son 15. y $\frac{3}{5}$.

Lo

183 Lo mismo se harà sin reduccion. Multipliquese el 2. por el 6. serà el producto 12. Multipliquese el 6. por el quebrado $\frac{3}{5}$, y el producto $\frac{18}{5}$ reduzgase à enteros, (164) y seràn 3. y tres quintos, sumense con los 12. y serà todo el producto 15. y $\frac{3}{5}$.

6
$2\ \frac{3}{5}$
———
12
$3\ \frac{3}{5}$
———
$15\ \frac{3}{5}$

PROBLEMA IV.

MULTIPLICAR ENTERO, Y QUEBRADO POR ENTERO, y quebrado.

184 Reduzganse los enteros à sus quebrados, (162) y hagase la multiplicacion. (180) Como para multiplicar 8. y tres quartos por 6. y dos tercios, reducidos son $\frac{35}{4}$, y $\frac{20}{3}$. Multipliquense aora, y saldrà el producto $\frac{700}{12}$, que son 58. y $\frac{4}{12}$.

185 De otro modo sin reduccion: Multipliquense los enteros, y al producto 48. añadanse los productos de cada entero por los quebrados en cruz: esto es, el producto de 8. por dos tercios, y de 6. por tres quartos, que son 5. y un tercio, y quatro, y dos quartos. Añadase tambien el producto de los mismos quebrados entre sì, que es $\frac{6}{12}$, ò un medio. Sumese todo, (171) y serà el producto total 58. y $\frac{8}{24}$, ò un tercio.

$8\ \frac{3}{4}$
$6\ \frac{2}{3}$
———
48
$5\ \frac{1}{3}$
$4\ \frac{2}{4}$
$\frac{1}{2}$
———
$58\ \frac{1}{3}$

Otro exemplo: Pedro compra 4. varas y dos quintos de paño à 2. libras, y cinco sextos la vara. Multiplicando 4. por 2. salen 8. despues multipliquese en cruz cada entero por el quebrado opuesto: esto es, el 4. por cinco sextos, y el 2. por dos quintos, salen los productos 3. y dos sextos, y quatro quintos, que se escriviràn en su lugar, como parece en el exemplo: à mas desto se multiplicaràn los quebrados dos quintos por cinco sextos, y el producto $\frac{10}{30}$ se escrivirà, como parece. Hecha la suma de todo, (171) serà el valor de las 4. varas, y dos tercios, las 12. libras, y abreviado $\frac{7}{15}$, que salen en la suma, que son (159) 9. sueldos y 4. dineros.

$4\ \frac{2}{5}$
$2\ \frac{5}{6}$
———
8
$3\ \frac{2}{6}$
$\frac{4}{5}$
$\frac{10}{30}$
———
$12\ \frac{420}{90}$

Obser-

Observaciones.

186 Para multiplicar un quebrado por entero que sea igual al denominador; como $\frac{3}{4}$ por 4. basta borrar el denominador, y dexar al numerador como entero; porque multiplicando tres quartos por 4. segun las reglas dadas, salen $\frac{12}{4}$; y para reducirlos à enteros se divide el numerador 12. por el denominador 4. (164), y saldràn 3. con que el producto de 3. por 4. que es 12. se parte por el denominador 4. que es igual al entero 4. por quien se multiplicò: Luego ha de venir al quociente el mismo numero multiplicador, que es el 3.

187 Quando el numerador de un quebrado es igual al denominador del otro, como $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, para multiplicarlos basta poner por quebrado el numerador, y denominador desiguales, assi $\frac{3}{5}$; porque como haciendo la operacion por las reglas dadas, se ha de multiplicar el 4. por el 3. y el 5. por el 4. se sigue, que el 4. multiplica al 3. y al 5. Luego los productos 12. y 20. son proporcionales (71) con los numeros 3. y 5. y assi el quebrado $\frac{12}{20}$, producido por las reglas ordinarias, será igual (137) al quebrado $\frac{3}{5}$, producido por esta regla.

188 Para doblar, tresdoblar, quatrodoblar, &c. un quebrado, multipliquese el numerador por 2. 3. 4. &c. como consta por lo que diximos arriba, (181) ò dividase el denominador por los mismos numeros, (quando se puede) como consta por el numero 148. Y assi para doblar este quebrado tres quartos, multiplico el numerador por 2. y saldrà seis quartos; ò divido el denominador por 2. y saldrà $\frac{3}{2}$, que todo es uno.

Escolio.

189 Tres cosas notables ocurren en el multiplicar quebrados, en que suelen reparar, y admirarse los principiantes. La primera: Multiplicando quebrados menores que la unidad, el producto siempre es menor que qualquiera de los quebrados que se multiplican: como multiplicando dos tercios por tres quartos, sale el producto $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$, que es menor que los dos tercios, y que los tres quartos. Lo qual parece contra toda razon; porque multiplicando ha de crecer el producto, supuesto que se aumenta el un numero de los multiplicandos tantas veces, como unidades tiene el otro.

La segunda: No sale el mismo producto multiplicando los quebrados, que multiplicando el valor dellos mismos: como si Pedro compra

dos

dos tercios de libra de fruta, por tres quartos de sueldo la libra: multiplicando, segun la regla de los quebrados, salen $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$. Multipliquemos aora segun el valor: Los dos tercios de libra de peso de 12. onzas son 8. onzas, y los tres quartos de sueldo son 9. dineros; (159) pues multiplicando 8. por 9. dineros son 72. dineros: con que multiplicando en forma de quebrado sale medio sueldo, que son 6. dineros; y multiplicando por el valor salen 72. dineros, que son 6. sueldos, lo qual parece contra toda razon.

La tercera: En el sumar, y restar quebrados se reducen primero à un comun denominador; y para multiplicarlos, y partirlos (como luego verèmos) no es necessaria esta reduccion.

190 Para inteligencia de la primera, y segunda dificultad, es preciso saber qual sea el intento, y fin del multiplicar; y para explicarlo *mejor* me valdrè del mismo exemplo. Digo, pues, que multiplicar dos tercios de libra de fruta por tres quartos de sueldo, es buscar quanto valen los dos tercios de libra, à razon de tres quartos de sueldo la libra; de suerte, que el precio tres quartos no es valor de cada tercio de libra sino del entero, que es la libra, que es lo mismo que buscar que valdrán *dos tercios* de libra, valiendo la libra tres quartos de sueldo: sin duda que valdrán menos que tres quartos; porque si toda la libra vale tres quartos, los dos tercios de libra valdrán menos; y por esso sale numero menor en el producto, y con esto queda satisfecha la primer duda.

Pero quando se multiplica el valor de los quebrados, como 8. onzas *por* 9. *dineros*, de ordinario se varìa la suposicion, porque el precio se toma de cada onza: esto es, se multiplican las 8. onzas à 9. dineros cada onza, y assi importan 72. dineros, ò 6. sueldos. Si el precio 9. dineros no se tomàra de la onza, sino de la libra, como se hace en los quebrados, fuera lo mismo que multiplicar quebrados; porque entonces, si la libra vale 9. dineros, los dos tercios de libra valdràn 6. dineros, que es medio sueldo, como antes.

De modo, que toda la dificultad consiste, en que se varìa la suposicion; porque multiplicando en forma de quebrado, el precio no es valor de la parte del quebrado, sino del todo, ò unidad; y multiplicando el valor de los quebrados, el precio se hace comunmente valor de cada unidad; y assi se aumenta tantas veces como ay unidades: Con que no puede salir lo mismo multiplicando dos tercios por tres quartos, que multiplicando 8. por 9. y lo mismo dirè de qualquier otro exemplo.

Verdad es, que si el producto del valor de los quebrados se compara con el producto del valor de los todos, serà lo mismo: Como el producto del valor de los quebrados es 72. los todos de cada quebrado se dividen

en

en 12. partes; porque la libra tiene 12. onzas, y el sueldo tiene tambien 12. dineros: pues si el 72. se compara con el producto de 12. por 12. que es 144. tambien serà mitad; como multiplicando dos tercios por tres quartos, sale una mitad.

Otro exemplo: Se han de multiplicar dos quartos de vara por quatro quintos de libra; siguiendo la regla de los quebrados salen $\frac{8}{10}$, que son dos quintos. Y multiplicando el valor de dos quartos de vara, que son 2. palmos, por el precio quatro quintos de sueldo, que son 16. sueldos, salen 32. sueldos, los quales comparados con el producto de 4. palmos, que tiene la vara, por 20. sueldos, que tiene la libra, el qual es 80. sueldos, tambien serán dos quintos; de suerte, que 32. sueldos, son dos quintos de 80. sueldos.

La razon desto es, porque se ha de comparar producto con producto; esto es, producto de las partes, con el producto de los todos; porque de este modo son homogeneos: pero no se compara bien el producto de las partes con el todo, porque son heterogeneos.

Por la difinicion del multiplicar, se explica de raiz lo sobredicho. Porque el multiplicar es buscar un numero que tenga la misma razon con uno de los multiplicantes, que el otro con la unidad; (57) ò que la unidad tenga la misma razon con uno de los multiplicantes, que el otro con el producto. Y assi, multiplicar dos tercios por tres quartos, es lo mismo que buscar un numero, que serà $\frac{1}{2}$, que tenga la misma razon con $\frac{3}{4}$, que $\frac{2}{3}$ con la unidad; ò que la unidad tenga la misma razon con $\frac{2}{3}$, como $\frac{3}{4}$ con $\frac{1}{2}$. Y assi, seràn proporcionales 1. $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$; pues como dos tercios son menos que la unidad, tambien medio ha de ser menos que tres quartos; y por esso, multiplicando quebrados sale numero menor.

Pero multiplicando enteros, como 8. por 9. seràn proporcionales 1. 8. 9. 72. donde como el 8. es mas que la unidad, porque es enteros tambien el 72. ha de ser mas que 9. y por esso sale mayor el producto. Verdad es, que si los quebrados fueren mayores que la unidad: esto es, que tengan el numerador mayor que el denominador, el quebrado producido serà tambien mayor que qualquiera de los multiplicantes. Pero si huviere un quebrado mayor que la unidad, y otro menor, entonces el producto serà algunas veces mayor, y otras menor.

La solucion de la tercera dificultad es facil; porque como el sumar, y restar ha de ser de partidas homogeneas; (42. y 4.) por esso los quebrados se reducen à un comun denominador, que es hacerlos homogeneos, ò de una misma especie; pero en el multiplicar, y partir no es preciso que sean homogeneos, (58. y 77.) y assi no es necessaria la reduccion.

CAPI-

CAPITULO SEXTO.

DEL PARTIR QUEBRADOS.

PROBLEMA I.

PARTIR QUEBRADO A QUEBRADO.

191 PARA partir quebrados es necessario tener grande cuydado en escrivirlos, de modo, que el quebrado dividendo estè á la izquierda, y el partidor à la derecha, respeto del que los escrive; pero no es preciso que el dividendo sea mayor que el divisor, porque puede ser menor. Multipliquese *el numerador* del quebrado dividendo por el denominador del divisor, y saldrà el nuevo numerador. Multipliquense el denominador del dividendo por el numerador del divisor, y saldrà el nuevo denominador.

Se han de partir quatro quintos à tres septimos; escrivanse como se vè en el exemplo, y multiplicando el numerador 4. del quebrado dividendo, por el denominador 7. del divisor, saldrá el nuevo numerador 28. Multiplicando el denominador 5. del dividendo por el numerador 3. del divisor, saldrá el nuevo denominador 15. con que el quociente serà $\frac{28}{15}$.

$$\frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \quad \frac{28}{15}$$

Otro exemplo: Para partir $\frac{1}{2}$ por $\frac{3}{5}$, multiplico 1. por 5. y tengo el numerador 5. Multiplico 2. por 3. y tengo el nuevo denominador 6. con que el quociente será $\frac{5}{6}$. Si se han de partir quebrados compuestos, reduzganse à simples por el Problema 6. y despues se partiràn.

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \quad \frac{5}{6}$$

Demonstracion.

Para entender la demonstracion del partir quebrados, es necessario saber el intento, y fin desta regla; que es buscar quantas veces entra, ò se contiene el quebrado divisor en el dividendo, el qual es el mismo intento que en el partir enteros. Y tantas veces como el dividendo contiene

tiene al divisor, otras tantas el quociente contiene à la unidad; y assi son porporcionales, el dividendo, divisor, quociente, y unidad; como consta en los enteros, que partiendo 12. por 4. salen 3. y la misma razon ay de 12. à 4. que de 3. à la unidad: luego si yo pruebo que la misma razon ay de quatro quintos á tres septimos, que de $\frac{28}{15}$ à la unidad, en el primer exemplo estarà clara la demonstracion de la regla. Assi lo pruebo.

El numerador 28. y el denominador 15. del quociente han sido producidos de la multiplicacion en cruz de los terminos del quebrado dividendo, por los del divisor: luego la misma razon tiene el dividendo $\frac{4}{5}$ al divisor $\frac{3}{7}$, que el 28. al 15. (144) pues la razon que tiene el 28. al 15. essa misma tiene el quebrado $\frac{28}{15}$ à la unidad: (134) luego como $\frac{4}{5}$ à $\frac{3}{7}$ assi $\frac{28}{15}$ à la unidad, que es tener la misma razon. Mas facilmente se entenderà esto por el Escolio que pondremos al fin del Capitulo.

PROBLEMA II.

PARTIR ENTERO POR QUEBRADO, O AL contrario.

192 REduzgase el entero à quebrado, poniendole una unidad debaxo, (160) y hagase la particion, como en el Problema antecedente. Como para dividir 8. à $\frac{3}{4}$, reduzgo el 8. á $\frac{8}{1}$; aora hago la division, multiplicando en cruz el 8. por el 4. y el 1. por el 3. sale el quociente $\frac{32}{3}$.

$\frac{8}{1} \times \frac{3}{4} \quad \frac{32}{3}$

Otro exemplo: Se han de partir cinco septimos por 6. reducido el entero serà $\frac{6}{1}$: aora dividanse los cinco septimos por 6. enteros, multiplicando el 5. por 1. y el 7. por 6. y saldrà el quociente. La demonstracion es la misma de antes.

$\frac{5}{7} \times \frac{6}{1} \quad \frac{5}{42}$

PROBLEMA III.

PARTIR ENTERO, Y QUEBRADO POR ENTERO SOLO, ò al contrario.

193 REduzgase el entero al quebrado que le acompaña, (162) y hagase la division como antes: como si se han de partir 10. y dos tercios por 8. reducidos los enteros son $\frac{32}{3}$, y $\frac{8}{1}$; hagase

gase la particion, multiplicando el 32. por 1. y el 3. por 8. vienen al quociente treinta y dos veinte y quatro avos. $\frac{32}{3} \times \frac{8}{1}$ $\frac{32}{24}$

Otro exemplo: Para partir 8. por 2. y $\frac{5}{6}$, reducidos los enteros son $\frac{8}{1}$, y $\frac{17}{6}$, hecha la particion sale el producto $\frac{48}{17}$.

PROBLEMA IV.

PARTIR ENTERO, Y QUEBRADO, POR entero, y quebrado.

194 Reduzganse los enteros à los quebrados que les acompañan, (162) y hagase la misma operacion: Como para partir 6. y dos tercios à 3. y medio, se reduciràn à $\frac{20}{3}$, y $\frac{7}{2}$; multiplicando despues 20. por 2. y 3. por 7. saldrà el quociente $\frac{40}{21}$. *La demonstracion de todos estos Problemas es la misma que la del primero.* $\frac{20}{3} \times \frac{7}{2}$ $\frac{40}{21}$

Observaciones.

195 Para partir un entero por quebrado no es menester reducir, sino que basta multiplicar el denominador por el entero, para hacer el nuevo numerador, y poner por denominador el numerador del quebrado: Como partiendo 5. por dos tercios, se multiplican los 5. por el denominador 3. y se pondrá el numerador 2. por denominador, assi $\frac{15}{2}$. *La razon es manifiesta; porque obrando como en el Problema 2. se avian de partir $\frac{5}{1}$ por $\frac{2}{3}$, multiplicando en cruz; pues como la unidad no aumenta la multiplicacion, basta multiplicar el 5. por 3. y poner el numerador 2. por denominador.*

196 Pero para partir un quebrado por numero entero, basta multiplicar el denominador del quebrado por el entero, y el producto es el denominador del quociente, cuyo numerador es el mismo del quebrado dividendo: Como para partir de dos quintos à 4. multipliquese el 4. por 5. y al 20. pongase el numerador 2. assi $\frac{2}{20}$. *La razon consta claramente por lo que se dixo en el Parrafo antecedente.*

197 Quando los terminos del quebrado dividendo se pueden partir enteramente por los del quebrado divisor, como dividiendo $\frac{16}{30}$ por $\frac{4}{5}$, estarà concluida la division en partir los terminos del dividendo por los del divisor: esto es, dividir 16. por 4. y 30. por 5. y sale el quociente $\frac{4}{6}$; *porque si el quebrado quociente se multiplica*

por

por el divisor, se buelve à restituír el dividendo, que es la prueba del partir.

198 Si los quebrados se reducen à un comun denominador, (154) dividiendo el numerador solo del quebrado dividendo por el numerador del divisor, sin hacer caso del comun denominador, se hallarà el quociente reducido à enteros: (quando los ay) Como si se han de partir $\frac{3}{4}$ á $\frac{1}{2}$, reducidos son $\frac{6}{8}$, $\frac{4}{8}$; partase 6. à 4. y vendràn al quociente 1. y dos quartos. Si se han de partir enteros, y quebrados, reduzganse primero los enteros á quebrados, y despues á un comun denominador. Hecho esto se obrarà del mismo modo. *La razon desto es, porque estando reducidos los quebrados à un comun denominador, los numeradores (en los quales consiste el quebrado) son partes de un mismo todo dividido: esto es, dicen orden á un numero dividido en partes; luego es lo mismo que si los numeradores fueran enteros, y asi la division serà del mismo modo que en los enteros.*

199 Quando los numeradores de los quebrados son iguales, como $\frac{4}{5}$ $\frac{4}{6}$ para partirlos basta poner el denominador del divisor $\frac{4}{6}$ por numerador del quociente; y el denominador del dividendo $\frac{4}{5}$ por denominador, asi $\frac{6}{5}$. *Porque como los dos numeradores son iguales, es lo mismo que si fuera un solo numero 4. el qual multiplicando al 5. y al 6. para partir produce 20. y 24. que tienen la misma razon que 5. à 6. (71) luego los quebrados $\frac{20}{24}$, y $\frac{5}{6}$ son iguales, (137) por ser los terminos proporcionales; luego basta hacer la operacion referida: porque partiendo como enseña la regla, (191) salen $\frac{20}{24}$, y obrando deste modo salen $\frac{5}{6}$.*

200 Quando los denominadores son iguales, ò estàn reducidos los quebrados á un comun denominador, para partirlos basta poner por numerador el denominador del quebrado dividendo, y por denominador el numerador del divisor; y asi, partiendo cinco septimos à dos septimos, será el producto cinco medios. *La razon es la misma.*

Para tomar la mitad, tercio, quarto, quinto, &c. de un quebrado, que es lo mismo que partirle por 2. 3. 4. 5. &c. se puede hacer de dos modos; el primero es partir el numerador del quebrado por. 2. 3. 4. 5. &c. quando se puede. (143) El segundo es multiplicar el denominador por los mismos numeros (147); con que para sacar el tercio de $\frac{6}{8}$, se partirá el 6. por 3. y quedaràn $\frac{2}{8}$; ò se multiplicarà el 8. por 3. y seràn $\frac{6}{24}$, que es lo mismo.

Es-

Escolio.

Aqui suelen tambien reparar los principiantes quando vèn que muchas veces sale el quociente mayor, que la cantidad que se parte; como partiendo $\frac{1}{2}$ à $\frac{1}{4}$, salen $\frac{4}{2}$, que son 2. enteros, lo qual parece contra toda razon; porque el quociente parece que ha de ser menor que el numero dividendo.

La satisfacion deste reparo yá queda insinuada en la demonstracion del primer Problema deste capitulo; porque el partir es buscar quantas veces entra el divisor en el numero dividendo: y un quebrado puede entrar, ò caber en otro muchas veces, como $\frac{1}{4}$ cabe dos veces en $\frac{1}{2}$; y assi no ay que maravillarse, si algunas veces viene al quociente quebrado mayor que el dividendo, y aun muchas veces enteros.

Siempre que el quebrado divisor fuere menor que el dividendo, serà el quociente mayor que la unidad; porque à lo menos el divisor cabe una vez en el dividendo. Quando el divisor fuere igual al dividendo, serà el quociente una unidad, porque cabe una vez justa. Pero quando el divisor fuere mayor que el dividendo, serà el quociente menor que la *unidad*; porque el divisor no cabe aun una vez en el dividendo.

Por regla general, siempre que el divisor fuere menor que la unidad, serà el quociente mayor que el dividendo; porque la misma razon tiene la unidad al quociente, que el divisor al dividendo, como se dixo arriba (191): Luego por la *prop. 16. lib. 5. de Euc.* la unidad al divisor tendrá la mesma razon, que el quociente al dividendo; pues como por la suposicion la unidad es mayor que el divisor: luego el quociente serà mayor que el dividendo; porque si no fuera assi, no guardaràn la misma razon.

Mas claramente se puede explicar esto con numeros contractos, y se verà, que en la substancia no ay diferencia del partir enteros, ò quebrados; porque (como queda advertido en los consectarios del partir enteros) quando se sabe todo el valor de lo que se merca, ò vende, (à lo que llamamos especie) y el numero de la dicha especie, partiendo se sabrà el valor de una especie. Pues lo mismo sucede en los quebrados. Y supongo que he comprado media vara de cinta, y me cuesta medio real; para saber quanto valdrá una vara, divido el precio $\frac{1}{2}$ por el numero de las especies, que es $\frac{1}{2}$ vara, y saldrà $\frac{2}{2}$, que es un real, lo qual es certissimo; porque si media vara cuesta medio real, toda la vara costará un real; con que sale mayor el quociente que la cantidad: De suerte, que el fin desta regla es, saber quanto vale un entero, al respeto que un quebrado del mismo entero vale un quebrado del precio del entero.

CAPITULO SEPTIMO.

DEL EXAMEN DE LA LOGISTICA de los quebrados.

201 LA prueba real del ſumar, reſtar, multiplicar, y partir quebrados, es la miſma que la de los enteros; porque el ſumar ſe examina por el reſtar: el reſtar, por el ſumar, &c. Como ſi ſe han de ſumar eſtos quebrados $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$, la ſuma es $\frac{5}{5}$; para hacer la prueba reſtenſe los 2. quintos de 5. quintos, y quedaràn $\frac{3}{5}$, que es otro quebrado.

Para hacer la prueba del reſtar, ſe ſumarà la paga con la reſta; como reſtando tres quartos de cinco ſextos, reducidos los quebrados ſon $\frac{18}{24}$, y $\frac{20}{24}$, y la reſta $\frac{2}{24}$; la qual, ſi ſe ſuma con la paga $\frac{18}{24}$, ſaldrá la deuda $\frac{20}{24}$.

El examen del multiplicar ſerà partir el producto por qualquiera de los quebrados multiplicantes, y ſaldrá el otro: Como ſi multiplicando dos tercios por dos quartos, ſaliò el producto $\frac{4}{12}$; partiendole por dos tercios, ſaldràn $\frac{12}{24}$, que es lo miſmo que dos quartos.

La prueba del partir ſerà multiplicar el quociente por el diviſor, y ha de ſalir el quebrado dividendo: Como ſi partiendo $\frac{2}{5}$ à $\frac{1}{2}$, ſale el quociente $\frac{4}{5}$; multiplicandole por $\frac{1}{2}$ ſaldràn $\frac{4}{10}$, que es lo miſmo que el dividendo dos quintos.

CAPITULO OCTAVO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los quebrados.

202 QUeſtion primera. Con què numero ſe han de ſumar 5. y un quarto, paraque la ſuma ſea 8. y cinco ſeptimos? Reſtenſe los 5. y un quarto de los 8. y cinco ſeptimos, y la reſta 3. y $\frac{13}{28}$ ſerà el numero que ſe pide.

Queſ-

203 Queſtion ſegunda. De què numero ſe reſtaràn dos tercios de cinco quartos, paraque queden $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{4}$? Reducidos los quebrados compueſtos à ſimples (165), ſeràn $\frac{10}{12}$, y $\frac{1}{8}$; ſumenſe, y la ſuma $\frac{92}{95}$ ſerá el quebrado buſcado.

204 Queſtion tercera. Eſte quebrado $\frac{2}{5}$ què parte es de $\frac{1}{2}$? Dividaſe $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{5}$, y ſaldràn cinco quartos, que es la parte que ſe buſca; y aſsi digo que los dos quintos ſon cinco quartos de $\frac{1}{2}$.

205 Queſtion quarta. Eſte quebrado tres quartos, de què numero es el tercio? Multipliqueſe el quebrado por 3. y ſaldràn nueve quartos, que es el numero que ſe buſca.

206 Queſtion quinta. Buſcanſe dos quebrados, con tal proporcion, que la mitad del uno ſea igual à los dos tercios del otro, y la ſuma de los dos ſea un entero juſto, que es una unidad. Multipliquenſe los quebrados $\frac{1}{2}$, y $\frac{2}{3}$, que ſeñalan las partes, en cruz, y ſaldràn los numeradores 3. y 4. de los quebrados que ſe buſcan, cuyo denominador es la ſuma 7. de los numeradores ſobredichos; y aſsi, los quebrados que ſe buſcan ſon tres ſeptimos, quatro ſeptimos, los quales ſumados ſon iguales à un entero; y la mitad $\frac{2}{7}$ de los $\frac{4}{7}$, es igual á los dos tercios $\frac{2}{7}$ de $\frac{3}{7}$.

207 Queſtion ſexta. Buſcanſe dos quebrados, que los tres quintos del uno ſean iguales à los dos tercios del otro, y ſumados hagan tanto como multiplicados. Multipliquenſe los quebrados en cruz, y ſaldrán 10. y 9. los quales ſerán denominadores, cuyos numeradores ſeràn la ſuma 19. de los miſmos, aſsi $\frac{19}{10}$ $\frac{19}{9}$. Pues tomando los $\frac{3}{5}$ del $\frac{19}{9}$, ſon $\frac{19}{15}$; y los dos tercios del $\frac{19}{10}$, ſon tambien $\frac{19}{15}$. Sumando, y multiplicando los $\frac{19}{10}$, y $\frac{19}{9}$, de entrambos modos ſalen $\frac{361}{90}$.

$$\begin{matrix} 9 & & 10 \\ \frac{3}{5} & \times & \frac{2}{3} \end{matrix}$$

Queſtion ſeptima. Pedro comprò en Valencia 39. libras y media de ſeda, limpia de taras, à 23. reales y dos quartos la libra, quantas libras valen? Eſcrivanſe los numeros, como ſe vè en la formula, y multipliquenſe las 36. libras por los 23. reales; deſpues multipliqueſe la media libra por los 23. reales, multiplicando el numerador 1. por 23. y partiendo el producto por el denominador 2. ſeràn once reales y medio, que ſe eſcriviràn, como parece en el exemplo. Multipliquenſe las 36. libras por los dos quartos, multiplicando el numerador 2.

36	$\frac{1}{2}$
23	$\frac{2}{4}$
108	
72	
11	$\frac{1}{2}$
18	
	$\frac{2}{8}$
857	$\frac{12}{16}$

por 36. y partiendo el producto por el denominador 4. ſerán 18. reales. Ultimamente, multipliquenſe los dos quartos por un $\frac{1}{2}$, y ſerà el producto dos ochavos. Sumeſe todo (171), y ſerán 857. y $\frac{12}{16}$, ò tres quartos.

Y porque el valor de la ſeda ſe ha de dár en libras de Valencia ſe partiràn los 857. reales por 10. que tiene cada libra, y ſerán 85. libras, y ſobran 7. reales, que ſon 14. ſueldos. Aora ſe ha de ſaber el valor del quebrado $\frac{12}{16}$ de real. (159) Multipliqueſe el numerador 12. por 24. dineros, que tiene el real, y el producto 288. dividaſe por el denominador 16. y ſerán 18. dineros, que es un ſueldo, y 6. dineros; añadaſe el un ſueldo á los 14. ſueldos de antes, y ſerà todo el valor 85. libras 15. ſueldos, y 6. dineros.

208 Queſtion octava. Un Mercader vendiò en Madrid 100. varas de tafetan à 9. reales, y tres quartillos de vellon cada vara; quantos reales de à ocho Mexicanos valdrán? Multipliquenſe las 100. varas por los 9. reales, y tres quartos, (182) y ſeràn 975. reales de vellon; y porque cada real de à ocho Mexicano al preſente vale 15. reales de vellon, dividaſe por 15. y ſerán 65. reales de à ocho.

$$\begin{array}{r}100\\9\ \frac{3}{4}\\\hline 900\\75\\\hline 975\end{array}$$

209 Queſtion nona. Un Mercader comprò en Caſtilla 1000. arrobas, y media de aceyte à 20. reales, y medio de vellon cada arroba, y deſpues las buelve à vender à 22. reales, y un quartillo: quanto gana? Multipliqueſe la cantidad por el primer precio, y ſerà el valor 20510. reales, y un quartillo. Multiplique otra vez la cantidad por el ſegundo precio, que es de la venda, y hallarà 22261. reales, y un ochavo. Reſte la una partida de la otra: eſto es, reſte lo que le coſtò la compra, de lo que vale la venda, y hallarà 1750. reales, y ſiete ochavos de ganancia. Advierto en eſtas dos queſtiones, que por quartillo no entiendo quarto de los que corren en Caſtilla, que vale 4. maravedis; ſino la quarta parte de un real.

$$\begin{array}{rl}1000 & \frac{1}{2}\\20 & \frac{1}{2}\\\hline 0000 & \\2000 & \\500 & \\10 & \\ & \frac{1}{4}\\\hline 20510 & \frac{1}{4}\end{array}$$

210 Queſtion decima. Pedro vendiò en Valencia 150. cahices, y medio de trigo, por 7. libras, y media el cahiz, y quiere que le paguen en reales de à ocho; quantos le han de dàr? Multipliquenſe

los

los 156. y medio por 7. y medio, (184) y seràn 1128. libras, y tres quartos de libra, que son 15. sueldos, ò 7. reales, y medio. (159) Aora reduzganse las libras à reales (76), y juntando los 7. y medio, seràn 11287. y medio. Partanse por 9. reales, y tres quartillos, (193) que al presente vale cada real de à ocho en Valencia, y hallarèmos 1157. reales de à ocho, y $\frac{9}{13}$.

Pero si quiere que le paguen en doblones, porque el doblon vale en Valencia 38. reales, y medio, partense los 11287. reales, y medio por 38. y medio, y saldràn 293. doblones, y $\frac{2}{11}$.

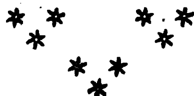
211 Question once. A tres quartos la libra de fruto, quantos maravedis valdrà una arroba en Madrid: Porque la arroba en Madrid tiene 25. libras, y cada quarto son 4. maravedis, y por consiguiente los 3. quartos son 12. maravedis: multipliquense las 25. libras por 12. y saldràn 300. maravedis. Si se han de hacer reales, partanse por 34. y seràn 8. reales, y 28. maravedis.

212 Question doce. Este quebrado $\frac{4}{8}$, quantos quintos son: Dividanse los quatro ochavos por un quinto, y vendràn $\frac{20}{8}$, que son 2. y medio; con que son dos quintos, y medio.

213 Question trece. Este quebrado $\frac{3}{4}$, de qual quebrado es $\frac{2}{7}$? Dividanse los tres quartos por dos septimos, y se hallarán $\frac{21}{8}$, por el quebrado que se busca.

214 Question catorce. Quales son los $\frac{2}{3}$ deste quebrado $\frac{5}{7}$? Saquese el tercio de cinco septimos, multiplicando el denominador por 3. y serán $\frac{5}{21}$; y porque son dos los tercios que se piden, multipliquese el numerador 5. por 2. y seràn $\frac{10}{21}$ los dos tercios de cinco septimos. Con que multiplicando los cinco septimos por los dos tercios (180), sale lo mismo. Y assi, para sacar partes de un quebrado, no ay mas que hacer, que multiplicarle por el quebrado que significa las partes; como para sacar tres septimos de una mitad, multiplicando los quebrados salen $\frac{3}{14}$, que son los tres septimos que se buscan.

215 Question quince. Còmo se hallarà un numero que tenga qualquiera partes señaladas, como mitad, tercio, quarto, &c.? Digo, que si se escriven los quebrados que significan las partes, como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y se multiplican los denominadores entre sì, el producto 24. tendrà mitad, tercio, y quarto, porque es producido de 2. 3. y 4. Luego se puede partir enteramente por los mismos numeros, que es tener mitad, tercio, y quarto.



PARTE III.

DE LA LOGISTICA DE LOS NUMEROS Denominados.

NUmeros denominados llaman comunmente à los que numeran aspecies diferentes; como libras, sueldos, dineros, reales, arrobas, &c. La logistica destos numeros es la mas dificil de todas, y por esto pide grande cuydado, y aplicacion.

CAPITULO PRIMERO.

DEL SUMAR NUMEROS DENOMINADOS.

LAs partidas que se huvieren de sumar han de ser homogeneas, ò de una especie, porque no se sumarán bien libras, sueldos, y dineros, con arrobas, libras, y onzas. No digo que las especies de cada partida sean homogeneas, sino unas partidas con otras.

Preceptos.

216 Primero: Escrivanse las especies cada una debaxo de su semejante, estando las unidades debaxo de unidades, decenas debaxo decenas, &c. de modo, que cada genero de especie forme una coluna separada de la otra. El orden de escrivirlas ha de ser este: que la especie mas alta, ò de mayor valor estè à la izquierda, y la mas baxa, ò menor à la derecha.

217 Segundo: Comiencese la operacion por la especie mas baxa, sumando las partidas; y en llegando à hacer el numero que constituye, ò iguala à la especie immediate mas alta, se harà un señal al lado,

lado, tantas vezes, quantas llegáre à la especie siguiente, escriviendo lo que sobráre debaxo. Despues se llevarán tantas unidades, como señales huviera, para juntarlas con la coluna de la especie siguiente, la qual se sumará del mismo modo. La suma de la ultima coluna, qualquiera que fuere, se harà como en los enteros. Esto necessita de practica.

Exemplo I.

Tengo de sumar arrobas, libras, y onzas, peso de Valencia. Comienzo por las onzas, diciendo: 10. y 9. son 19. onzas, donde ay una libra, y sobran 7. onzas, por esso hago un señal al lado del 9. sumo los siete que sobran con los 9. siguientes, y son 16. donde ay otra vez una libra, y por esso hago otro señal, y sobran 4. y 11. son 15. donde ay otra libra, y assi hago otro señal, y sobran 3. los quales escrivo debaxo la linea, por ser los ultimos.

Arrobas.	Libras.	Onzas.
16	10	10
3	24-	9-
124	26	9-
15	13-	11-
160	4	3

Passo à sumar las libras, llevando 3. por otros tantos señales que ay en la serie de las onzas. Pues 3. y 10. son 13. y 24. son 37. donde ay una arroba, que consta de 36. libras, y assi hago un señal al lado, y sobra una, el qual junto con 26. son 27. y 13. son 40. donde ay otra arroba, y sobran 4. libras, que escrivo debaxo la linea. Passo à la coluna de las arrobas, llevando 2. por otros tantos señales que ay en las libras, y las sumo del modo ordinario, como se vè en la formula.

Exemplo II.

Se han de sumar cahices, hanegas, quartales, y celemines de Aragon. Comienzo por los celemines, diciendo: 3. y 2. son 5. aqui ay un quartal, y assi hago un señal al lado, y sobra 1. y 3. son 4. que es otro quartal, y nada sobra, y 1. de abaxo es 1. escrivole debaxo la linea.

Cahiz.	Hane.	Quar.	Cele.
12	7-	2-	3
8	5	1	2-
10	6-	2-	3-
1	3	1	1
33	7	2	1

Passo à los quartales, llevando 2. y 2. son 4. aqui ay una hanega, y sobra 1. que con 1. son 2. y 2. son 4. aqui ay otra hanega, y sobra 1. y 1. son 2. escrivolas debaxo la linea.

Passo à las hanegas, llevando 2. por otros tantos señales que ay

en la coluna de los quartales, y 7. ſon 9. donde ay un cahiz, que ſon 8. hanegas, pongo un ſeñal, y ſobra 1. y 5. ſon 6. y 6. ſon 12. aqui ay otro cahiz, y ſobran 4. y 3. ſon 7. hanegas, eſcrivolas, y llevo 2. por otros tantos ſeñales, que hallo en las hanegas, para juntarlos con los cahices, los quales ſumarè por el modo ordinario.

Exemplo III.

Tengo de ſumar libras, ſueldos, y dineros, moneda de Valencia: Comienzo por los dineros, diciendo: 3. 0. y 10. ſon 13. donde ay un ſueldo, que ſon 12. dineros, pongo un ſeñal, y ſobra 1. y 11. ſon 12. pongo otro ſeñal, y nada ſobra, por eſſo eſcrivo un zero. Paſſo à los ſueldos, llevando 2. por otros tantos ſeñales que hallo en la coluna de los dineros, y 18. ſon 20. que es una libra juſta, pongo un ſeñal, y nada ſobra; 19. y 0. ſon 19. y 15. ſon 34. donde ſe contiene una libra, y ſobran 14. que eſcrivo debaxo la linea. Deſpues ſumo las libras del modo ordinario, llevando 3. por otros tantos ſeñales que hallo en los ſueldos.

Libras.	Sueldos.	Diner.
360	18-	3
10	19	0
840	0	10-
	15-	11-
1212	14	0

Eſta miſma ſuma, en quanto à los ſueldos, (los dineros, y libras ſe ſuman del miſmo modo) ſe ſuele hacer comunmente de otro modo mas facil. Supongo, pues, que eſtán ſumados los dineros, como antes, y que llevo 2. los quales juntandoles con los numeros 8. 9. 0. y 5. de la primer coluna de los ſueldos, ſon 24. eſcrivo el 4. y llevo 2. y 1. 1. y 1. de la ſegunda coluna de los ſueldos ſon 5. decenas de ſueldo, ò 50. ſueldos, que ſon 2. libras, y 10. ſueldos; pues eſcrivo 1. al lado del 4. por los 10. ſueldos, y llevo 2. libras, para juntarlas con las libras ſiguientes, como antes.

Para ſaber con facilidad quantas libras hacen las decenas de ſueldo, ſe guardarà eſta regla. Si el numero de las decenas es impar, como en el exemplo, que es 5. ſe quitarà 1. el qual ſe eſcrivirá debaxo la linea; y de lo que quedáre, que aqui es 4. ſe tomará la mitad, la qual ſerá el numero de las libras: ſi es par, ſe pondrá zero debaxo la linea, y tomando la mitad de las decenas, ſerá el numero de las libras que ſe han de llevar, para ſumarlas con la coluna de las libras.

Exemplo IV.

Otra vez ſe han de ſumar libras, ſueldos, y dineros. Sumando los dine-

dineros sobra zero, y llevo un sueldo, que con 5. 7. y 8. son 21. escrivo el uno, y llevo 2. y 1. 1. y 1. de la segunda coluna de los sueldos son 5. decenas, de las quales, porque hacen numero impar, quito uno que escrivo, y del residuo 4. tomo la mitad, que son dos libras que guardo para sumarlas con la coluna de las libras.

Libras.	Sueld.	Diner.
15	0	3
3	15	0
8	17	9
25	18	0
53	11	0

Exemplo V.

Supongo que se han de sumar reales de à ocho, sueldos, y dineros, moneda de Valencia; y aunque este genero de cuenta no està muy puesto en uso, pero porque sirve para entender otras de otros Reynos, me ha parecido conveniente el explicarla.

Hagase la suma, como en el exemplo antecedente, suponiendo, que los reales de à ocho son libras, y serà 23. reales de à ocho 16. sueldos, y 8. dineros. Y porque sumando los sueldos se llevaron 3. reales de à ocho, suponiendo que eran libras de à 20. sueldos, y en la verdad el real de à ocho al presente no vale 20. sueldos, sino 19. sueldos, y 6. dineros, de suerte que faltan 6. dineros, ò un quartillo para 20. sueldos; es claro, que en las tres libras que se llevaron avia tres quartillos mas, que son un sueldo, y 6. dineros; porque à cada real de à ocho le falta un quartillo para libra: Luego se han de añadir un sueldo, y 6. dineros; con que serà la verdadera suma 23. reales de à ocho 18. sueldos, y dos dineros.

4	19	5
12	18	9
3	19	2
1	19	4
23	16	8
	1	6
23	18	2

De otro modo se puede hacer la misma suma, aunque mas cansada. Sumense los dineros, y sueldos solamente, y serán 76. sueldos, y 8. dineros; reducidos à dineros (76) serán 920. dineros, los quales partidos à 234. dineros que tiene cada real de à ocho, saldrán 3. reales de à ocho, y sobran 218. dineros, que son 18. sueldos, y 2. dineros. (100) Pues sumense los 3. reales de à ocho con la coluna de los reales de à ocho, y se hallará la suma misma.

Exemplo VI.

Tengo de sumar escudos, reales, y maravedis de Castilla. Suman-

mando los maravedis, digo: 26. y 31. son 57. donde ay un real, que consta de 34. maravedis, y sobran 23. y 30. son 53. donde ay otro real, y sobran 19. maravedis, los quales escrivo debaxo la linea; y llevo dos reales, por otros tantos señales que hallo, y 10. son 12. donde ay un escudo, que son once reales, y sobra 1. y 9. son 10. y 10. son 20. aqui ay otro escudo, y sobran 9. reales, que escrivo; y llevo dos escudos, por otros tantos señales que ay al lado de la coluna de los reales, los quales ajunto con los escudos en la forma ordinaria, y sale la suma 64. escudos 9. reales, y 19. maravedis.

Escud.	Reales.	Marav.
38	10-	26
9	9	31-
15	10-	30-
64	9	19
	1	18
64	8	1

Esta suma no es la verdadera, porque los escudos no valen once reales justos, sino once reales, y 26. maravedis; y assi, se ha de corregir, restando dos veces 26. maravedis, que es lo mismo que un real, y 18. maravedis; porque en la coluna de los reales ay dos escudos, y en la operacion los dichos dos escudos se han contado por once reales justos cada uno, sin hacer caso de los 26. maravedis; con que la primer suma està aumentada en dos veces 26. maravedis, y por esso se han restado, para que quede la suma verdadera 64. escudos 8. reales, y un maravedis.

Exemplo VII.

Se han de sumar signos, grados, minutos, y segundos. Aunque podia hacer la operacion por la regla general, pero de este otro modo es mas facil. Comenzando por los segundos, ajuntando 4. 0. y 2. son 6. y porque no llegan à decena, escrivoles debaxo la linea, y nada guardo; despues sumando 5. 4. y 5. son 14. decenas de segundos, y porque cada minuto tiene 6. decenas, ò 60. segundos, las 14. decenas seràn dos minutos, y sobran dos decenas, que escrivo al lado del 6.

Signos.	Grad.	Min.	Segun.
10	26	38	54
9	13	58	40
11	29	0	52
32	9	38	26

Passo à la coluna de los minutos, llevando 2. y 8. 8. son 18. minutos, escrivo el 8. y llevo una decena, la qual con 3. y 5. son 9. decenas de minuto; y porque cada grado tiene 6. decenas, ò 60. minutos, las 9. decenas serà un grado, y sobran 3. decenas de minuto, que escrivo debaxo la linea.

Su-

Sumando el un grado que llevava con 6. 3. y 9. hacen 19. grados. escrivo los 9. y guardo 1. y 2. 1. y 2. son 6. decenas de grados; y porque cada signo tiene 30. grados, seràn las 6. decenas 2. signos justos; por esso nada escrivo, y llevo 2. para juntarlos con los signos del modo ordinario; y assi serà toda la suma 32. signos 9. grados 38. minutos, y 26. segundos.

Aqui es menester advertir, que en las cuentas Astronomicas jamàs se nombran, ò numeran mas que 11. signos, porque la Ecliptica se divide en 12. signos; y assi lo mas que se numeran son 11. signos, grados, minutos, &c. porque quando llega la suma à 12. signos, se dice que es un circulo ò zero signos; quando passa de los 12. signos, se restan de la suma tantas veces como se pueden; con que como en nuestra suma son 32. signos, se han de restar della los 12. signos tantas veces, quantas se pueda, y quedarà la suma en terminos Astronomicos propios 8. signos 9. grados 38. minutos, y 26. segundos.

Demonstracion.

La demonstracion del sumar numeros denominados consta claramente del mismo modo de obrar; porque cada coluna se suma como en el modo, ordinario de sumar enteros; à mas desto, se guardan tantas unidades para juntarlas con la especie mayor siguiente, quantas veces la especie menor iguala, ò cumple à la mayor; porque las dichas unidades ya no son de la especie menor, sino de la mayor siguiente.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL RESTAR NUMEROS DENOMINADOS.

PAra restar numeros de diferentes especies, la deuda, y paga han de ser homogeneas, como queda advertido en el restar enteros; la resta tambien sale homogenea con la paga, y deuda.

Preceptos.

217 Primero: Escrivase el numero menor debaxo del mayor, como se dixo en el restar enteros, de suerte, que unas especies correspondan à otras, y tirese una linea por debaxo.

Segun-

218 Segundo: Comenzando la operacion de la especie menor, à mas baxa, restese el numero inferior del superior; y si no se puede hacer la resta, por ser el numero de arriba menor, tomese la diferencia del numero inferior à la especie mayor siguiente; la qual diferencia, sumada con el numero superior, se escrivirá debaxo la linea, llevando 1. para juntarlo con el numero inferior de la especie immediate siguiente.

Exemplo I.

Se han de restar marcos, onzas, adarmes, y granos, peso Valenciano. Resto 34. granos de 31. y porque no puedo, digo: de 34. hasta 36. granos, que es el adarme, ván 2. y 31. son 33. escrivoles, y llevo 1. para juntarlo con el 10. de los adarmes, y serán 11. resto aora 11. adarmes de 8. y porque no puedo, digo: de 11. hasta 16. adarmes que tiene la onza van 5. y 8. de arriba son 13. escrivoles, y llevo 1. para juntarle con el 6. de las onzas, y serán 7. resto 7. onzas de 7. de arriba, queda zero, y nada llevo; resto ultimamente 3. marcos de 8. y quedan 5. que escrivo debaxo la linea; con que restan 5. marcos ninguna onza 13. adarmes, y 33. granos. Deste modo suelen pesar el oro los Plateros.

Marc.	Onzas.	Adar.	Gran.
8	7	8	31
3	6	10	34
5	0	13	33

Exemplo II.

Tengo de restar canas, palmos, y quartos, medida de Cataluña. Resto un quarto de dos, y queda uno que escrivo debaxo la linea. Resto 7. palmos de 6. y porque no puedo, digo: de 7. palmos hasta 8. que tiene la cana, vá 1. y 6. de arriba son 7. escrivoles, y llevo 1. para juntarle con las 3. canas, y son 4. Resto aora 4. de 4. queda zero, y està concluìda la resta.

Canas.	Palmos.	Quartos.
4	6	2
3	7	1
0	7	1

Exemplo III.

Tengo de restar libras, sueldos, y dineros, moneda de Valencia, ò Aragon. Resto 9. de 3. dineros, y porque no puedo, digo: de 9. dineros hasta 12. que tiene el sueldo ván 3. y 3. de arriba son 6. escrivoles; y llevo 1. para sumarle

Libras.	Sueldos.	Dineros.
36	18	3
15	8	9
21	9	6

con los 8. ſueldos, y ſeràn 9. reſtados de 18. quedan 9. Reſto ultimamente 15. de 36. y quedan 21.

Exemplo IV.

Otra vez ſe ha de reſtar la miſma moneda. Quito 8. dineros de 6. y porque no puedo, digo: de 8. à 12. vàn 4. y 6. de arriba ſon 10. eſcrivoles debaxo la linea, y llevo 1. para juntarlo con los 16. ſueldos, y ſon 17. reſtoles de 12. y porque no puedo, digo: de 17. haſta 20. ſueldos que tiene la libra ván 3. y 12. de arriba ſon 15. eſcrivoles, y llevo 1. para ſumarle con las 3. libras, y ſon 4. reſtadas de 10. quedan 6. que eſcrivo, y eſtà concluida la reſta. Podia reſtar los ſueldos de otro modo, diciendo: 1. que llevo, y 6. ſon 7. reſtados de 2. no puedo; pues digo: de 7. haſta 10. vàn 3. y 2. de arriba ſon 5. eſcrivoles, y llevo 1. el qual junto con el 1. del 16. ſon 2. decenas; reſtados del 1. del 12. no puedo; pues digo: de 2. haſta 2. decenas vá nada, y 1. de arriba es 1. que eſcrivo, y llevo 1.

Libras.	Sueldos.	Diner.
10	12	6
3	16	8
6	15	10

Exemplo V.

Se han de reſtar ſignos, grados, minutos, y ſegundos. Aunque puedo obrar del miſmo modo, pero de eſte otro ſerà mas facil. Reſto 0. de 4. y quedan 4. Reſto 5. decenas de 3. y porque no puedo, digo: de 5. haſta 6. decenas de ſegundos vá 1. y 3. de arriba ſon 4. eſcrivolas, y llevo 1. el qual junto con el 4. de los minutos, y ſon 5. reſtolos de 2. y porque no puedo, digo: de 5. haſta 10. van 5. y 2. de arriba ſon 7. eſcrivoles, y llevo 1. el qual ſumo con el 3. de abaxo, y ſon 4. reſto 4. decenas de minutos de 5. y reſta 1. que eſcrivo. Paſſo à los grados, diciendo: quien deve 5. y pagò 0. queda à dever 5. deſpues, quien deve 1. decena de grados, y paga 2. no puede, pues de 2. decenas, haſta 3. decenas de grados, que hacen un ſigno vá 1. y 1. de arriba ſon 2. que eſcrivo debaxo las decenas de grados, y llevo 1. ſigno, para juntarle con los 2. de abaxo, y ſon 3. reſtados de 3. de arriba queda zero.

Sign.	Grad.	Minut.	Segund.
3	15	52	34
2	20	34	50
0	25	17	44

Exem-

Exemplo VI.

Para reſtar dias, horas, minutos, y ſegundos, ſegun el computo Aſtronomico, es meneſter advertir, que los Aſtronomos no uſan del modo de contar civil de las horas haſta 12. y de alli haſta otras 12. ſino que cuentan ſeguidamente haſta la 24. Eſto ſupueſto, comienzo la operacion por los ſegundos, diciendo: Quien de 5. quita 3. le quedan 2. eſcrivolos. Quien de ninguna decena de ſegundo quita 4. no puede, pues de 4. decenas haſta 6. ván 2. eſcrivolas, y paſſo á los minutos, llevando 1. el qual con el zero es 1. reſtado de 8. quedan 7. y nada guardo; eſcrivo el 7. y al lado pongo las 3. decenas de minuto, porque debaxo no tienen guariſmo alguno.

Dias.	Horas.	Minut.	Segun
12	19	38	5
6	23	0	43
5	20	37	22

Aora las horas ſe han de reſtar por entero. Reſto, pues, 23. horas de 19. y porque no puedo, digo: de 23. haſta 24. que es el dia, vá 1. y 19. de arriba ſon 20. eſcrivo el 20. y llevo un dia, el qual con el 6. de abaxo hace 7. reſto, pues, 7. de 12. y quedan 5. dias.

Demonſtracion.

Toda la dificultad conſiſte en demonſtrar la regla, quando el numero inferior es mayor que el ſuperior; porque quando es menor por sì miſma es manifieſta. Pero quien huviere percibido bien la demonſtracion del reſtar enteros, no le ſerá dificultoſo aplicarla á los numeros denominadores, porque es caſi la miſma, y aſsi no la repito.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR NUMEROS denominados.

ESta regla es la mas dificil de toda la Logiſtica, y aſsi pondrè todo cuydado en explicarla, reduciendola à Problemas, y cada uno reſolviendole por diferentes modos, paraque el eſtudioſo pueda elegir el que le pareciere mas proporcionado à ſu guſto. Es tambien conveni-

niente saber diferentes modos de obrar; porque á mas de tener eleccion, sucede aqui muchas veces, que un mismo genero de cuenta, con unas circunstancias, se puede formar facilmente por un modo, y con otras no; sino que es preciso, para facilitar la operacion, recurrir á otro modo mas proporcionado.

PROBLEMA I.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRA.

220 ESte Problema no encierra otra dificultad, mas que el multiplicar enteros: Como si Pedro comprò 30. libras de manzanas á 6. dineros la libra, multiplicando 30. por 6. salen 180. dineros, que son 15. sueldos. Otro exemplo: Un Mercader vendiò 361. varas de lienzo por 164. maravedis cada vara, para saber quanto valen todas, multipliquense las 361. vara por los 164. maravedis, y se hallarán 59204. maravedis, que son 1741. reales de vellon, y 10. maravedis. La demonstracion es la misma que la de multiplicar enteros.

PROBLEMA II.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRA ESPECIE, y quebrado.

221 ESte Problema es el mismo que multiplicar entero por entero, y quebrado. (182) Pedro comprò 10. cavallos á 25. libras, y dos tercios cada uno; para saber lo que valen multiplique 10. por 25. y dos tercios, y hallará 256. libras y dos tercios. Otro exemplo: Pedro comprò 250. libra de seda à 24. reales y tres quartos la libra (supongo que está quitada la tara.) Multiplique 250. por 24. y tres quartos (182), y hallará 6187. reales y medio. La demonstracion está dada en el multiplicar entero por entero, y quebrado.

PROBLEMA III.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR DOS ESPECIES.

Precepto.

222 MUltipliquese la especie mas alta del multiplicador por la cantidad (220), y de dicha cantidad saquese

al

la parte, ò partes, que la especie menor del multiplicador fuere, respeto de la mayor, ò mas alta, y sumandolas con el producto antecedente, será todo el valor que se busca.

Exemplo I.

Para saber 30. cahices de trigo à 5. libras, y 10. sueldos, moneda de Aragon, quanto valen; multiplico 30. por 5. y salen 150. libras: Y porque los 10. sueldos es mitad de la libra, saco la mitad de la cantidad 30. la qual es 15. libras, porque la cantidad supone aora por libras, y añadiendolas á las 150. libras, será todo el valor de los 30. cahices 165. libras.

30
5 lib. 10. suel.
150 lib.
15 lib.
165 lib.

Demonstracion.

La razon de esto es clara; porque si cada cahiz valiera 5. libras justas, seria todo el valor 150. libras; y si cada cahiz valiera 6. libras: esto es, una libra mas, creceria el primer valor 30. libras, y asi seria 180. libras; porque multiplicar los 30. cahices por 5. libras, es tomarlos cinco veces; y multiplicarlos por 6. es tomarlos seis veces. (57) Luego como en 6. ay una libra mas que en 5. avrà 30. libras mas en el valor segundo, que en el primero. Pues como en el exemplo propuesto el precio de cada cahiz es 5. libras 10. sueldos, y los 10. sueldos es mitad de la libra, crecerá el valor correspondiente à las 5. libras (que son 150. libras) la mitad de 30. libras, que son 15. Esto es, si en el precio se añadiera una libra mas, creceria el valor total 30. libras. Luego si se añade media libra, crecerá la mitad de 30. que son 15. libras.

De otro modo.

123 Multipliquense los 10. sueldos por los 30. cahices, y seràn 300. sueldos; despues multipliquense los 30. cahices por 5. libras, y seràn 150. libras; conviertanse los 300. sueldos en libras, y serán 15. las quales añadidas á las 150. libras, haràn el valor total de 165. libras.

30 cahices
5 lib. 10. suel.
150 lib. 300. suel.
15 lib.
165 lib.

De otro modo.

124 Debaxo los sueldos escrivase el numero 20. que son los sueldos

dos que hacen una libra, y serà el quebrado $\frac{10}{20}$ de libra, al qual se reduciràn las 5. libras, (72) y serà el quebrado $\frac{110}{20}$ de libra; multipliquese por 30. (181) y serà el producto $\frac{3300}{20}$, cuyo valor (159) es 165. libras.

30 cahices.
5 lib. $\frac{10}{20}$ sueld.

De otro modo.

225 Reduzganse las 5. libras y 10. sueldos à sueldos, (76) y seràn 110. sueldos; multipliquense los 30. cahices por 110. sueldos, y seràn 3300. sueldos; reduzgase à libras, (100) y seràn 165. libras.

Exemplo II.

Quiero saber quanto valdràn 10. varas de paño à 3. libras y 5. sueldos la vara. Multiplico las 10. varas por 3. libras, y son 30. libras. Aora porque los 5. sueldos son la quarta parte de la libra, saco el quarto de 10. que es lo mismo que partir 10. à 4. y salen 2. libras y 10. sueldos; escrivolas debaxo de las 30. libras, y hecha la suma, hallo, que las 10. varas valen 32. libras y 10. sueldos. La razon es la misma; porque como à mas de las 3. libras ay 5. sueldos, que es la quarta parte de una libra, tambien à mas de las 30. libras, que es el producto de 10. por 3. ha de aver una quarta parte de la cantidad, que representa libras.

10 varas.
3 lib. 5 sueld.

30 lib.
2 lib. 10 sueld.

32 lib. 10 sueld.

De otro modo.

Multipliquense los 5. sueldos por las 10. varas, y seràn 50. sueldos, que son 2. libras y 10. sueldos, las quales se añadiràn al producto de 10. por 3. libras, y seràn 32. libras y 10. sueldos.

De otro modo.

Debaxo los sueldos ponganse 20. y serà el quebrado $\frac{5}{20}$. Multipliquense, pues, las 10. varas por 3. y $\frac{5}{20}$, (181) y seràn $\frac{650}{20}$, que hacen 32. libras y 10. sueldos.

10 varas.
3 lib. 5 sueld.

De otro modo.

Reduzganse las 3. libras y 5. sueldos à sueldos, y seràn 65. sueldos, multipliquense por las 10. varas, y el producto 650. sueldos, reducido à libras, serà 32. libras y 10. sueldos.

Exemplo III.

Un Mercader compra 1240. quintales de azucar à 12. libras y 15. sueldos el quintal; para saber lo que valen, multipliqueles por las 12. libras; despues, para no fatigarse la cabeza, ni exponerse à errar, tire una linea perpendicular por el lado izquierdo de la formada, y porque los 15. sueldos no son parte aliquota de la libra, sino aliquanta, dividales en partes aliquotas, las menos que pueda, y mas proporcionadas: esto es, dividales en 10. y en 5. escriviendoles al lado de la linea perpendicular, como parece en la formula.

	1240 quintales.
	12 lib. 15. sueld.
	2480
	1240
10	620
5	310
	15810 lib.

Esto supuesto, porque 10. sueldos son media libra, saque la mitad de 1240. escriviendola en derecho de los 10. sueldos del lado, y será 620. libras; y porque los 5. sueldos son mitad de los 10. saque mitad de la mitad 620. Escriviendola tambien en derecho de los 5. sueldos, poniendo las unidades debaxo unidades, decenas debaxo decenas, &c. y será 10. libras. Sumelo todo, y hallará el valor de 15810. libras. La razon de este modo de obrar, supuesto la doctrina antecedente, por sì misma es manifiesta.

De otro modo.

Multipliquense los 1240. quintales por los 15. sueldos, y serán 18600. sueldos, que hacen 930. libras, añadanse al producto de 1240. por las 12. libras, y serà todo el valor las mismas 15810. libras.

De otro modo.

Debaxo los sueldos pongase el numero 20. y será el quebrado $\frac{15}{20}$. Multipliquese aora los 1240. quintales por 12. libras y $\frac{15}{20}$, ò $\frac{3}{4}$, que todo es uno, y se hallará la misma suma del valor.

1240 quintales.
12 lib. $\frac{15}{20}$ sueld.

De otro modo.

Reducidas las libras à sueldos serán 255. sueldos, por los quales se multiplicará la cantidad, y saldrán 316200. sueldos, los quales convertidos en libras, darán el mismo valor.

Exem-

Exemplo IV.

Un Platero compra 7. onzas de oro à 14. libras y 19. ſueldos la onza, pregunta quanto valdrá. Mutiplico las 7. onzas por 14. libras; y porque los 19. ſueldos no ſon parte aliquota de la libra, les divido en aliquotas 10. 5. y 4. eſcriviendolas al lado, como parece en la formula; y porque los 10. ſueldos ſon mitad de la libra, ſaco mitad de la cantidad, que es 3. libras y 10. ſueldos, y la eſcrivo enfrente de los 10. ſueldos del lado. Deſpues, porque 5. ſueldos ſon mitad de 10. ſaco mitad de la mitad 3. libras y 10. ſueldos, y ſerá una libra y 15. ſueldos. Finalmente, porque los 4. ſueldos ſon la quinta parte de la libra, ſaco quinto de la cantidad 7. que es dividirla por 5. y hallo una libra y 8. ſueldos. Sumandolo todo, hallarè 104. libras y 13. ſueldos, por el valor deſeado.

	7 onzas.
	14 lib. 19 ſuel.
	28
	7
10	3 lib. 10 ſuel.
5	1 lib. 15 ſuel.
4	1 lib. 8 ſuel.
	104 lib. 13 ſuel.

Los otros modos de formar la miſma cuenta no tienen eſpecial dificultad, y aſsi los omito por no ſer moleſto.

Exemplo V.

Pedro vendiò 10. varas de lienzo à 6. ſueldos y 6. dineros la vara, para ſaber quanto valen, multiplico 10. por 6. ſueldos, y hallo 60. ſueldos. Y porque 6. dineros ſon la mitad de un ſueldo, ſaco la mitad de 10. y ſerán 5. ſueldos, que eſcrivo debaxo los 60. y hecha la ſuma ſerán 65. ſueldos, ò 3. libras y 5. ſueldos.

10 varas.
6 ſuel. y 6. din.
60 ſuel.
5 ſuel.
65 ſuel.

La razon es la miſma que la del primer exemplo; porque ſi el precio fueran 6. ſueldos juſtos, ſeria el valor 60. ſueldos, y ſi fueran 7. ſueldos, ſeria el valor 10. ſueldos mas: eſto es, 70. ſueldos. Luego ſi el precio es 6. ſueldos y medio, ſerá el valor 60. ſueldos, y mas la mitad de 10. que es 5. ſueldos.

De otro modo.

Deſpues de multiplicada la cantidad 10. varas por los 6. ſueldos, multipliqueſe la miſma por 6. dineros, y ſerán 60. dineros, ò 5. ſueldos, añadenſe al producto de 10. por 6. ſueldos; y ſerá todo el valor 65. ſueldos.

De otro modo.

Debaxo de los 6. dineros ponganse 12. que son los dineros que hacen un sueldo, y será el precio 6. sueldos y $\frac{6}{12}$, ò $\frac{1}{2}$. Multipliquese aora la cantidad 10. varas por 6. sueldos y medio, (182) y serán los mismos 65. sueldos.

De otro modo.

Reducido el precio à la menor especie serán 78. dineros, los quales multiplicados por 10. serán 780. dineros, los quales reducidos à sueldos serán 65. sueldos.

Exemplo VI.

Supongo que las mismas 10. varas de lienzo se vendieron à 6. sueldos y 8. dineros; para saber quanto valen, despues de multiplicadas por los 6. sueldos, tiro una linea perpendicular al lado, y porque los 8. dineros no son parte aliquota del sueldo, dividoles en aliquotas 6. y 2. que escrivo al lado; y porque 6. dineros son la mitad del sueldo, saco la mitad de la cantidad, que serà 5. sueldos, y la escrivo enfrente de los 6. dineros; y porque los 2. dineros del lado son el tercio de 6. saco la tercera parte de lo que le corresponde al 6. que son 5. sueldos, y será un sueldo y 8. dineros, que tambien escrivo; hecha la suma hallo el valor de 66. sueldos y 8. dineros.

10 varas.
6 suel. y 8 din.

	60
6	5
2	1 sueldo 8 din.
	66 sueldos 8 din.

Podia dividir tambien los 8. dineros en 4. y 4. y porque el 4. es tercio de un sueldo, sacar la tercera parte de la cantidad, y ponerla dos veces, por razon de los dos quartos, y seria lo mismo. Los otros modos omito, por no tener especial dificultad.

Exemplo VII.

Un aposento rectangulo: esto es, cuyas paredes están à esquadra, se ha de pavimentar de azulejos ordinarios; tiene de ancho 5. varas, y de largo 8. varas y tres palmos: quantos azulejos entrarán? Multiplico las 5. varas por 8. y 3. palmos, assi: Multiplico 8. por 5. y son 40. y porque los

5 varas
8 var. y 3 palm.

	40
2	2 var. 2 palm.
1	1 var. 1 palm.
	43 var. 3 palm.

los 3. palmos no son parte aliquota de la vara, dividoles en aliquotas 2. y 1 escriviendolas al lado; pues porque 2. palmos es la mitad de la vara, saco la mitad de 5. varas, que seràn 2. varas y 2. palmos; y por que un palmo es mitad de 2. palmos, saco la mitad de lo que corresponde à los 2. palmos: esto es, de 2. varas y 2. palmos, y será una vara y un palmo; hago la suma, y hallo que tiene 43. varas quadradas y 3. palmos, las quales reducidas á palmos serán 175 palmos quadrados; y porque en cada uno caben 4. azulejos ordinarios, multiplico los 175. palmos por 4. y hallarè 700. azulejos. Dexo los otros modos, por no tener dificultad.

PROBLEMA IV.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRAS DOS, y quebrado.

Precepto.

225 MUltiplicada la cantidad por las dos especies, como se hizo en el Problema antecedente, multipliquese otra vez la cantidad por el quebrado, (181) y saldrà un quebrado, respecto de la especie menor, el qual reducido à enteros (159) se añadiràn al primer, ò primeros productos; despues sumado todo, serà el valor que se busca.

Exemplo I.

Un Mercader vende 8. arrobas de azucar à 2. libras 16. sueldos y dos quintos de sueldo la arroba; para saber quanto valdràn multiplico las 8. arrobas por las 2. libras, y salen 16. libras. Y porque los 16. sueldos no son parte aliquota de la libra, resuelvolos en aliquotas 4. 4. 4. 4. las quales escrivo al lado; pues porque los 4. sueldos son el quinto de la libra, saco quinto de la cantidad 8. y serà una libra y 12. sueldos; porque el quinto de 8. 1. y sobran 3. libras, que son 60. sueldos, cuyo quinto son 12. sueldos. Y porque ay quatro quatros, escrivo quatro veces el dicho quinto, como se vé en la formula.

	8 arrobas.
	2 lib. 16 suel. y $\frac{2}{5}$
	16 lib.
4	1 lib. 12 suel.
4	1 lib. 12 suel.
4	1 lib. 12 suel.
4	1 lib. 12 suel.
	3 suel. $\frac{1}{5}$
	22 lib. 11 suel. $\frac{1}{5}$

Hecho esto, multiplico las 8. arrobas por el quebrado $\frac{2}{5}$, y despues busco el valor del producto, lo qual se harà deste modo: Multiplico las 8. arrobas por el numerador 2. y dividiendo el producto 16. por el denominador 5. saldràn 3. enteros, y $\frac{1}{5}$: y porque el quebrado es de sueldo, los 3. enteros seràn sueldos, los quales escrivo, como parece; sumo todos los productos, y hallo el valor 22. libras 11. sueldos 1. $\frac{1}{5}$.

Este Problema està yà demonstrado en los antecedentes; porque el multiplicar una especie por otras dos, queda probado en el Problema antecedente. El multiplicar una especie por quebrado, consta por el multiplicar entero por quebrado: (182) luego como este Problema solo contenga el multiplicar una especie por otras dos, y à mas desto, quebrado, estará todo demonstrado.

De otro modo.

Multipliquense las 8. arrobas por todas las especies del multiplicador, y seràn 16. libras 128. sueldos y $\frac{16}{5}$. Reduzganse los $\frac{16}{5}$ à sueldos, y los sueldos à libras, y serán 22. libras 11. sueldos y $\frac{1}{5}$.

8 arrobas.			
2 lib.	16 sueld.	$\frac{2}{5}$	
16 lib.	128 suel.	$\frac{16}{5}$	
22 lib.	11 sueld.	$\frac{1}{5}$	

De otro modo.

Debaxo de los 16. sueldos pongase el denominador 20. y será el quebrado $\frac{16}{20}$. Esto supuesto, reduzganse las 2. libras á $\frac{16}{20}$, (162) multiplicandolas por el denominador 20., y al producto 40. añadiendo el numerador 16. serà el quebrado reducido $\frac{56}{20}$. El quebrado $\frac{2}{5}$ es quebrado de parte de $\frac{16}{20}$; pues incorporese en èl, (168) multiplicando los denominadores 20. por 5. y serà el nuevo denominador 100. Para hallar el nuevo numerador se multiplicarà el numerador 56. por el denominador 5. y al producto 280. se añadirà el numerador 2. y será el quebrado incorporado $\frac{282}{100}$ de libra.

8 arrobas.		
2 lib. $\frac{16}{20}$	sueld.	$\frac{2}{5}$

Multipliquese aora la cantidad 8. por $\frac{282}{100}$ (181), multiplicando el 8. por el numerador 282. y saldrá el quebrado $\frac{2256}{100}$, cuyo valor (159) es 22. libras 11. sueldos y $\frac{1}{5}$.

De otro modo.

Reducidas las 2. libras y 16. sueldos á sueldos, serán 56. sueldos los

los quales ſe reducirán á dos quintos, y ſerán $\frac{282}{5}$ de ſueldo. (162) Multipliqueſe aora la cantidad 8. arrobas por $\frac{282}{5}$ de ſueldo, (181) y ſerà el producto $\frac{2256}{5}$ de ſueldo, cuyo valor es 451. ſueldos y un quinto, que ſon 22. libras 11. ſueldos y un quinto.

Exemplo II.

Pedro compra 4. onzas de canela à 3. ſueldos 8. dineros y dos tercios de dinero; para ſaber quanto valen, multipliquenſe las 4. onzas por los 3. ſueldos, y ſeràn 12. ſueldos. Aora, porque los 8. dineros no ſon parte aliquota del ſueldo, dividanſe en aliquotas 4. 4. las quales ſe eſcriviràn al lado; y porque 4. dineros ſon el tercio de un ſueldo, ſaqueſe el tercio de la cantidad 4. y ſerà 1. ſueldo y 4. dineros, porque la cantidad ſupone aora por ſueldos; eſcrivaſe otra vez el dicho tercio, porque ay otro 4.

	4	onzas.		
	3	ſuel.	8 din.	$\frac{2}{3}$
	12			
4	1	ſuel.	4 din.	
4	1	ſuel.	4 din.	
			2 din.	$\frac{2}{3}$
	14	ſuel.	10 din.	$\frac{2}{3}$

Multipliqueſe la cantidad por dos tercios de dinero, y ſeràn ocho tercios, ò 2. dineros y $\frac{2}{3}$. Sumeſe todo, y ſaldrà el valor 14. ſueldos 10. dineros y $\frac{2}{3}$ de dinero. Los otros modos no tienen eſpecial dificultad.

Exemplo III.

Pedro comprò 6. varas de terciopelo à 4. libras 17. ſueldos dos quintos de ſueldo y mitad de quinto de ſueldo la vara; para ſaber quanto valen, multiplico las 6. varas por las 4. libras; deſpues, porque 17. ſueldos no ſon parte aliquota de la libra, reſuelvolos en aliquotas 10. 5. 2. y eſcrivolas al lado; y porque 10. ſueldos es la mitad de la libra, ſaco mitad de 6. y ſeràn 3. aſsimiſmo porque 5. ſueldos es mitad de 10. ſaco mitad de 3. que es lo que le correſponde á los 10. ſueldos, y ſerà 1. libra y 10. ſueldos; y porque los 2. ſueldos ſon la quinta parte de 10. ſaco el quinto de 3. libras, que es lo que correſponde á los 10. ſueldos; y porque de 3. libras no puedo ſacar el quinto ſin reſolverlas en ſueldos;

	6 varas.			
	4 lib.	17	ſuel.	$\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$
	24 lib.			
10	3 lib.			
5	1 lib.	10	ſuel.	
2		12	ſuel.	
		3	ſuel.	
	29 lib.	5	ſuel.	

dos, reſuelvòlas, y ſeràn 60. ſueldos, cuyo quinto ſon 12. ſueldos.

Hecho eſto, porque el medio es parte de un quinto, le incorporo aſsi (168): Multiplico los denominadores 5. por 2. y ſerà el nuevo denominador 10. multiplico el numerador 2. por el denominador 2. y al producto 4. añadiendo el numerador 1. ſerá el nuevo numerador 5. y el quebrado reducido $\frac{5}{10}$ de ſueldo. Multiplico aora las 6. varas por $\frac{5}{10}$ de ſueldo, y ſaldrán $\frac{30}{10}$, que ſon tres ſueldos juſtos. Sumolo todo, y hallo el valor 29. libras y 5. ſueldos.

De otro modo.

Debaxo de los 17. ſueldos pongaſe el denominador 20. y reduciendo las 4. libras al quebrado $\frac{17}{20}$ (162), ſeràn $\frac{97}{20}$ de libra; deſpues incorporenſe unos quebrados en otros, deſte modo: Multipliquenſe los denominadores 20. por 5. y ſaldrá el nuevo denominador 100. para hallar el nuevo numerador, multipliqueſe el numerador 97. por el denominador 5. y al producto 485. añadaſe el numerador 2. y ſerà el quebrado $\frac{487}{100}$, en el qual ſe incorporarà del miſmo modo el quebrado $\frac{1}{2}$, multiplicando los denominadores 100. por 2. ſerán 200. el nuevo denominador; para el nuevo numerador, multipliqueſe el numerador 487. por el denominador 2. y al producto 974. añadaſe el numerador 1. y ſerà el quebrado $\frac{975}{200}$ de libra; por el qual ſe multiplicarán las 6. varas, y ſaldràn $\frac{5850}{200}$ de libra, cuyo valor (159) es 29. libras y 5. ſueldos.

6 varas
4 libras. $\frac{17}{20}$ ſuel. $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{2}$

PROBLEMA V.

MULTIPLICAR UNA ESPECIE POR OTRAS muchas.

226 EL que huviere entendido los Problemas antecedentes, no hallarà dificultad en eſte; porque ſolo añade el exercicio de la multiplicacion por diferentes exemplos.

Exemplo I.

Pedro comprò 40. arrobas de azucar à 3. libras un ſueldo y un dinero la arroba, y quiere ſaber quanto valen. Multiplique la cantidad 40. arrobas por la eſpecie mas alta del multiplicador, que ſon las 3. libras, y ſaldrán 120. libras. Aora paſſo à multiplicar la ſegunda eſpe-

especie, que son sueldos; y pues un sueldo es la vigesima parte de la libra, saco la misma parte de la cantidad 40. la qual supone aora por libras, que es lo mismo que partirla por 20. y saldràn 2. libras, que escrivo debaxo de las 120. libras.

40 arrobas.			
3 lib.	1 suel.	1 din.	
120 lib.			
2 lib.			
	3 suel.	4 din.	
122 lib.	3 suel.	4 din.	

Passo à la tercer especie del multiplicador, que es dineros, y porque un dinero es la duodecima parte del sueldo, saco dozavo de la cantidad 40. que aora supone por sueldos; partiendo 40. à 12. caben 3. sueldos, y sobran 4. los quales reducidos à dineros son 48. dineros, y partidos à 12. caben à 4. con que el dozavo de 40. sueldos son 3. sueldos y 4. dineros, que escrivo en su lugar. Hago la suma, y salen 122. libras 3. sueldos y 4. dineros, por el valor de las 40. arrobas de azucar.

Demonstracion.

Si el precio de cada arroba fueran solas 3. libras, las 40. arrobas valieran 120. libras solas; y si dicho precio fuera una libra mas; esto es, 4. libras, valieran las 40. arrobas 160. libras: esto es, 40. libras mas que antes; de suerte, que por cada unidad que se aumenta el precio, crece el valor una vez mas el numero de la cantidad, ò especie que se multiplica: luego aviendo en el precio un sueldo, à mas de las tres libras crecerá el valor correspondiente à las dichas 3. libras una vigesima parte de la cantidad 40. porque un sueldo es la vigesima parte de la libra: y si huviera 2. sueldos, creceria dos vigesimos; si 3. sueldos, tres vigesimos, &c. De donde consta claramente, que multiplicando la segunda especie, que aqui son sueldos, la cantidad supone, ò representa à la especie immediate mayor del mutiplicador, que aqui son libras: porque aumentandose el precio una libra, crece el valor 40. libras: aumentandose parte de una libra, crecerà el valor la misma parte de las 40. libras.

Supuesto, pues, que por cada sueldo que ay en el precio, à mas de las libras, crece el valor una vigesima parte de 40. libras, se infiere claramente, que por cada un dinero que aya en el precio, à mas de los sueldos, crecerá el valor un dozavo de dicha vigesima parte, porque un dinero es el dozavo de un sueldo, y la dicha vigesima parte corresponde à un sueldo: luego si se saca el dozavo de dicha vigesima parte, que aqui son 2. libras, serà lo que corresponde á un dinero; y como la sobre-

dicha vigeſima parte ha provenido de la diviſion de las 40. libras por 20. ſueldos, ſi ella ſe multiplica por los miſmos 20. ſueldos, para poder mas facilmente ſacar el dozavo, reduciendo las libras de la vigeſima parte à ſueldos, bolverà à reſtituirſe la miſma cantidad 40. pero no en eſpecie de libras, ſino de ſueldos; y eſta es la cauſa porque ſacando partes por razon de los dineros, la cantidad ſupone, ò repreſenta ſueldos.

De donde ſe infiere, que en qualquier multiplicacion de numeros denominados, multiplicando la cantidad por la eſpecie mayor, el producto es homogeneo à la dicha eſpecie mayor; ſacando partes por razon de la eſpecie proxime menor, la miſma cantidad ſupone por la eſpecie immediate mayor; y ſacando partes por razon de la tercer eſpecie, la cantidad ſupone por la eſpecie antecedente mayor; de ſuerte, que ſacando qualquier parte, ſiempre la cantidad ſupone por la eſpecie proxime mayor del multiplicador.

Exemplo II.

Para ſaber 30. cahices de trigo à *6.* libras 19. ſueldos y 11. dineros el cahiz quanto valen, los multiplicarè primero por las *6.* libras; deſpues, porque los 19. ſueldos no ſon parte aliquota de la libra, los dividirè en aliquotas 10. 5. 4. eſcriviendolas al lado, para mayor facilidad; y porque los 10. ſueldos ſon la mitad de una libra, ſacarè la mitad de la cantidad 30. que aora ſupone por libras, y ſerà 15. libras. Y porque los 5. ſueldos ſon la mitad de 10. ſacarè la mitad de 15. libras, que corresponden à los 10. ſueldos, y ſerà 7 libras y 10. ſueldos. Finalmente, porque 4. ſueldos es el quinto de la libra, ſacarè el quinto de la cantidad 30. que es *6.* libras.

	30 cahices.
	6 lib. 19 ſuel. 11. din.
	180 lib.
10	15 lib.
5	7 lib. 10 ſuel.
4	*6* lib.
6	15 ſuel.
4	10 ſuel.
1	2 ſuel. *6.* din.
	209 lib. 17 ſuel. *6.* din.

Paſſo à los dineros, y porque 11. no es parte aliquota del ſueldo, los divido en aliquotas *6.* 4. 1. y porque *6.* dineros es medio ſueldo, ſaco la mitad de la cantidad 30. que aora ſupone por ſueldos, y ſerán 15. ſueldos: y porque los 4. dineros es la tercera parte del ſueldo, ſaco el tercio de la miſma cantidad 30. y ſerán 10. ſueldos. Ultimamente, porque un dinero es la quarta parte de 4. ſaco el quarto de 10. ſueldos, que correſponden à los 4. dineros, y ſeràn 2. ſueldos y *6.* dineros. Sumo todas las partidas, y hallo el valor 209. libras 17. ſueldos y *6.* dineros.

De

De otro modo.

Multipliquese la cantidad por todas las especies del multiplicador, y será el producto 180. libras 570. sueldos y 330. dineros. Despues reduzganse los dineros à sueldos, y los sueldos à libras, y saldrá el valor mismo 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

30 cahices.
6 lib. 19 suel. 11 din.
180 lib. 570 suel. 330 din.

De otro modo.

Debaxo de los 19. sueldos pongase el denominador 20. que es una libra; debaxo los 11. dineros escrivase el denominador 12. que es un sueldo, como parece; reduzganse las 6. libras à 19. veinte avos, (162) y serán 139. veinte avos de libra, en cuyo quebrado se incorporaràn los 11. dozavos, (268) multiplicando los denominadores 20. por 12. para hacer el nuevo denominador 240. despues multiplicando el numerador 139. por el denominador 12. y añadiendo al producto 1668. el numerador 11. será todo el quebrado 1679. 240. avos de libra; aora multipliquese la cantidad 30. por el dicho quebrado, y saldrán 50370. 240. avos, cuyo valor (159) es 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

30 cahices.
6 lib. $\frac{19}{20}$ suel. $\frac{11}{12}$ din.

De otro modo.

Reducido el precio à la menor especie (76) serán 1679. dineros, por los quales se multiplicaràn los 30. cahices, y seràn 50370. dineros; reducidos à libras, sueldos, y dineros, (100) serán 209. libras 17. sueldos y 6. dineros.

Exemplo III.

Para saber qué valen 10. onzas de oro à 14. libras 12. sueldos 9. dineros y dos tercios de dinero cada onza, se multiplicaràn primero las 10. onzas por las 14. libras, y despues se dividiràn los 12. sueldos en partes aliquotas 10. y 2. por razon de los 10. sueldos se sacará la mitad de la cantidad 10. y seràn 5. libras; y por los 2. sueldos se sacará

rá

rá el quinto de las 5. libras, que corresponden à los 10. sueldos del lado.

Los 9. dineros se dividiràn en partes aliquotas de sueldo 6. y 3. Por los 6. dineros se sacará mitad de la cantidad 10. que aora supone por sueldos, y seràn 5. sueldos; y por los 3. dineros se sacarà mitad de la dicha mitad, y seràn 2. sueldos y 6. dineros.

	10 onzas.			
	14 lib.	12 suel.	9 din.	$\frac{2}{3}$
	140 lib.			
10	5 lib.			
2	1 lib.			
6		5 suel.		
3		2 suel.	6 din.	
			6 din.	$\frac{2}{3}$
	146 lib.	8 suel.	0 din.	$\frac{2}{3}$

Hecho esto, multipliquese la cantidad por los dos tercios, y reduzgase à enteros assi: Multipliquese 10. por el numerador 2. y el producto 20. se partirà por el denominador 3. será el quociente 6. dineros y dos tercios. Hecha la suma de todo, vendrà el valor 146. libras 8. sueldos 0. dineros y dos tercios.

De otro modo.

Multipliquese la cantidad por todas las especies, como en el exemplo segundo de este Problema, modo segundo, y despues reduzgase à libras, sueldos, &c. (100)

De otro modo.

Debaxo de los 12. sueldos pongase el denominador 20. y debaxo de los 9. dineros se escrivirá el denominador 12. Despues reduzganse las 14. libras al quebrado 12. 20. avos, en el qual quebrado se incorporaràn los 9. 2. avos, y seràn 3513. 240. avos de libra; en este quebrado tambien se incorporarán los dos tercios, y seràn 10541. 720. avos de libra. Hecho esto, multipliquese la cantidad 10. onzas por este ultimo quebrado, y el valor del producto serà el que se busca.

10 onzas.
14 libras $\frac{12}{20}$ suel. $\frac{9}{12}$ din. $\frac{2}{3}$

Exemplo. IV.

Un campo rectangulo tiene de largo 100. passos geometricos, y de ancho 50. passos 4. pies 3. palmos y dos dedos; para saber quanto tendrá la superficie, se multiplicarà lo largo por lo ancho, y aunque este

te genero de multiplicacion se puede hacer sacando partes, pero mejor será por multiplicacion de cada especie.

100 passos.			
50 pas.	4 pies	3 pal.	2 dedos.
5000 pas.	400 pies	300 pal.	200 dedos.
5097 pas.	2 pies	2 pal.	

Multipliquense los 100. passos de largo por todas las especies del multiplicador por el modo ordinario de multiplicar enteros, y será el producto 5000. passos 400. pies 300. palmos y 200. dedos. Reduzgase cada especie inferior à la superior, partiendole por la denominacion de esta, y será el verdadero producto, ò superficie del campo 5097. passos 2. pies y 2. palmos.

PROBLEMA VI.

MULTIPLICAR MUCHAS ESPECIES POR otras muchas.

Precepto.

227 QUando en la cantidad, y multiplicador ay muchas especies, se multiplicará primero solo la mayor especie de la cantidad por todas las del multiplicador como queda dicho en los Problemas antecedentes. Despues de todo el multiplicador se sacarán aquella parte, ò partes, que cada una de las especies de la cantidad fuere, respeto de la especie proxime mayor de la misma cantidad, y sumandolo todo saldrá el verdadero producto.

Exemplo I.

Pedro merca 4. varas y 2. palmos de paño à razon de 2. libras 10. sueldos y 8. dineros la vara; para saber quanto valen, multiplique las 4. varas por todas las especies del multiplicador, sacando partes, ò de otro qualquier modo de los referidos; y despues, porque los dos palmos son la mitad de la vara, saque mitad de todo el precio, que será 1. libra 5. sueldos 4. dineros. Sumelo todo, y hallará 11. libras 8. sueldos.

4 varas 2 palmos.		
2 lib.	10 suel.	8 din.
8 lib.		
2 lib.		
	1 suel.	4 din.
	1 suel.	4 din.
1 lib.	5 suel.	4 din.
11 lib.	8 suel.	

De

De otro modo.

Debaxo cada especie de las menores pongase por denominador el numero que constituye à la especie immediate mayor: esto es, debaxo de los 2. palmos, pongase el numero 4. porque 4. palmos hacen una vara; debaxo los 10. sueldos ponganse 20. y debajo los 8. dineros escrivanse 12.

Hecho esto se reducirá la cantidad al quebrado dos quartos, y será 18. quartas de vara. Asimismo se reducirán las 2. libras à 10. 20. avos, y serán 50. 20. avos, en el qual quebrado se incorporarán los 8. 2. avos (168) y serán 608. 240. avos de libra. Multipliquense aora los 18. quartos por 608. 240. avos, (180) y serán 10944. 960. avos de libra, cuyo valor es 11. libras y 8. sueldos.

$$\begin{array}{l} 4 \text{ varas } \frac{2}{4} \text{ palm.} \\ 2 \text{ lib. } \frac{10}{20} \text{ suel. } \frac{8}{12} \\ \hline \frac{18}{4} \quad \frac{608}{240} \end{array}$$

Exemplo II.

Si quiero saber 10. libras y 10. onzas de seda labrada, peso de Valencia, à 3. libras y 11. sueldos la libra quanto valen, multiplicarè las 10. libras por todo el precio, como se hizo en los Problemas antecedentes; despues para saber el valor de las 10. onzas, porque no son parte aliquota de la libra de peso, las dividirè en aliquotas 6. y 4. y porque 6. onzas es media libra, sacarè la mitad de todo el precio, que serà una libra 15. sueldos y 6. dineros; despues, porque las 4. onzas son el tercio de la libra de peso, sacarè el tercio de todo el precio, deste modo: El tercio de 3. libras es una libra; el tercio de 11. sueldos son 3. sueldos, y sobran 2. que reducidos à dineros son 24. dineros; el tercio, pues, de 24. dineros son 8. Con que todo el tercio serà una libra 3. sueldos y 8. dineros. Hecha la suma, hallarè el valor 38. libras 9. sueldos y 2. dineros.

	10 lib. 10 onzas.
	3 lib. 11 suel.
	30 lib.
10	5 lib.
1	lib. 10 suel.
6	1 lib. 15 suel. 6 din.
4	1 lib. 3 suel. 8 din.
	38 lib. 9 suel. 2 din.

De otro modo.

Debaxo las 10. onzas pongase el denominador 12. que son las onzas

tas que hacen la libra; aſsimiſmo, debaxo los 11. ſueldos eſcrivaſe el denominador 20. que ſon los ſueldos que hacen la libra de moneda. Reduzganſe los enteros à los quebrados que les acompañan, y ſerán 130. dozavos y 71. veinte avos; multipliqueſe, y el valor del producto 9230. 240. avos, ſerá 38. libras 9. ſueldos y 2. dineros.

10 lib. $\frac{10}{12}$ onzas.	
3 lib. $\frac{11}{20}$ ſuel.	
$\frac{130}{12}$	$\frac{71}{20}$

Eſte modo de obrar es lo miſmo que reducir el multiplicador, y cantidad à la ultima eſpecie, y ſerán 130. onzas, y 71. ſueldo; multipliquenſe, pues, las 130. onzas por los 71. ſueldo, y el producto 9230. ſe partirá por el producto 240. de 12. por 20. que ſon las onzas, y ſueldos que ay en una libra de peſo, y de moneda; y el quociente dará lo que ſe buſca.

Exemplo III.

Se han de multiplicar 36. arrobas 20. libras y 5. onzas, peſo Valenciano, por 15. ſueldos 3. dineros y medio la arroba. Multipliquenſe primero las 36. arrobas por los 15. ſueldos 3. dineros y medio, como ſe ha hecho en los Problemas antecedentes.

	36 arrob.	20 lib.	5 onz.	
	15 ſuel.	3. din.	$\frac{1}{2}$	
	180 ſuel.			
	36 ſuel.			
3	9 ſuel.			
	1 ſuel.	6 din.		
18	7 ſuel.	7 din.	$\frac{3}{4}$	
2		10 din.	$\frac{7}{36}$	
4		1 din.	$\frac{151}{216}$	
1			$\frac{367}{864}$	
	559 ſuel.	2 din.	$\frac{59}{864}$	

Hecho eſto, porque las 20. libras no ſon parte aliquota de la arroba, las divido en aliquotas 18. y 2. y porque las 18. libras ſon media arroba, faco la mitad de todo el precio, diciendo: La mitad de 15. ſueldos ſon 7. y ſobra un ſueldo, que ſon 12. dineros, y 3. dineros ſon 15. cuya mitad ſon 7. dineros, y ſobra un dinero, el qual reduzgo al quebrado, y ſerá tres mitades, cuya mitad en tres quartos. (220) Y porque las 2. libras ſon la novena parte de 18. faco el nono de 7. ſueldos 7. dineros y tres quartos, diciendo: El nono de 7. ſueldos es zero; reſuelvoles, pues, en dineros, y ſerán 84. dineros; juntoles los 7. y harán 91. dinero, cuyo noveno es 10. dineros, y ſobra un dinero, el qual reduzgo à los tres quartos, y ſerán ſiete quartos, cuyo noveno ſon 7. 36. avos.

Paſſo

Paſſo aora á las onzas, reſolviendolas en partes aliquotas 4. y 1. de la libra; y porque las quatro onzas ſon el tercio de la libra, y por conſiguiente el ſexto de 2. libras, ſaco el ſexto de 10. dineros y 7. treinta y ſeis avos, que es lo que correſponde à las dos libras, diciendo: El ſexto de 10. dineros es uno, y ſobran 4. que reducidos al quebrado 7. treinta y ſeis avos, ſon 151. treinta y ſeis avos, cuyo ſexto es 151. 216. avos.

Podia tambien hacer lo miſmo de otra manera, ſacando el valor de una libra, que es partir todo el precio por 36. que ſon las libras tiene la arroba; ò ſacar el ſexto de todo el precio, y de eſte ſexto ſacar otra vez el ſexto, y ſerá el valor de la libra 5. dineros y 7. 72. avos, el qual eſcrivirè aparte. Deſpues por las 4. onzas ſacarè el tercio del valor de la libra, y ſerá el miſmo un dinero, y 151. 216. avos.

Y porque una onza (que es la que falta haſta 5.) es la quarta parte de 4. ſaco el quatro de lo que correſponde à 4. onzas, diciendo: El quarto de un dinero no le tiene; (en eſpecie de dinero) pues le reduzgo al quebrado 151. 216. avos, y ſerà 367. 216. avos, cuyo quarto es 367. 864. avos de dinero. Hago la ſuma de todo, y hallo el valor 559. ſueldos 2. dineros y 59. 884. avos de dinero.

Advierto aqui, que en lo mercantil no ſe hace caſo de los ultimos quebrados, y en particular quando ſon de algun entero de poco valor; pues es mayor el trabajo que acarrean, que lo que valen, porque en el exemplo ſolo importan dos dineros. Pero ſi los quebrados ſon de alguna eſpecie de notable valor, ò ſi ſe han de multiplicar, entonces no ſe pueden omitir ſin error conſiderable.

Advierto tambien, que quando los quebrados han procedido de la continua particion, como en eſte exemplo, que del primer quebrado tres quartos han nacido el ſegundo 7. 36. avos, y de eſte el tercero, &c. entonces todos los numeradores ſe contienen en el denominador 864. del ultimo quebrado: y aſsi, reduciendo todos los quebrados al denominador ultimo, tendrán todos un miſmo denominador, y ſerà facil el ſumarlos: como reduciendo los tres quartos al denominador 864. (159) ſalen 648. 864. avos. Aſsimiſmo, reduciendo los otros quebrados 7. 36. avos, y 151. 216. avos al miſmo denominador, ſaldrán 168. 864. avos, 604. 864. avos; con que todos los quatro quebrados del exemplo tendrán un miſmo denominador, como ſe vè aqui figurado; y aſsi, con-

$$\frac{648}{864} \quad \frac{168}{864} \quad \frac{604}{864} \quad \frac{367}{864}$$

Suma $\frac{1787}{864}$

ſumar

sumarlos numeradores, y á la suma escrivirle debaxo el comun denominador, saldrà un quebrado, que serà la suma de todos los quatro, el qual porque tiene el numerador mayor que el denominador, será mayor que un entero; con que partiendo el numerador 1787. por el denominador 864. vendràn dos dineros, y sobran 59. 864. avos de dinero.

De otro modo.

Reduzgase la cantidad à la menor especie, y serán 15797. onzas. (76) Assimismo se reducirà el precio á la menor especie, que son medios dineros, ò meajas, y seràn 367. meajas. Multipliquese un numero por otro, y el producto 5797499. se ha de partir por el partidor, que hallarè aora. Saco las onzas que ay en una arroba, que es la especie mayor de la cantidad, y son 432. assimismo saco las meajas que ay en un sueldo, que es la especie mayor del precio, y hallo 24. multiplico 432. por 24. y el producto 10368. es el partidor. Hecha la particion hallo el mismo valor de antes.

La razon porque el producto 5797499. de la cantidad por el precio reducido à la minima especie, no es el verdadero, sino que se ha de partir por el producto de las onzas, y meajas que ay en una arroba, y un sueldo, es manifiesta; porque el dicho producto 5797499. es numero plano, ò es producto de dos numeros. Luego se ha de comparar con otro numero plano, ù otro producto, y no se ha de tomar por sì solo.

Esta operacion es la misma que la que pone denominadores debaxo de cada especie, exceptando la primera, y despues reduce las especies al ultimo quebrado, para hacer la multiplicacion por quebrados: porque si una, y otra se cotejan, se verá la identidad.

Exemplo IV.

Pedro compra en Castilla 10. cahices de trigo 8. hanegas 5. celemines y 2. quartillos, por 40. reales y tres quartos de real cada cahiz; para saber lo que valen, multiplico los 10. cahices por los 40. reales y tres quartos, como se dixo en los Problemas antecedentes.

Despues, porque las 8. hanegas no son parte aliquota del cahiz, las divido en aliquotas 4. y 4. escriviendolas al lado como antes; y por que 4. hanegas son el tercio de un cahiz, saco el tercio de todo el precio, diciendo: El tercio de 40. es 13. y sobra un real, que reducido

à los tres quartos son siete quartos; el tercero, pues, de 7. quartos son 7. dozavos; (200) escrivo otra vez el mismo tercio, por razon de las otras quatro hanegas.

	10 cahic. 8 ha. 5 cel. 2 quar.	
	40 reales.	$\frac{3}{4}$
	400 real.	
	5 real.	
	2 real.	$\frac{1}{2}$
4	13 real.	$\frac{7}{12}$
4	13 real.	$\frac{7}{12}$
4	1 real.	$\frac{19}{144}$
1		$\frac{163}{576}$
2		$\frac{183}{1152}$
	436 real.	$\frac{257}{1152}$

Hecho esto, para saber el valor de los celemines, sacarè aparte el valor de una hanega, tomando la duodecima parte de todo el precio, que serà tres reales y 19.48. avos; y porque los 5. celemines no son parte aliquota de la hanega, dividole en aliquotas 4. y 1. y pues el 4. es la tercera parte de la hanega, saco el tercio del valor de la hanega 3. reales y 19. 48. avos, diciendo: El tercio de 3. es un real; el tercio de 19. 48. avos es 19. 144. avos; y porque un celemin es el quarto de 4. saco el quarto de lo que le corresponde à 4. celemines, diciendo: El quarto de un real no le tiene (en especie de real); pues le reduzgo à su quebrado, y serà 163. 144. avos, cuyo tercio (200) es 163. 576. y porque dos quartillos es la mitad de un celemin, saco la mitad de este ultimo quebrado, que es lo que corresponde á un celemin. Hago la suma, y hallo 436. reales y 257. 1152. avos de real.

De otro modo.

Reduzgase la cantidad à quartillos, (76) y seràn 6166. Assi mismo reduzgase el precio á quartos, y seràn 163. multipliquese un numero por otro, y se guardará el producto 1005058. Despues se multiplicaràn los quartillos que ay en un cahiz, que son 576. por los quartos de real que ay en un real, que son 4. y el producto 2304. serà el partidor: partase, pues, el producto 1005058. por este ultimo producto 2304. y el quociente darà el mismo valor.

Exemplo V.

Se han de multiplicar 12. nietros 12. cantaros y tres quintos, medida de Aragon, por 2. libras 16. sueldos 8. dineros y medio. Multiplico los 12. nietros por 2. libras, y son 24. libras. Passo à los sueldos, y porque 16. sueldos no es parte aliquota de la libra, dividoles

en

en aliquotas 4. 4. 4. 4. y pues 4. sueldos son el quinto de la libra, saco el quinto de la cantidad 12. diciendo: El quinto de 12. son 2. libras, (supone la cantidad por libras) y sobran dos libras, que hechas sueldos son 40. sueldos, cuyo quinto son 8. Escrivo este quinto quatro veces, porque ay quatro quartos.

Passo á los dineros, y porque los 8. dineros no son parte aliquota del sueldo, divídoles en aliquotas 4. y 4. y porque 4. dineros son el tercio del sueldo, saco el tercio de los 12. nietros, que aora supónen por sueldos, y serán 4. sueldos, los quales escrivo otra vez, porque ay dos quatros.

	12 nietr.	12 cant.			$\frac{3}{5}$ $\frac{1}{2}$
	2 lib.	16 suel.	8. din.		
	24 lib.				
4	2 lib.	8 suel.			
4	2 lib.	8 suel.			
4	2 lib.	8 suel.			
4	2 lib.	8 suel.			
4		4 suel.			
4		4 suel.			
			6 din.		
4		14 suel.	2 din.		$\frac{1}{8}$
4		14 suel.	2 din.		$\frac{1}{8}$
4		14 suel.	2 din.		$\frac{1}{8}$
		2 suel.	1 din.		$\frac{83}{160}$
	36 lib.	5 suel.	1 din.		$\frac{143}{160}$

Passo al medio dinero, sacando mitad de la cantidad 12. que aora supone por dineros, y serán 6. dineros.

Hecho esto saco partes, ò busco el valor de las otras especies que ay en la cantidad, y porque los 12. cantaros no son parte aliquota del nietro, el qual tiene 16. cantaros, divídoles en aliquotas 4. 4. 4. y porque 4. cantaros son el quarto de un nietro, saco quarto de todo el precio, diciendo: El quarto de 2. libras no le tiene (quedando libras); reduzgolas à sueldos, añadiendoles los 16. sueldos, y serán 56. sueldos, cuyo quarto son 14. sueldos. Saco el quarto de los 8. dineros, y es 2. dineros; saco tambien el quarto de medio dinero, que es un ochavo, y será el valor de 4. cantaros 14. sueldos 2. dineros y un ochavo, que escrivo tres veces, por otros tantos quatros que ay al lado.

Para hallar el valor de los tres quintos de cantaro, saco el primero el valor de un cantaro, partiendo todo el precio por 16. que son las partes que tiene un nietro, y escriviendole á parte, porque el dicho precio es de un nietro, deste modo. Reduzgo las dos libras à sueldos, y añadiendoles los 16. sueldos, serán 56. sueldos, los quales partidos à 16. caben 3. y sobran 8. sueldos, que reducidos à dineros, y añadidos

los 8. dineros, ſon 104. dineros, los quales partidos á 16. caben á 6. y ſobran 8. dineros, los quales reducidos à medios ſon 17. medios, y partidos por 16. ſon 17. treinta y dos avos. Con que el valor de un cantaro es 3. ſueldos 6. dineros y 17. treinta y dos avos. Todo eſte valor reducirè al ultimo quebrado, y ſerà 1361. treinta y dos avos. Multiplico aora eſte quebrado por los tres quintos de cantaro, y hallarè 4083. 160. avos, que ſon 25. dineros y 83. 160. avos: eſto es, dos ſueldos un dinero y 83. 160. avos, los quales eſcrivo. Hago la ſuma, y hallo el valor de 40. libras 5. ſuedos 1. dinero y 143. 160. avos.

De otro modo.

Debaxo de cada eſpecie, exceptando las dos mayores de cada parte, pongaſe el denominador que conſtituye à la eſpecie proxime mayor, como parece en el exemplo: eſto es, debaxo los 12. cantaros pongaſe 16., que hacen un nietro; debaxo los ſuedos, eſcrivanſe 20. y debaxo los dineros ponganſe 12.

12 nietr.	$\frac{12}{16}$	cant.	$\frac{3}{5}$			
2 libras	$\frac{16}{20}$	ſuel.	$\frac{8}{12}$	din.	$\frac{1}{2}$	

Hecho eſto, reduzganſe los 12. nietros à 12. diez y ſeis avos, y ſeràn 204. 16. avos, en cuyo quebrado ſe incorporaràn los tres quintos, (168) y ſeràn 1023 80. avos. Del miſmo modo ſe reducirà el precio, y ſerà 1361. 480. avos. Multipliqueſe un quebrado por otro, y el producto ſerà quebrado de libra, que es la eſpecie mayor; reduzgaſe á libras, ſueldos, y dineros, y ſe tendrá el miſmo valor deſeado.

Exemplo. VI.

Se han de multiplicar 5. cahices, y tres celemines por 6. libras, y 8. dineros, medída, y moneda de Valencia. Multiplico los 5. cahices por las 6. libras, y ſon 30. libras. Aora, porque no ay ſueldo alguno, paſſo à los 8. dineros, ſacando tercio de la cantidad 5. cahices, y eſcriviendole dos veces, por razon de dos quartos que ay en el 8. y cada uno es el tercio del ſueldo. Hecho eſto, tengo de ſacar partes del precio por las otras eſpecies, que ay en la cantidad; y aunque no ay barcilla alguna, pero tengo de ſacar el valor de una, para ſaber el valor de tres celemines.

5 cahic.	o barcha.	3 celem.	
6 lib.	o ſuel.	8 din.	
30 lib.			
	1 ſuel.	8 din.	
	1 ſuel.	8 din.	
	5 ſuel.	o din.	$\frac{1}{3}$
	2 ſuel.	6 din.	$\frac{1}{6}$
30 lib.	10 ſuel.	10 din.	$\frac{1}{2}$

Di-

Divido, pues, todo el precio por 12. que son las barchillas que ay en un cahiz, diciendo: El dozavo de 6. libras en especie no le tiene, pues resuelvolas en sueldos, y serán 120. sueldos; y porque no ay sueldo alguno á mas de libras, nada tengo de añadir à los 120. sueldos: saco, pues, el dozavo de 120. y es 10. sueldos, que escrivo à parte; assimismo, el dozavo de 8. dineros es dos tercios de dinero. Con que el valor de una barchilla es 10. sueldos ningun dinero, y dos tercios de dinero.

Esto supuesto, por los dos celemines saco la mitad de dicho valor de una barchilla, y serà 5. sueldos zero dinero y un tercio. Saco tambien la mitad de esta mitad por el un celemin de los tres, serà 2. sueldos 6. dineros y un sexto. Sumandolo todo salen 30. libras 10. sueldos 10. dineros y medio, que es el valor de los 5. cahices zero barchillas y 3. celemines.

Demonstracion.

Para demonstrar este Problema en numeros determinados es al proposito el exemplo 3. en el qual la multiplicacion de la mayor especie de la cantidad por el precio, ya queda demonstrada en los Problemas antecedentes. Aora solo falta probar el modo de sacar partes, por razon de las otras especies de la cantidad, que son libras, y onzas. Si como son 36. arrobas fueran 37. esto es, huviera una arroba mas, creceria el valor una vez todo el precio mas: luego si ay una libra mas que las 36. arrobas, crecerà la trigesima sexta parte del precio; y si dos libras, dos trigesimas sextas partes, &c. Luego aviendo 20. libras, por razon de las 18. que es media arroba, crecerà el valor la mitad del precio; y por las 2. libras; y crecerá la decima octava parte del precio, ò la nona de dicha mitad.

Assimismo, si à mas de las libras huviera una onza, creceria el valor la duodecima parte de una trigesima sexta parte del precio: esto es, un dozavo del valor de una libra; y si ay dos onzas, crecerà dos dozavos, &c. Luego aviendo 5. onzas, por razon de las 4. crecerà un tercio de dicha trigesima sexta parte del precio, ò un sexto del valor de 2. libras; y por razon de la una onza, crecerá la quarta parte de dicho tercio, pues que una onza es la quarta parte de 4. Luego sacando partes, segun està dicho, queda bien hecha la multiplicacion.

Aqui suelen preguntar algunos la causan por què quando se multiplican muchas especies por otras muchas, solamente se han de sacar partes de la especie mayor de la cantidad, correspondientes á todas las especies del multiplicador: y sacando partes por razon de las demàs espe-

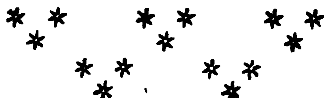
cies de la cantidad, se han de sacar de todo el multiplicador; como en el mismo exemplo 3. multiplicando los 15. sueldos 3. dineros y medio, se sacan partes de sola la especie mayor 36. arrobas, y sacando partes por razon de las 20. libras 5. onzas, se han de sacar de todas las especies del multiplicador, ò precio.

A esto respondo, que el multiplicador es precio de una unidad de la especie mayor: esto es, de una arroba; y assi, todas las especies del precio se han de referir à ella sola: y por la misma razon, como todas las especies menores de la cantidad son parte, ò partes de una de la mayor: esto es, de una arroba en nuestro exemplo, se han de sacar por ellas partes de todo el multiplicador que es el precio de una arroba.

Consectario.

De lo dicho hasta aqui se infiere un modo universal para multiplicar muchas especies por otras muchas, que es reducir la cantidad, y multiplicador á sus minimas especies, y luego multiplicarlas, guardando el producto para partirle; despues se multiplicará el numero de las veces que la especie menor de la cantidad entra en la mayor, por el numero de las veces que la especie menor del partidor entra en su especie mayor; y dividiendo aquel producto guardado por este, saldrà el numero que se busca.

Como en el exemplo 5. deste Capitulo, para multiplicar 12. nietros 12. cantaros y tres quintos de cantaro, medida de Aragon, por 2. libras 16. sueldos 8. dineros y medio, se reducirà la cantidad à quintos de cantaro, y seràn 1023. quintos. Assimismo, se reducirà el multiplicador à medios dineros, ò meajas, y seràn 1361. meajas. Multipliquense los 1023. quintos de cantaro por 1361. meajas, y saldràn 1392303. meajas. Aora vease quantos quintos de cantaro ay en un nietro, lo qual se hallará multiplicando los 16. cantaros que tiene el nietro por 5. y saldrán 80. Assimismo, vease quantas meajas ay en una libra, multiplicando 20. sueldos por 12. dineros, y el producto por 2. y saldràn 480. meajas. Multipliquense los 80. quintos de cantaro por las 480. meajas, y saldràn 38400 meajas. Ultimamente, dividase el producto guardado 1392303. por este ultimo producto 38400. y saldràn 36. libras 5. sueldos 1. dinero, y 143. 160. avos de dinero, por el precio de la sobredicha cantidad.



CAPI-

CAPITULO QUARTO.

DEL PARTIR NUMEROS DENOMINADOS.

228 AUnque podia dividir este Capitulo en diferentes Problemas que facilitassen la division : pero como piden algunas advertencias, por no confundir al estudioso, le reducirè à una regla general, que aunque en algunos casos es cansada, pero en otros es totalmente necessaria.

Regla general.

229 Escritos los denominadores debaxo de las especies, como se hizo en el Capitulo antecedente, se reducirá por incorporacion la especie mas alta al ultimo quebrado, assi en la cantidad, como en el divisor; despues se harà la division en los quebrados, como se dixo en el partir quebrados.

Exemplo I.

Pedro comprò una pieza de tafetàn, que tirava 100. varas, por precio de *80.* libras 12. sueldos; para saber lo que valia la vara, escrivanse 20. debaxo de los sueldos, y despues reduzgase el precio al quebrado doce veinte avos, y seràn 1612. 20. avos de libra; partase por 100. (192), y el quociente será 1612. 2000. aves de libra, euyo valor (159) es *16.* sueldos 1. dinero y 11. 25. avos; y tanto valìa cada vara. La demonstracion es la misma que la de partir quebrados.

80 lib. $\frac{20}{12}$ sueld. | 100

De otro modo.

Esta cuenta, y sus semejantes se puede hacer mas facilmente : Reducidas las libras à sueldos, seràn 1612. sueldos; dividanse por 100. por el modo ordinario de partir enteros, y vendrán al quociente *16.* sueldos, y 3. 25. avos de sueldo, que son 1. dinero y 11. 25 avos.

De otro modo.

Porque el partidor 100. proviene de la multiplicacion de 10. por

10. ſaqueſe el decimo de todo el precio, diciendo: El decimo de 80. libras ſon 8. libras: el decimo de 12. ſueldos es 1. ſueldos, y ſobran 2. ſueldos, que ſon 24. dineros: el decimo de 24. dineros es 2. dineros y 4. decimos. Con que todo el decimo del precio es 8. libras 1. ſueldo 2. dineros y 4. decimos. Saqueſe de eſte decimo otro decimo, diciendo: El decimo de 8. libras no le tiene en eſpecie de libras; pues reducidas à ſueldos, y añadido un ſueldo ſon 161. ſueldo, cuyo decimo es 16. ſueldos, y ſobra un ſueldo, el qual reducido à dineros, y juntandole los 2. dineros ſeràn 14. dineros, cuyo decimo es 1. dinero, y ſobran 4. que reducidos al quebrado ſeràn 44. decimos, cuyo decimo es 44. 100. avos, ò 11. 25. avos; y aſsi, el precio de cada vara ſerà 16. ſueldos 1. dinero y 11. 25. avos.

80 lib.	12 ſueld.			
8 lib.	1 ſueld.	2 din.	$\frac{4}{10}$	
	16 ſueld.	1 din.	$\frac{44}{100}$	

Exemplo II.

Un adminiſtrador, criado, oficial, &c. tiene de ſalario cada año 70. libras 18. ſueldos; para ſaber quanto tiene cada dia, reduzgaſe el ſalario à ſueldos, poniendole debaxo 20. por denominador, y ſeràn 1418. veinte avos de libra; dividanſe por 365. dias, que tiene el año comun, ò por 366. quando es biſieſto, y ſaldràn al dia 1418. 7300. avos de libra, cuyo valor es 3. ſueldos 10. dineros y 226. 365. avos.

De otro modo.

Reduzgaſe el ſalario à dineros, y ſeràn 17016. los quales ſe partirán por 365. dias, y vendrán al quociente 46. dineros y 226. 365. avos, que ſon 3. ſueldos 10. dineros y 226. 365. avos.

Eſta miſma cuenta, para lo civil ſe harà de otro modo, con mucha facilidad; tomeſe el tercio del ſalario, y doblandole ſerán los dineros que vienen al dia, como el tercio de 70. libras ſon 23. cuyo duplo ſon 46. dineros, y ſobra una libra, la qual con los 18. ſueldos hace 38. pues por cada 30. ſueldos que huviere, à demàs del dicho tercio, ſe tomará un dinero; con que ſeràn 47. dineros: eſto es, 3. ſueldos y 11. dineros.

La razon por què no concuerdan eſtas dos cuentas, es, porque en la primera ſe ha tomado el año verdadero de 365. dias; y en la ſegunda ſe ha tomado vulgarmente, contando cada mes por 30. dias, que al año ſon 360. dias; y como en eſta ultima cuenta ſon menos los dias, por eſſo ha ſalido mas ſalario al dia.

Al

Al contrario, para saber el gasto, ò salario de cada dia quanto hace al año, se hará assi: Conviertase el gasto de cada dia en dineros, de los quales se tomará la mitad, y se añadirà à los mismos dineros, y seràn las libras que hacen al año; como si quiero saber 3. sueldos cada dia quantas libras son al año, reduzgo los sueldos á dineros, y son 36. cuya mitad 18. añadida à los 36. hace 54. y tantas libras importan al año. Esta regla tambien es para lo civil, ó gasto ordinario; porque en sì no es verdadera, por la razon antecedente.

Exemplo III.

Un Mercader quiere emplear 1246. libras y 10. sueldos en trigo, cuyo cahiz vale 6. libras; para saber quantos cahices comprarà, escriva el denominador 20. debaxo los sueldos, y reduciendo las libras al quebrado 10. 20. avos, seràn 24930. 20. avos; partidos por 6. saldràn 24930. 120. avos, cuyo valor son 207. cahices y 9. barchillas.

1246 lib. $\frac{10}{20}$ sueld.

De otro modo.

Resuelvanse las libras del empleo en sueldos, juntando los 10. y seràn 24930. reduzganse tambien las 6. libras del precio de cada cahiz en sueldos, y seràn 120. sueldos; partanse aquellos sueldos por estos, y vendràn al quociente 207. cahices y 9. dozavos, que son 9. barchillas.

Exemplo IV.

Un Mercader comprò una pieza de terciopelo por 300. libras 12. sueldos y 6. dineros, cuya vara valia 2. libras 17. sueldos y 2. dineros; para saber quantas varas tirava, ponganse los denominadores debaxo de las especies, exceptando las primeras, y reducidas las dos cantidades al ultimo quebrado, como se hizo en el Capitulo antecedente, se partirà el quebrado de todo el precio, por el quebrado del valor de la vara: esto es, 72150. 240. avos, por 686. 40. avos; y pues los denominadores son iguales, basta partir el un numerador por el otro, porque la proporcion de los quebrados aora solo consiste en los numeradores. (197) Partiendo, pues, 72150. por 686. caben à 105. varas y 60. 343. avos de vara; porque aunque en la realidad el quebrado dividendo es de libra, pero aqui supone por varas; porque tantas varas avrà en el quociente, quantas veces cabe el divisor en el dividendo, ò cantidad.

300 lib. $\frac{12}{20}$ sueld. $\frac{6}{12}$ din.
2 lib. $\frac{17}{20}$ sueld. $\frac{2}{12}$ din.

Exemplo V.

Pedro comprò en Aragon 10. cargas 2. quintales 3. arrobas y dos quintos de cierta mercaderia, por 100. libras 10. sueldos 5. dineros y dos tercios; para saber quanto vale la carga, reduzganse ambas cantidades al ultimo quebrado, como està dicho en el Capitulo antecedente, y seràn 72377. 720. avos de libra, y 657. 60. avos de carga; partase el quebrado de libra, por el de carga, y vendràn al quociente 4342620. 473040. avos de libra, cuyo valor (159) es 9. libras 3. sueldos 7. dineros.

10 carg. $\frac{2}{3}$ quint. $\frac{3}{4}$ arrob. $\frac{2}{5}$

100 lib. $\frac{10}{20}$ sueld. $\frac{5}{12}$ diner. $\frac{2}{3}$

Demonstracion.

De lo que està dicho hasta aora, queda clara la demonstracion; porque el reducir è incomportar unos quebrados en otros, està demonstrado en el Capitulo 2. de los quebrados; la division de los mismos està demonstrada en el Capitulo 6. Luego todo quedò demonstrado.

Observaciones.

Siempre que el numero dividendo, y divisor, despues de reducidos à quebrados tuvieren un mismo, ò igual denominador, con partir solamente los numeradores, sin atender à los denominadores, queda hecha la operacion, como se vè en el exemplo 4. porque la magnitud de los quebrados consiste en el numerador, con relacion, y respeto al denominador: luego teniendo los dos quebrados un mismo, ò igual denominador, toda su magnitud depende solamente de los numeradores: y assi, con partir un numerador por otro, vendrà el quociente que se busca. Por lo qual serà conveniente, siempre que se pueda, reducir los dos quebrados del dividendo, y divisor à un comun denominador, y hacer la division en los numeradores, como si fueran enteros.

Algunas veces importa reducir el dividendo, y divisor à quebrados de un mismo todo; como dividiendo 6. libras 6. sueldos y 3. dineros por 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos de dinero, no se harà bien la division, reduciendo primero el dividendo à quebrado de libra que es la mayor especie, y el divisor à quebrado de sueldo, que es tambien su mayor especie; sino que el divisor se ha de reducir à quebrado de libra, multiplicando, como està dicho, los 8. sueldos por 12. y al producto 96. añadiendo 1. dineros, seràn 97. dineros, los quales se multipli-

plicarán por el denominador 31. y saldràn 3007. añadiendo los 23. seràn 3030. que es el numerador, cuyo denominador no ha de ser el producto de 12. (que es el denominador de 1. dinero) por 31. sino el producto de 20. por 12. y por 31. que serà 7440.

CAPITULO QUINTO.

DEL EXAMEN DE LA LOGISTICA de los numeros denominados.

231 LAs pruebas destas quatro operaciones son las mismas que las de la Logistica de los enteros, y quebrados; porque el sumar se examina por el restar, y el restar por el sumar; el multiplicar por el partir, y al contrario; y assi no me detengo en esto.

CAPITULO SEXTO.

DEL EXERCICIO DE LA LOGISTICA de los numeros denominados.

AUnque parece que bastavan los exemplos, que en essa parte de la Logistica hemos puesto, para el exercicio della; pero porque hasta aora solo hemos explicado las reglas, y no atendido à las circunstancias que en lo mercantil suelen suceder, y otras curiosidades, no serà fuera de proposito el exemplificarlas en las questiones siguientes.

232 Question primera. Pedro compra en Valencia despues de San Juan de Junio 100. libras 7. onzas y tres quatros de seda en madexa á 23. reales y un quartillo; despues la buelve à vender à 25. reales y tres quartillos; preguntase quanto gana, pagados todos los gastos, y aviendo menguado la seda 7. onzas.

Para resolver esta question se ha de suponer, que aqui en Valencia despues de San Juan se quitan 2. quartos y medio de tara para cada libra,

bra, y en llegando à 6. onzas ya se cuenta por libra; á mas desto se pagan 4. dineros al Corredor por cada libra de seda, quitadas las taras, y contando tambien las 6. onzas por una libra; mas quien vende paga por cada dos libras un dinero por el trabajo de pesarla.

Esto supuesto, porque son 100. libras y 7. onzas, tengo de contar 101. libra, para quitar la tara; y assi escrivo à parte 101. dos veces, y mas la mitad 50. media; y sumandolo todo serán 252. quartos y medio la tara, los quales reducidos à libras, y onzas, (159) serán 5. libras 3. onzas zero quartos y medio de tara, la qual restada de la cantidad, quedarà la seda limpia 95. libras 4. onzas 2. quartos y medio.

101
101
50 $\frac{1}{2}$
———
252 $\frac{1}{2}$

100 lib. 7 onz. $\frac{3}{4}$
5 lib. 3 onz. $_{0}$ q. $\frac{1}{2}$
———
95 lib. 4 onz. $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$

Multiplicando aora la seda limpia por el precio de 23. reales y un quartillo; y aunque podia hacer la multiplicacion por 2. libras 6. sueldos y 6. dineros, que es lo mismo: pero la harè por reales deste modo. Multiplicando las 95. libras por 23. reales; despues por el quartillo saco quarto de las 95. libras, y es 23. reales y 18. dineros. Hecho esto, por las 4. onzas saco tercio de todo el precio, que es 7. reales y 18. dineros; por los 2. quartos saco ochavo del dicho tercio, porque 2. quartos es la octava parte de 4. onzas; y ultimamente, por el medio quarto saco quarto del ochavo; porque medio quarto es la quarta parte de 2. quartos. Y sumandolo todo son 2217. reales 17. dineros y un diez y seis avo; que es lo mismo que 221. libra 15. sueldos 5. dineros y un diez y seis avo.

95 lib. 4 onz. $\frac{2}{4}$ $\frac{1}{2}$
23 real. $\frac{1}{4}$
———
285
190
23 real. 18 din.
7 real. 18 din.
23 din. $\frac{1}{4}$
5 din. $\frac{13}{16}$
———
2217 real. 17 din. $\frac{1}{16}$

A este valor de la seda tengo de añadir el derecho del Corredor, que son 4. dineros por libra, que importa 1. libra 11. sueldos y 8. dineros, y assi valdrá la compra de la seda 223. libras 7. sueldos 1. dinero y un diez y seis avo.

Y porque quando se bolviò à vender avia brecado 7. onzas, las restaré de las 100. libras 7. onzas y tres quartos, y quedarán 100. libras

zero

zero onzas y tres quartos; de las quales sacarè la tara, y quedaràn 94. libras 10. onzas y 2. quartos, que multiplicadas por 25. reales y tres quartos, son 2443. reales o. dineros y tres quartos de dinero, que es lo mismo que 244. libras 6. sueldos o. dineros y tres quartos.

94 lib. 10 onz. $\frac{2}{4}$	
25 real $\frac{3}{4}$	
470	
188	
47	
23 real. 12 din.	
12 real. 21 din.	
8 real. 14 din.	
1 real. 1 din. $\frac{3}{4}$	
2443 real. 0 din. $\frac{3}{4}$	

El derecho del Corredor importa 1. libra 11. sueldos y 8. dineros; porque aunque son 94. libras limpias; pero como ay 10. onzas, que passan de media libra, se cuenta por libra entera. El peso son 4. sueldos y dos dineros; lo qual sumado hace la cantidad de 246. libras 1. sueldo 10. dineros y tres quartos de dinero. Resto, pues, el valor de la compra del de la venda, y hallo 22. libras 14. sueldos 9. dineros y 11. diez y seis avos de ganancia.

Advierto, que en algunos generos de seda se quitan dos dineros por cada libra, por razon de los hilos; à mas desto se pagan los portes; y assi todo se deve contar.

233 Question segunda: Un Mercader compra 100. piezas de lienzo, que cada una tira 24. varas y 3. palmos, por 5. sueldos 8. dineros y medio la vara, y ha de pagar de derechos à 1. sueldo y 5. dineros por libra de moneda; preguntase à quanto venderá cada vara, para ganar en todo 19. libras 15. sueldos y 3. dineros?

Convierto las 100. piezas en varas, multiplicandolas por 24. varas y 3. palmos, que tira cada pieza, y hallo 2475. varas, las quales multiplico por los 5. sueldos 8. dineros y medio, que cuesta cada vara, y hallo 706. libras 8. sueldos 1. dinero y medio, por el valor de las 100. piezas. Hecho esto, para hallar el valor de los derechos, multiplico las 706. por 1. sueldo y 5. dineros, y hallo 50. libras y 2. dineros; las quales añadidas á las 706. libras 8. sueldos 1. dinero y medio, son 756. libras 8. sueldos 3. dineros y medio, y en tanto estuvo la compra.

Aora para saber á como se ha de vender la vara para ganar 19. libras 15. sueldos y 3. dineros, añado esto al valor de la compra, y seràn 776. libras 3. sueldos 6. dineros y medio. Divido esto por las 2475. varas, que tienen todas las piezas, reduciendo el valor de la compra à meajas, que serán 372565. y partiendolas por las 2475. varas,

ras, vendràn al quociente 150. meajas y 263. 495. avos, que son 3. sueldos 3. dineros, y mas el quebrado sobredicho de meaja, que por importar poco se puede dexar; y à tanto se deve vender la vara.

234 Question tercera. Un Mercader quiere vender 20. varas de tafetan sencillo, y 16. varas de tafetán doble, todo por 15. libras 12. sueldos y 3. dineros, de suerte, que la vara del tafetàn doble se venda 2. sueldos y 5. dineros mas cara que la del sencillo; preguntase quanto vale la vara de cada genero?

Primeramente se buscarà quanto valen las 16. varas de tafetàn doble à 2. sueldos 5. dineros la vara, y hallarè 1. libra 18. sueldos y 8. dineros; las quales restarè de la cantidad que quiero sacar de la venda, y quedarán 13. libras 13. sueldos y 7. dineros; las quales partirè por la suma de las varas, que es 36. y vendràn al quociente 7. sueldos 7. dineros y 7. 36. avos de dinero, y tanto vale la vara del tafetán sencillo, à los quales añadirè 2. sueldos y 5. dineros, y tendrè el valor de la vara del tafetán doble 10. sueldos 0. dineros y 7. 36. avos.

235 Question quarta. Pedro comprò 200. arrobas y 24. libras de azucar piedra por 6110. libras 15. sueldos y 5. dineros; para saber à quanto venderà la libra, para ganar el tercio del caudal, saque el tercio del dicho caudal, que es 2036. libras 18. sueldos 5. dineros y dos tercios, y juntandolo con el mismo caudal, hallarà 8147 libras 13. sueldos 10. dineros y dos tercios: lo qual partido por 7224. libras, que ay en las 220. arrobas y 24. libras, vendrà al quociente 1. libra 2. sueldos y 6. dineros, por el precio de cada libra que ha de vender.

236 Question quinta. Un Mercader comprò 10. piezas de vayeta blanca, de las quales cada una tirava á 50. varas, por 10. sueldos y 6. dineros la vara; hizolas teñir, pagando 3. sueldos por vara, y se encogiò cada vara del tinte un ochavo de palmo; despues la vende à 15. sueldos la vara: y preguntase quanto gana?

Multipliquense las 10. piezas por las 50. varas que tira cada una; y se hallarán 500. varas, las quales multiplicadas por 10. sueldos y 6. dineros, son 5250. sueldos; y añadiendo 1500. sueldos, que vale el tinte, son 6750. sueldos, que es lo que vale la compra. Hecho esto, multipliquese el denominador 8. del quebrado por 4. palmos que tiene la vara, y serà un 32. avo, respeto de la vara; el qual multiplicado por las 500. varas, importa 15. varas y 5. ochavos, que restadas de las mismas 500. varas, quedan las varas teñidas 484. y 3. ochavos; las quales multiplicadas por los 15. sueldos, que es el precio de la venda,

da, sale la venda 7265. sueldos y 5. ochavos; de la qual, restada la compra, queda de ganancia 515. sueldos y 5. ochavos.

237 Question sexta. Pedro quiere mercar trigo con cierta cantidad de dinero, que no se expressa, y halla de dos generos, el uno á 6. libras, y el otro á 7. libras el cahiz; y aviendo hecho la cuenta con el dinero que trahe, halla, que si le compra del primer precio le sobraràn 3. libras, y si le compra del segundo le faltaràn 5. libras; preguntase quanto dinero tenia, y quantos cahices avia de comprar, para que le sobràran, ò faltàran las libras sobredichas?

Sumense las libras que se dice que faltan, y sobran en las dos compras: esto es, 3. y 5. que son 8. las quales se partiràn por la diferencia de los precios de los dos generos de trigo, que es 1. y vendràn 8. al quociente; pues tantos cahices avia de comprar.

Para saber el dinero que tenia, multipliquense los 8. cahices por 6. libras, y serán 48. libras; y porque à este precio le sobravan 3. libras, añadanse, y seràn 51. libra todo el dinero que tenia. Assimismo, si los 8. cahices se multiplican por 7. libras, seràn 56. libras; y porque à este precio le faltavan 5. libras, restense de 56. y quedaràn otra vez las mismas 51. libra.

238 Question septima. Un hombre comprò 124. varas de tafetán por 50. libras y 10. sueldos; y por no tener mas dinero, huvo de pagar los derechos en tafetan, pagando á 2. sueldos y 6. dineros por libra; pidese quantas varas ha de dar por los derechos?

Primeramente se ha de vèr quanto suben los derechos de las 50. libras y 10. sueldos, à razon de 2. sueldos y 6. dineros cada libra; lo qual se sabe multiplicando las 50. libras y 10. sueldos, por los derechos 2. sueldos y 6. dineros, y seràn 6. libras 6. sueldos y 3. dineros.

Hecho esto se ha de vèr quanto vale cada vara, partiendo las 50. libras y 10. sueldos por las 124. varas, y se hallaràn 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos de dinero por el precio de la vara. Dividanse aora las 6. libras 6. sueldos y 3. dineros que importavan los derechos, por los 8. sueldos 1. dinero y 23. 31. avos que vale cada vara, y saldràn 15. varas y media, que se deven dár por el valor de los derechos.

239 Question octava. Un Pastor comprò cierto numero de ovejas, de suerte, que de cada tres ovejas pagò 4. libras y 10. sueldos; y despues bolviendolas à vender cada 7. ovejas por 9. libras y 2. sueldos hallò de pèrdida 26. libras y 16. sueldos; preguntase quantas eran las ovejas?

Sa-

Saquese el tercio de las 4. libras y 10. sueldos, y será el valor 1. libras y 10. sueldos de cada oveja de la compra; porque 3. ovejas costaron 4. libras y 10. sueldos. Luego el tercio deste precio será el valor de una. Assimismo, saquese el septimo de las 9. libras y 2. sueldos, y saldrá el valor de una oveja 1. libra y 6. sueldos en la venda. Restese un valor de otro, y se hallarán 4. sueldos de pèrdida en cada una. Aora partase la pèrdida 26. libras y 16. sueldos, hecha sueldos, que serán 536. por los 4. sueldos, y saldrán 134. que son las ovejas que tenia.

240 Question nona. Un Polvorista quiere hacer 100. arrobas 30. libras y dos tercios de polvora de 5. as, y as; preguntase quanto pondrá de salitre, azufre, y carbon? Porque la polvora de 5. as, y as consta de 5. partes de salitre, 1. de azufre, y 1. de carbon, sumense 5. 1. y 1. y serán 7. las partes de dicha polvora. Aora, porque el salitre son los cinco septimos de la masa de la polvora, saquense los cinco septimos de las 100. arrobas 30. libras y dos tercios, partiendo por 7. y multiplicando por 5. y serán 72. arrobas 1. libra y un tercio de salitre. Y porque el azufre es el septimo de dicha masa de polvora, saquese el septimo de las 100. arrobas 30. libras y dos tercios, partiendo por 7. y seràn 14. arrobas 14. libras y dos tercios de azufre. Ultimamente, porque el carbon es igual con el azufre, avrá otras 14. arrobas 14. libras y dos tercios de carbon; y todas las tres partes juntas harán la cantidad de la polvora que se desea.

PARTE IV.

DE LA LOGISTICA DE LAS PARTES Decimas.

241. PARTES *Decimas* llaman al quebrado que tiene por denominador una unidad con algunos zeros, (158) como $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{12}{1000}$, &c. Aunque en todo rigor, si el denominador tiene una unidad, y un zero, se avian de llamar *Decimas*; si una unidad, y dos zeros, *Centesimas*; si una uni-

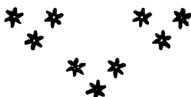
unidad, y tres zeros, *Millesimas*, &c. Pero creo que el llamarse *Decimas*, es, porque guardan proporcion de culpa entre sì; porque provienen de la division de un qualquier todo en 10. partes, y de cada una destas en otras 10. y otra vez de cada una destas en otras 10. y assi infinitamente.

Para mayor inteligencia destas partes decimas, supongo, que un piè, ò qualquier otro modo, se divide en 10. partes iguales, à quien podemos llamar decimas primeras; cada decima primera se divide en 10. partes, que podemos decirles decimas segundas, ò centesimas, respeto del piè; cada centesima en otras 10. à las quales llamarèmos decimas terceras, ò millesimas, respeto del mismo piè, y assi infinitamente.

Con que el denominador de las decimas primeras tiene un zero; el de las segundas dos zeros; el de las terceras tres zeros, &c. A assi podemos escrivirlas en una linea sin forma de quebrado, poniendo despues de un parentesis un numero exponente que declare quantos zeros acompañan à la unidad del denominador; como $\frac{2}{10}$ se podrán escrivir assi 2 (1. Mas $\frac{24}{100}$ assi 24 (2. porque ay dos zeros. Mas $\frac{13}{1000}$ deste modo 13 (3. porque ay tres zeros en el denominador. Mas $\frac{1205012}{10000}$ assi 1205012 (4.

El uso destas partes decimas es de suma conveniencia en la Arithmetica, pues por ellas se evita la molestia de los quebrados, que à cada passo se encuentran; porque como proceden en dupla proporcion, assi como en los lugares, ò assientos de los guarismos, su Logistica no se diferencia de la de los enteros, como luego veremos.

Ultimamente es necessario advertir, que los zeros son inutiles al principio de las decimas, y assi no se escriven bien 300 (4. ò $\frac{300}{10000}$ porque como partiendo el numerador, y denominador de un quebrado por otro qualquier numero, sale otro quebrado igual, pero con menores terminos: (151) si el numerador, y denominador se parten por 100. (que es quitar de entrambos dos zeros) saldrá el quebrado $\frac{3}{100}$ igual à $\frac{300}{10000}$. Luego en las partes decimas no se deven poner zeros al principio de las dichas decimas, ò numerador; porque qualquier quebrado se ha de expressar con los menores terminos que se pueda, para facilitar la operacion; y assi, las dichas partes decimas se declararán assi $\frac{3}{100}$, ò 3 (2.



CAPITULO PRIMERO.

DE LA REDUCCION DE LAS *Decimas.*

EN este Capitulo pondrè diferentes reducciones de las partes decimas, las quales son necessarias para su Logistica, explicandolas con brevedad; pues quien tiene noticia de los quebrados, no le será dificil entenderlas.

PROBLEMA I.

REDUCIR UN QUEBRADO COMUN A DECIMAS.

242 Añadanse al numerador tantos zeros como ha de ser el exponente, y partiendo por el denominador, el quociente serán las decimas; como para reducir quatro quintos à decimas terceras, ò que su exponente sea 3. añado tres zeros al numerador 4. y será 4000. dividole por el denominador 5. y vendrán 800. por el numerador de las decimas, cuyo denominador, es 1000. assi $\frac{800}{1000}$, ò de este modo 800 (3. que es lo mismo que ocho decimos, ò 8 (1.

Assimismo, para reducir *6.* ochavos à segundas, añadiendo dos zeros al *6.* serán *6*00. y partiendo por 8. vendrán *75*. 100. avos, ò *75*. (2. La razon de esta operacion ya queda explicada arriba. (158)

Algunas veces no se puede hacer esta reduccion, porque no se puede partir el numerador aumentado con zeros por el denominador, de suerte, que el quociente venga justo; como para reducir dos tercios à decimas segundas, añadiendo dos zeros al 2. son 200. los quales no se pueden justamente partir por 3. porque sobran 2. En este caso, ò se ha de dexar la reduccion por ser impossible, ò no se ha de hacer caso de lo que sobra, por ser la diferencia pequeña; y assi serán *66*. 100. avos, ò se hará la reduccion à decimas de mayor exponente, como à octavas, assi *66666666* (8. para que la diferencia sea insensible, la qual aqui es dos partes de cien cuentos.

PRO-

PROBLEMA II.

REDUCIR LAS DECIMAS A UN QUEBRADO COMUN.

243 ESte Problema es el miſmo que el 3. del Capitulo 2. de los quebrados; (156) con que tambien ſerá la miſma ſu demonſtracion. Y aſsi, multipliquenſe las decimas por el nuevo denominador, y del producto quitenſe tantos guariſmos primeros, como unidades tiene el exponente; que es lo miſmo que partir por un numero que tenga una unidad, y tantos zeros, como unidades el exponente; como para reducir 8 (1. à quintos, multipliquenſe 8. por 5. y del producto 40. quiteſe el primer guariſmo 0. porque en el exponente ay ſola una unidad, y quedaràn 4. quintos.

Aſsimiſmo, para reducir 224 (3. à ſextos, multiplicando 224. por 6. ſerán 1544. quitando los tres guariſmos primeros, porque en el exponente ay tres unidades, quedará un ſexto. Advierto, que eſta reduccion algunas veces es impoſsible, como en eſte exemplo, porque ſe pierden algunas partes.

PROBLEMA III.

REDUCIR UNAS DECIMAS A OTRAS.

244 PAra reducir las decimas menores à mayores, ſe añadiràn al numerador tantos zeros, como le faltan unidades al exponente; como ſi 324 (3. ſe han de convertir en quintas, añadenſe dos zeros, porque del exponente 3. al exponente 5. vàn 2. y ſeràn 32400 (5. Aſsimiſmo, ſi 84 (2. ſe han de reducir à octavas, añadanſe ſeis zeros, aſsi 84000000 (8. porque como el denominador tiene ſeis zeros mas: eſto es, eſtá multiplicado por 1000000. tambien el numerador ſe ha de multiplicar por el miſmo numero, que es añadir los zeros; y entonces, como, los terminos del primer quebrado 84. 100. avos eſtán multiplicados por un miſmo numero 1000000. las decimas que ſaldrán ſeràn iguales à las primeras.

Al contrario, ſi las decimas mayores ſe han de reducir à menores, como 245 (4. à terceras, ſe quitarán tantos guariſmos primeros, como ſe han de quitar unidades al exponente, y aſsi quedaràn 24 (3. Aſsimiſmo, para reducir 12546 (8. à quintas, ſe quitarán [illegible]

y quedaràn 12 (5. porque como el exponente 8. ò denominador 100000000. tiene tres zeros mas que el exponente 5. ò denominador 100000. los terminos del quebrado 12546. 100000000. avos se han de partir por 1000. que es lo mismo que quitar tres guarismos de cada parte, y quedaràn 12. 100000. ò 12 (5.

PROBLEMA IV.

REDUCIR LOS ENTEROS A DECIMAS, Y AL CONTRARIO.

245 PAra reducir los enteros à decimas, añadense tantos zeros como ha de ser el exponente: como 86. reducidos à terceras, seràn 86000 (3. y 642. reducidos à sextas, seràn 642000000 (6. porque añadir zeros, es lo mismo que multiplicar por un numero que tenga una unidad, y otros tantos zeros, que es el denominador; y el reducir los enteros à un denominador determinado, es multiplicarle (161) por el denominador.

246 Para reducir las decimas à enteros, apartense de mano derecha con una distincion tantos guarismos como dice el exponente, y los de mano izquierda seràn enteros; y assi 46, 30531 (5. seràn 46. enteros, y 30531 (5. Assimismo 865, 003 (3. son 865. enteros, y 003 (3. ò 3. (3. Porque quando el quebrado es mayor que un entero, para reducirle à enteros se ha de partir el numerador por el denominador; (164) y como el denominador aqui es una unidad con zeros, basta separar tantos guarismos primeros, como tiene zeros el denominador; porque esto es partir por numero que consta de una unidad, y zeros. (90)

PROBLEMA V.

REDUCIR LOS NUMEROS DENOMINADOS A DECIMAS.

247 REduzganse las especies menores al ultimo quebrado, como se hizo en el multiplicar numeros denominados; y reducido este quebrado à decimas, (242) se escrivirà à mano izquierda la especie mayor, poniendo una distincion antes, para denotar que son enteros; como si se han de reducir 3. libras 2. sueldos y 8. dineros à centesimas, escritos los denominadores

3 lib. $\frac{2}{20}$ suel. $\frac{8}{12}$ din.

dores 20. debaxo los 2. sueldos, y 12. debaxo los 8. dineros, se incorporarà el quebrado 8. dozavos en 2. veinte avos, (168) multiplicando los denominadores entre sì, para hacer el nuevo denominador 240. despues multiplicando el numerador 2. por el denominador 12. y al producto 24. añadiendo el numerador 8. será el nuevo numerador 32. y el quebrado 32. 240. avos, el qual reducido à segundas, ò centesimas, (242) será 13 (2. y escritas las 3. libras à la mano izquierda, serán 3, 13 (2.

Assimismo se han de reducir á quintas 8. varas 3. palmos 2. quartos y medio. Escritos los denominadores debaxo las especies menores, è incorporados los quebrados, serán 29. 31. avos. Los quales se reducirán à quintas, (242) y añadidas las 8. varas à la izquierda, serán 8, 90625 (5.

Adviertanse, que algunas veces no se pueden reducir los numeros denominados à decimas menores, sino que precisamente ha de ser la reduccion á mayores, para que el error no sea muy notable; como si se han de reducir 16. libras 1. sueldo y 1. dinero à decimas primeras, el quebrado incorporado es 13. 240. avos; añadiendo un zero al numerador, por razon de las decimas primeras, será 130. el qual no se puede partir por el denominador 240. como ordena la regla; (242) y assi, es preciso lo menos, reducirlas à decimas segundas, añadiendo dos zeros, y será 1300. partiendo, pues, por 240. vienen 5. con que serán las decimas 16. 05 (2.

Adviertase tambien, que si despues de la reduccion saliere el quociente con menos guarismos que unidades tiene el exponente, ò zeros el denominador, como en el exèmplo antecedente, donde el quociente es un guarismo solo 5. y el exponente es 2. añadanse tantos zeros à la mano izquierda, hasta que el numero de los zeros, y guarismos significativos de las decimas sea igual al exponente; y assi, en dicho exemplo se ha añadido un zero, porque el numero de los guarismos de las decimas es uno solo, y el exponente es dos.

Demonstracion.

El reducir el quebrado à decimas ya queda demonstrado en el Problema primero de este Capitulo. Aora solo falta dar la razon, por què se ha de añadir la especie mayor à la mano izquierda; la qual es esta. La especie mayor es entero, y para reducir los enteros à quebrado, se multiplican por el denominador, y se añade el numerador; (191) y si el denominador es una unidad con algunos zeros, como aqui en las decimas, basta añadir à los enteros otros tantos zeros como ay en el denomina-

minador, (69) y despues escrivir el numerador del quebrado en el lugar de los zeros; como si son 3. libras, y 13. 100. avos de libra, para reducir las 3. libras al quebrado, se añaden dos zeros al entero 3. y serán 300. 100. avos; y como aora se han de añadir los 13. que es el numerador, será lo mismo que ponerlos en el lugar de los zeros, de este modo $\frac{313}{100}$, donde se vè claramente, que añadiendo los enteros al lado izquierdo de las decimas, quedan reducidos.

De aqui nace la razon, porque quando el numero de los guarismos de las decimas no es tanto como el exponente, se han de poner entre las decimas, y enteros tantos zeros, como faltan hasta igualar con el exponente; porque desde el primer guarismo de las decimas, hasta los enteros, ha de haver tantos guarismos, como unidades tiene el exponente, ò zeros el denominador: luego si faltan se han de suplir con zeros, que es llenar los lugares, ò assientos de los guarismos, para que los enteros disten del principio tantos lugares, como tiene zeros el denominador.

PROBLEMA VI.

HALLAR EL VALOR DE LAS DECIMAS.

148 ESte Problema no encierra otra dificultad mas, que hallar el valor de un quebrado comun. Sean, pues, 38 (2. de sueldo, para saber quantos dineros valen, multipliquense los 38. por 12. dineros que vale el sueldo, y serán 456. dividanse por 100. que es el denominador, quitando los dos guarismos primeros 56. por otros tantos zeros que en el denominador, (90) y quedarán 4. dineros, y 56 (2. de dinero, que es el valor de las sobredichas decimas.

Assimismo, para saber quanto importan 36, 857 (3. de milla, medida geometrica, porque los guarismos de las decimas son cinco, y el exponente es 3. separo con una distincion los dos ultimos guarismos, que son enteros, y serán 36. millas y 857 (3. de milla. Aora, porque la milla tiene 1000. passos, multiplico las decimas 857. por 1000. y quitando del producto tres zeros, porque el exponente es 3. quedarán 857. passos justos: y assi, las sobredichas decimas importan 36. millas y 857. passos. La demonstracion es la misma que la de los quebrados.

* * *

CAPI-

CAPITULO SEGUNDO.

DEL SUMAR, Y RESTAR DECIMAS.

249 REduzganſe à la denominacion, ò exponente mayor: (244) luego ſe ſuman, y reſtan por el modo ordinario de ſumar, y reſtar enteros.

Exemplo I.

Se han de ſumar 16. enteros con 13 (2. y 184 (5. reducido todo à quintas, que es la denominacion mayor, ſerán como parece en la formula. Sumenſe, como ſi fueran enteros, y ſerá la ſuma 16, 13184 (5.

16, 00000	(5
13000	(5
184	(5
16, 13184	(5

Exemplo II.

Para ſumar 10. enteros con 12, 92 (2. y 13, 1065 (4. y 63 (6. ſe reducirán à ſextas, y ſumarán por el modo ordinario de ſumar enteros, como parece en el exemplo.

10, 000000	(6
12, 920000	(6
13, 106500	(6
63	(6
36, 026563	(6

Exemplo III.

250 Para reſtar 26, 43 (2. de 146. 1301 (4. ſe reducirán à una miſma denominacion de quartas, como ſe vè en el exemplo, y reſtando por el modo ordinario, quedarán 119, 7001 (4.

146, 1301	(4
26, 4300	(4
119, 7001	(4

Exemplo IV.

Se han de reſtar 3. libras de peſo 4. onzas, y 3. quartos, de 4. libras 10. onzas y media. Reducidas las eſpecies à qualeſquiera decimas, (247) ſerán 4. 875 (3. y 3, 395 (3. reſtenſe por el modo ordinario, y quedarán 1, 480 (3.

4, 875	(3
3, 395	(3
1, 480	(3

Demonstracion.

La demonstracion es manifiesta, por el sumar, y restar quebrados; porque estando reducidas las decimas à una misma denominacion, los numeradores se suman, y restan como si fueran enteros, como se demonstrò en el sumar, y restar quebrados.

CAPITULO TERCERO.

DEL MULTIPLICAR, Y PARTIR DECIMAS.

251 PAra multiplicar se guarda el estilo ordinario de multiplicar enteros, y la suma de los exponentes es el exponente del producto.

Exemplo I.

Se han de multiplicar 38, 46 (2. por 1, 50 (2. Multiplicando los numeros como si fueran enteros, y sumando los exponentes, saldrà el producto 57, 6900 (4.

```
  38,46(2
   1,50(2
 ---------
  19,2300
  38,46
 ---------
  57,6900(4
```

Exemplo II.

Pedro comprò 4. arrobas 3. libras y 5. onzas de cierta mercaderia, por 3. libras 19. sueldos y 6. dineros la arroba; para saber todo el valor reduzga la cantidad à decimas, qualesquiera que sean, y quanto mayores mejor: v. g. à sextas, (148) y serán 4, 094907 (6. Reduzgase tambien el precio à decimas: v. g. à terceras, y serán 3, 975 (3. Multipliquense unas por otras por el modo ordinario, y sumando los exponentes se hallará el exponente del producto, como parece

```
    4,094907(6
        3975(3
 ---------------
     20474535
    28664349
   3,6854163
  12,284721
 ---------------
  16,277255325(9
```

en

en el exemplo, cuyo valor (248) es 16. libras 5. sueldos 6. dineros, y 13. 24. avos.

Exemplo III.

Se han de multiplicar 943 (3. por 2, 52 (2. Multiplicad las decimas, como se vè, se sumarán los exponentes, y serà el producto 19, 35036 (5.

```
      943 (3
     2, 52 (2
    ---------
      1886
     4715
   18,86
    ---------
  19,35036 (5
```

Exemplo IV.

Para saber quanto valdrán 3. cahices de trigo 8. herchilas y media, por 7. libras cada cahiz, se reducirá la cantidad, como queda dicho, y serán 3, 708 (3. Multipliquense por 7. libras, que son 7 (0. que es el modo para escrivir los enteros en forma de decimas, quando no se pide que se reduzgan à decimas determinadas, y será el producto 25, 956 (3.

```
   3, 708 (3
        7 (0
   ----------
  25, 956 (3
```

Exemplo V.

Se han de multipliear 3. grados 32. min. y 54. segund. por 25. min. y 40. segundos. Reduzganse los 3. grados à minutos, multiplicando por 60. y añadiendo los 32. minutos, seràn 212. minutos. Aora los segundos del numero multiplicando, y multiplicador, reduzganse à decimas, qualesquiera que sea: v. g. centesimas, añadiendoles dos zeros, y partiendo por 60. saldràn las decimas 212. 90 (2. y 25, 66 (2. Multipliquense aora unas decimas por otras, como si fueran enteros, y sumando los exponentes serà el producto 5463, 0140 (4. Para saber su valor, partanse los 5463. segundos por 60. y seràn 91. minuto y 3. segundos. Las restantes decimas 0140. no hacen aun un segundo.

```
     212, 90 (2
      25, 66 (2
   --------------
      12, 7740
     127, 740
    1064, 50
    4258, 0
   --------------
   5463, 0140 (4
```

Quando no ay segundos, se añadiràn al principio tantos zeros, como unidades ha de tener el exponente; y assi, para reducir 54. minutos à centesimas, seràn 54, 00 (2.

De-

Demonstracion.

El multiplicar quebrados, es multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, como queda demonstrado; pues como aqui se multiplican las partes decimas, que son los numeradores, y se suman los exponentes, que es lo mismo que multiplicar los denominadores: porque para multiplicar un numero por otro, que conste de una unidad, y zeros, basta añadir otros tantos zeros, como queda tambien probado: se infiere claramente, que assi se deven multiplicar las decimas.

252 Para partir se guarda el estilo ordinario de partir enteros, y el exponente del partidor se resta del exponente de la cantidad, para tener el exponente del quociente. Pero quando el partidor fuere mayor que la cantidad, ò tambien el exponente del partidor fuere mayor que el de la cantidad, se añadiràn algunos zeros à la cantidad, y otras tantas unidades al exponente.

Exemplo I.

Se han de partir 3605 (6. por 34 (4. Dividanse 3605. por 34. por el modo ordinario, y restando el exponente 4. del exponente 6. quedaràn 2. con que serà el quociente 106 (2. de lo que sobra no se hace caso.

    3605 (6   34 (4
     205   100 (2
       1

Exemplo II.

Para partir 346 (5. por 86 (8. porque el exponente de la cantidad es menor que el del partidor, añadirè à la cantidad algunos zeros, como 6. y aumentarè otras tantas unidades su exponente; con que seràn 346000000 (11. los quales partidos por 86 (8. caben al quociente 4023255 (3.

    346000000   86 (8
      200   4023255 (3
       280
        220
         480
          500
           70

Exemplo III.

Se han de partir 24. enteros por 125 (4. Porque el numero de las decimas es mayor que el de los enteros, y tambien el exponente, añadanse algunos zeros à los enteros, de suerte, que sean mas que las unidades del exponente de las decimas, y seràn 24, 00000 (5. y hagase la particion como antes.

Exem-

Exemplo IV.

Pedro comprò 15. varas y dos palmos de terciopelo, y le costò todo 60. libras 12. sueldos y 3. dineros. Para saber quanto costò la vara, resuelva las dos cantidades en decimas, qualquier que sean, mientras sean proporcionadas para poder partir, y seràn los del precio 60, 6125 (4. y de las varas 15, 5 (1. Hagase la division de aquellas decimas por estas, y vendrá el quociente 3, 910 (3. por el valor de cada vara.

Demonstracion.

Quando los terminos del quebrado dividendo se pueden partir enteramente por los del divisor, partiendo unos por otros està concluìda la division; (196) pues aqui se parten las decimas del dividendo por la del divisor, que son los numeradores, y restando los exponentes es lo mismo que partir; porque para dividir por numero que consta de una unidad, y zeros, basta quitar otros tantos guarismos del dividendo, que es restar un exponente de otro: luego esta regla del partir enseña la verdad.

Solamente puede obstar lo que sobra en la division de las decimas; pero ya se ha dicho, que de esto no se hace caso, porque el uso de las decimas mas sirve para facilitar las operaciones, por otra parte molestas, que para ostentar la certeza Arithmetica; y reduciendo à decimas mayores, ò cuyo exponente tenga muchas unidades, se hace insensible lo que sobra.

Y assi tenga advertido el estudioso en Arithmetica, que las partes decimas no siempre proceden con todo el rigor Mathematico, para que no se canse en quererlas cotejar con las otras operaciones; pues, como queda dicho, solo sirven de alivio en las operaciones molestas de quebrados, y otras reglas.



LIBRO

LIBRO II.

DE LA ANALOGIA DE LOS NUMEROS.

ANALOGIA es lo mismo que *Proporcion*; y assi, el assunto de este Libro es tratar de los numeros proporcionales, y de sus propriedades. Dividase en quatro partes, correspondientes à las quatro reglas en que se comprehenden todas las proporciones. La primera es de los numeros proporcionales, ò *Regla de tres.* La segunda, de las *Compañias*. La tercera, de las *Aligaciones*. La quarta, de *Falsas posiciones*.

PARTE I.

DE LOS NUMEROS PROPORCIONALES, ò Regla de tres.

ANTES de explicar la regla de tres, ò de proporcion, será conveniente que trate de la Theorica de las Razones, y Proporciones de los numeros; quien no gustáre de ella, sino solo de la practica, podrá dexarla, y passar à la regla de tres.

DE-

DE LA RAZON DE LOS NUMEROS, y su division.

253 RAzon numèrica es la *relacion*, *respeto*, *ò habitud que un numero tiene à otro*, *en quanto es mayor*, *igual*, *ò menor*. Como el *6*. comparado con el 3. dice razon, en quanto es mayor: El mismo *6*. comparado con el *6*. dice razon, en quanto es igual: Y el mismo 6. comparado con el 8. tiene razon, en quanto es menor. El numero comparado se dice *Antecedente*, y aquel à quien se compara se llama *Consequente*; y assi, en la razon de 8. à 4. el 8. es antecedente, y el 4. consequente.

Advierto aqui, que Euclides en la *difin*.3. *del lib*. 5. definiò la razon, diciendo, que es una mutua habitud de dos quantidades de un mismo genero, en quanto se comparan, segun la quantidad; pero esta es difinicion comun à la quantidad continua, y discreta, y aora solo tratamos de la discreta, ò del numero; con que ha sido preciso àver dado otra difinicion mas individual, aunque en la substancia es la misma.

254 Dividese la razon en *razon de igualdad*, *y desigualdad*: La razon de igualdad es la relacion de un numero à otro igual; como 6. à *6*. La razon de desigualdad es el respeto, ò relacion de un numero à otro desigual; como 4. à 8. 5. à 7. 9. à 2. La razon de igualdad no se puede subdividir, porque no ay mas, ni menos igual.

255 Pero la razon de desigualdad se subdivide en razon *de mayor desigualdad*, *y menor desigualdad*. La razon de mayor desigualdad, es la relacion de un numero mayor à otro menor; como 12. à 4. item 8. à 1. La razon de menor desigualdad, es el respeto de un numero menor à otro mayor; como 4. à 12. item 1. à 8. Con que la razon que es de mayor desigualdad, como de *6*. à 1. invirtiendo los terminos se hace de menor desigualdad, como de 1. à *6*.

La razon de mayor desigualdad se subdivide en cinco generos: es à saber, en razon *Multiplice*, *Superparticular*, *Superparciente*, *Multiplice superparticular*, *y Multiplice superparciente*.

256 La razon *Multiplice*, es, quando el antecedente contiene al consequente muchas veces justas, sin sobrar algo. Si le contiene dos veces justas, se llama *Dupla*, como 2. à 1. item 4. à 2. item 24. à 12. Si le contiene tres veces justas, se dice *Tripla*, como 3. à 1. item 15. à 5. item 6. à 2. Si quatro veces, *Quadrupla*, como 4. à 1. item 20. à 5. item 100. à 25. Si cinco veces, *Quintupla*. Si seis, *Sextupla*; y assi de las demàs.

La

257 La razon *Superparticular*, es, quando el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobra una parte aliquota del consequente; la qual, si es la mitad de dicho consequente, se dice *Sequialtera*; como 3. à 2. item 6. à 4. item 9. à 6. Si la parte aliquota que sobra es el tercio del consequente, se llama *Sesquitercia*; como 4. à 3. item 8. à 6. item 12. à 9. Si es el quarto, se dice *Sesquiquarta*; como 5. à 4. item 10. à 8. 15. à 12. Si es el quinto, *Sesquiquinta*; como 6. à 5. item 12. à 10. item 18. à 15. Si es el sexto, *Sesquisexta*. Si el septimo, *Sesquiseptima*, *&c.*

258. La razon *Superparciente*, es, quando el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobra una parte aliquanta del consequente: y porque la parte aliquanta se expressa con dos nombres, como dos tercios, tres quartos, dos quintos, &c. tendràn tambien dos nombres las especies de esta razon, pues por el primer nombre, si es dos, se dice *Superbiparciente*; si tres *Supertriparciente*; si quatro, *Superquadruparciente*, *&c.* Y por razon del segundo nombre se añaden *tercias*, *quartas*, *quintas*, *sextas*, *&c.* Como la razon de 5. à 3. ò de 10. à 6. ò de 15. à 9. es *Superbiparciente tercias*, porque el antecedente contiene al consequente una sola vez, y sobran dos tercios del consequente. La razon de 7. à 4. ò de 14. à 8. ò de 21. à 12. es *Supertriparciente quartas*; porque el antecedente contiene una sola vez al consequente, y sobran tres quartos del consequente. La razon de 7. à 5. ò de 14. à 10. ò de 21. à 15. es *Superbiparciente quintas*, porque sobran dos quintos del consequente.

Para distinguir estos dos generos de razones *Superparticular*, y *Superparciente*, que à los poco exercitados causa alguna dificultad, se observarà esta regla, la qual despues aplicaremos à todas las razones: Dividase el antecedente por el consequente, y el quociente serà una unidad, y un quebrado; pues si el denominador del tal quebrado se puede partir justamente por el denominador, serà la razon superparticular, y este ultimo quociente le darà el nombre; como para conocer la razon de 8. à 6. dividiendo 8. por 6. viene 1. y dos sextos; pues porque partiendo el denominador 6. por el numerador 2. salen 3. justos, serà sesquitercia. Assimismo, para conocer la razon de 30. à 25. partiendo, viene al quociente 1. y cinco veinte y cinco avos; y porque el denominador 25. se puede partir justamente por el numerador 5. saliendo 5. por quociente, serà sesquiquinta.

Pero si el denominador del quebrado no se puede partir justamente por su numerador, serà la razon superparciente, y el mismo quebrado le darà el nombre; como para conocer la razon de 8. à 7. partiendo vienen

nen al quociente 1. y dos ſeptimos; y pues el denominador 7. no ſe puede partir enteramente por el numerador 2. ſe dirà por el 2. *Superbiparciente*, y por el 7. ſe añadirà *ſeptimas*. Aſsimiſmo, la razon de 11. à 7. ſerà *Superquadruparciente ſeptimas*; porque partiendo ſalen 1. y quatro ſeptimos. Tambien la razon de 15. à 8. ſerá *Superſeptuparciente octavas*; porque dividiendo, vienen al quociente 1. y 7. octavos.

Pero advierto, que el quebrado ſe ha de reducir à los menores terminos, para dar el debido nombre, y aſsi, la razon de 14. à 8. no ſe dirá *Superſextuparciente octavas*, aunque partiendo ſea el quociente 1. y ſeis ochavos; ſino *Supertriparciente quartas*, porque el quebrado ſeis ochavos ſe reduce à tres quartos. Del miſmo modo à la razon de 20. à 14. no la nombrarèmos *Superſextuparciente decimas quartas*, aunque el quociente ſea 1. y 6. 14. avos; ſino *Supertriparciente ſeptimas*, porque el quebrado ſe ha de reducir à tres ſeptimos.

259 La razon multiplice ſuperparticular, es, quando el antecedente contiene al conſequente muchas veces, y ſobra una parte aliquota del conſequente; ſi le contiene dos veces ſe llama *Dupla*; ſi tres, *Tripla*; ſi quatro, *Quadrupla*, *&c.* y ſi ſobra un tercio, ſe añade *Seſquitercia*; ſi un quarto, *Seſquiquarta*, *&c.* Y aſsi, la razon de 20. à 6. es *Tripla ſeſquitercia*; porque el 20. contiene al 6. tres veces, y ſobran dos ſextos, ò un tercio. Tambien la razon de 11. à 2. es *Quintrupla ſeſquialtera*; porque el 11. contiene al 2. cinco veces, y ſobra una mitad. Aſsi miſmo, la razon de 30. à 9. ſe llama *Tripla ſeſquitercia*; porque el 30. contiene al 9. tres, y ſobran tres novenos, ò un tercio.

260 La razon multiplice ſuperparciente, es, quando el antecedente contiene al conſequente muchas veces, y ſobra una parte aliquanta del conſequente; ſi le contiene dos veces ſe dice *Dupla*; ſi tres, *Tripla*, ſi quatro, *Quadrupla*, *&c.* Y ſi ſobran dos tercios, ſe añade *Superbiparciente tercias*, ſi tres quartos, *Supertriparciente quartas*, *&c.* como eſtà dicho en la razon ſuperparciente. Y aſsi, la razon de 17. à 6. es *Dupla ſuperquintuparciente ſextas*; porque el 17. contiene al 6. dos veces, y ſobran cinco ſextos. Aſsimiſmo, la razon de 31. à 4. es *Septupla ſupertriparciente quartas*; porque el 31. contiene al 4. ſiete veces, y ſobran tres quartos; y aſsi de las demás.

De ſuerte, que eſtos dos ultimos generos de razones ſon compueſtos de multiplice, y de ſuperparticular, ò ſuperparciente; y aſsi, ſabidas las partes de que ſe componen, no ſe pueden ignorarlos todos, porque tienen los miſmos nombres, y ſubdiviſiones.

La razon de menor deſigualdad tambien ſe ſubdivide en otros cinco generos, añadiendo la particula *ſub*, los quales ſon: *Submultiplice*, *Sub-*

Subsuperparticular , *Subsuperparciente* , *Submultiplice superparticular* , y *Submultiplice superparciente* ; y cada genero de estos se subdivide en las mismas especies que los de la razon de mayor desigualdad , solo añade la particula *sub*.

261 La razon submultiplice , es , quando el antecedente es contenido en el consequente muchas veces justas ; las quales , si son dos , se dice *Subdupla* , como 1. à 2. item 4. à 8. si tres, *Subtripla*, como 1. à 3. item 6. à 18. si quatro , *Subquadrupla*, como 1. à 4. item 2. à 8. y assi de las demás.

262 La razon subsuperparticular, es, quando el antecedente es contenido en el consequente una sola vez , y sobra una parte aliquota del antecedente ; la qual , si es la mitad , se dice *Subsesquialtera* , como 2. à 3. item 4. à 6. Si el tercio , *Subsesquitercia* , como 3. à 4. item 6. à 8. Si el quarto , *Subsesquiquarta* , como 4. à 5. item 8. à 10. y assi de las demàs.

263 La razon subsuperparciente, es, quando el antecedente se contiene en el consequente una sola vez , y sobra una parte aliquanta del antecedente ; la qual , si es dos tercios , se dice *Subsuperbiparciente tercias* ; si tres quartos , *Subsupertriparciente quartas* , *&c.* como se dixo en la razon superparciente , solo se añade el *sub*.

264 Las razones submultiplice superparticular , y submultiplice superparciente son compuestas de la submultiplice , y de la subsuperparticular, y subsuperparciente ; y assi no tengo que explicarlas , pues entendidas las partes no se puede ignorar el todo.

265 De suerte , que la razon de menor desigualdad , es inversa de la de mayor desigualdad ; y assi , invirtiendo los terminos de la una sale la otra , como la razon de 4. à 1. es quadrupla , y la de 1. à 4. es subquadrupla. La razon de 2. à 3. es subsesquialtera , y la de 3. à 2. es sesquialtera. La razon de 30. à 11. es dupla superoctuparciente undecimas, y la de 11. à 30. es subdupla superoctuparciente undecimas , y assi de las demás. Solo se ha de tener grande cuydado en añadir la particula *sub*. quando se nombra alguna razon de menor desigualdad , porque por ella se distingue de la de mayor desigualdad.

266 De lo dicho hasta aqui se concluye, que los generos de la razon son once : es à saber, uno de igual, cinco de mayor desigualdad, y otros cinco de menor desigualdad; y que no sean mas, ni menos lo pruebo assi. Un numero, respeto de otro, ò es igual, ò mayor, ò menor. Si igual, constituye un genero de razon de igualdad, la qual, como queda advertido, no se puede subdividir mas : Si es mayor , puede ser de cinco maneras; porque , ò contiene al menor algunas veces justas, y es multiplice, ò se con-

contiene una sola vez, y sobra parte aliquota, y es superparticular; ò sobra parte aliquanta, y es superparciente; ò le contiene muchas veces, y sobra parte aliquota, y es multiplice superparticular; ò conteniendole muchas veces sobra parte aliquanta, y es multiplice superparciente. Assimismo, si es menor ay otros cinco generos; luego todos son once.

267 Advierto aqui, que comunmente los Autores dividen la razon en general en razon *Racional*, é *Irracional*; la racional es la que se puede declarar por numeros; y assi un numero á otro necessariamente dice razon racional. La irracional es la que no se puede expressar con numeros, como la razon que ay entre el lado, y la diagonal de un quadro; ò entre raìz quadrada de 7. y raìz quadrada de 3. como lo verèmos en otro lugar. Pero como aqui solo tratamos de la razon que se halla entre numeros, no ay necessidad de explicar mas esta division; porque en los numeros no ay razon irracional.

Observaciones.

268 Una razon se puede expressar con diferentes terminos; como la razon de 2. à 1. es la misma que la de 4. à 2. y que la de 30. à 15. y que la de 100. à 50. porque en todas el antecedente tiene un mismo respeto al consequente; esto es, le contiene dos veces. Assimismo, todas estas razones 2. à 3. item 4. á 6. item 12. à 18. item 100. à 150. &c. son iguales, ò las mismas; porque en todas el antecedente se contiene en el consequente una vez, y sobra una mitad del antecedente; y assi son subsesquialteras. La razon de esto es clara; porque la razon consiste en la relacion, ò respeto del antecedente al consequente: luego mientras se guarde la misma relacion no se muda la razon, aunque los terminos sean diferentes.

Y aunque una razon se pueda declarar con diferentes terminos, pero es conveniente expressarla con terminos menores; porque teniendo pocas unidades, facilmente se conoce la relacion, ò continencia del antecedente en el consequente, ò al contrario; y assi la razon tripla con mayor facilidad se conoce por estos terminos 3. à 1. que por estos 81. á 27. como se dixo en los quebrados.

269 Los terminos mismos, por los quales se puede declarar una razon, se dicen *Raices* de la tal razon; y assi la raìz de la razon quadrupla es la razon de 4. á 1. La de la superbiparciente tercias es la razon de 5. à 3. porque de ellos, como de raìz, proceden todos los otros terminos con que se puede expressar la misma razon.

270 En la colocacion de los terminos para expressar las razones se deve tener grande cuydado, porque los principiantes muchas veces no reparan en hacer antecedente al termino que avia de ser consequente; y

assi para declarar la razon dupla, suelen decir que es de 1. á 2. siendo en la realidad de 2. à 1. en lo qual se engañan totalmente; porque quando la cantidad mayor se compara à la menor, es razon de mayor desigualdad; y quando la menor se refiere à la mayor, es la razon de menor desigualdad, que son del todo diferentes; pues en aquella el antecedente contiene al consequente, y en esta es contenido.

Y paraque esta diferencia estè manifiesta, me valdrè de los numeros contractos. Supongo, pues, que los Soldados del Exercito de España tienen la razon de 2. à 1. à los Soldados de Francia; si los de Francia son 10000. los de España serán 20000. pero si se dixera que la razon es de 1. á 2. siendo los de Francia 10000. serìan los de España 5000. que es la mitad: de suerte, que la diferencia serìa de tener España 20000. Soldados, à tener 5000. porque la razon de 2. à 1. significa doblado y la de 1. á 2. la mitad.

De aqui consta con evidencia, que no passa lo mismo en la quantidad respectiva, ò en las razones, que en la absoluta; porque en la quantidad absoluta la misma distancia ay de un termino à otro, que de este à aquel: v. g. la misma distancia ay de Valencia á Madrid, que de Madrid á Valencia; pero en las razones, no ay la misma razon de un termino á otro, que de este á aquel: esto es, de 2. à 1. que de 1. à 2. como queda advertido.

271 Ultimamente conviene observar, que las razones unas son *iguales*, *semejantes*, *las mismas*, *ò de una especie* (todos estos nombres significan lo mismo); y otras *desiguales*, *desemejantes*, *diferentes*, ò *de diversa especie*. Las iguales son las que dicen una misma relacion, ò habitud, como 2. à 1. item 6. á 3. item 2. á 6. porquę en todas el antecedente dice relacion de doblado al consequente, y assi son duplas; de suerte, que las razones iguales tienen un mismo nombre: esto es, que todas las duplas son iguales, todas las triplas, todas las sesquialteras, &c.

Las razones desiguales son las que no dicen una misma relacion, ò habitud. Como la razon de 3. à 1. es desigual á la de 4. à 1. porque en aquella la relacion es de triplo, y en esta es de quadruplo: assimismo la razon de 2. à 3. es desemejante á la de 3. à 2. porque en aquella el respeto es de subsesquialtera, y en esta de sesquialtera: con que no tienen un mismo nombre.

Pero advierto, que no es lo mismo razon igual, que razon de igualdad; ni razon desigual, que de desigualdad: porque la razon de igualdad, ò desigualdad es el respeto entre dos quantidades iguales, ò desiguales; pero la razon igual, ò desigual es la comparacion de dos, ò muchas

ellas razones, en quanto tienen el mismo, ò diferente respeto; de suerte, que si se compàran 3. con 6. es razon de desigualdad; pero si comparamos la razon de 3. à 6. con la de 4. à 8. se dice que las tales razones son iguales, como aora veremos.

DE LA PROPORCION, Y PROPORCIONALIDAD.

272 Proporcion es el respeto, ò relacion de una razon à otra, con que es razon de razones; porque assi como un numero se compàra à otro en quanto es mayor, igual, ò menor; tambien una razon se puede comparar à otra en quanto es mayor, menor, ò igual; y assi como la comparacion de los numeros se llama *Razon*, del mismo modo la comparacion de las razones se dice *Razon de razones*, ò *Proporcion*.

De modo, que las razones comparadas unas con otras, pueden ser mayores, menores, ò iguales; aquellas razones son mayores, que dicen mayor continencia, como la razon de 4. à 1. es mayor que la de 3. á 1. porque mayor continencia es la quadrupla de 4. à 1. que la tripla de 3. á 1. Aquellas razones son menores, que dicen menor continencia, como la razon de 2. á 1. respeto de la de 6. à 2. y aquellas son iguales, que tienen igual continencia, como la razon de 6. à 3. respeto de la de 2. à 1. porque entrambas son duplas; pues la relacion de una razon á otra, en quanto es mayor, menor, ò igual, se dice Proporcion.

Dirà alguno, si la razon es relacion, còmo puede aver una mayor que otra; porque el ser mayor, ò menor, es propio de la quantidad? Respondo, que es verdad que la razon es del genero de relacion; pero por la intima afinidad que tiene con la quantidad, participa tambien sus propiedades, como lo vemos en el peso, sonido, movimiento, y otras muchas cosas, que aunque no sean quantidades, pero se dicen mayores, ò menores.

Esta definicion de la proporcion comprehende todas las comparaciones de las razones; y assi es mas universal que la de Euclides *lib. 5. difin.* 4. en donde solo difine la proporcion que ay entre razones semejantes, diciendo, que la proporcion es *rationum similitudo*, una semejanza de razones; pero no ay por què nos estrechemos à tan angostos terminos de tratar solo de la proporcion de razones semejantes, pudiendo comprehenderlas todas. Este ensanche devemos al P. Gregorio á S. Vincencio, de la Compañia de Jesus, que con singular agudeza fue el primero que tratò esta materia.

De lo dicho hasta aqui se infieren dos cosas: La primera, que la proporcion se puede dividir en otros tantos generos, como la razon; y assi

avrà proporcion multiplice, superparticular, &c. Como la razon de 12. á 2. es tripla de la de 2. à 1. esto es, la sextupla es tripla de la dupla, porque 6. es triplo de 2. asimismo la razon de 2. à 1. es subsesquialtera de la de 3. á 1. esto es, la dupla, respeto de la tripla.

La segunda, que la proporcion pide quatro terminos; porque como está entre dos razones, y cada una tiene dos terminos, tendrà la proporcion quatro: verdad es, que bastan tres terminos materiales, quando un termino sirve de consequente en una razon, y de antecedente en otra; como en la proporcion de las razones de 8. à 4. y de 4. á 2. donde no ay mas que tres terminos materiales 8. 4. 2. porque el 4. hace oficio de dos; pero formales siempre son quatro terminos, que se llaman proporcionales.

273 La proporcion es en dos maneras, una continua, y otra discreta, ò no continua. La continua es, quando la misma razon ay del primer termino al segundo, que del segundo al tercero, como 27. 9. 3. porque de 27. á 9. ay razon tripla, y tambien de 9. á 3. y assi el un termino 9. hace oficio de dos, como queda dicho. La no continua es, quando no ay la misma razon del primer termino al segundo, que de este al tercero, como 8. 4. 6. 3. porque del 8. al 4. ay razon dupla, pero no del 4. al 6. Y aunque el un termino sea comun à las dos razones, como aqui 6. 4. 2. no por esso es continua, pues no ay la misma razon de 6. á 4. que de 4. á 2.

274 La proporcionalidad es el respeto proporciones, y assi es razon de proporciones, ò razon de razones de razones; porque las proporciones se pueden comparar entre sì, en quanto una es mayor, igual, ò menor que otra, del mismo modo que se comparan las razones. De suerte, que la razon està entre dos numeros, la proporcion entre dos razones, y la proporcionalidad entre dos proporciones.

De donde se infiere, que la proporcionalidad requiere ocho terminos formales, porque està entre dos proporciones, de las quales cada una tiene quatro terminos; pero materiales pueden ser solos cinco, como en estos 2. 4. 8. 16. 32. donde los tres de enmedio hacen oficio de antecedentes, y consequentes. Tambien tiene la proporcionalidad otros tantos generos, como la razon, y como la proporcion, que por estos se explican en el numero siguiente.

DEL DENOMINADOR DE LA RAZON, PROPORCION, y proporcionalidad.

275 El denominador de una razon es una razon semejante, expressada

lada con los terminos mas claros que se puedan hallar. En esta explicacion comprehendo el denominador de la razon, proporcion, y proporcionalidad; porque como la proporcion, y proporcionalidad sean razones (273 y 274), definiendo al denominador de la razon, quedaràn entendidos los otros denominadores. De modo, que lo que dirè del denominador de la razon, se ha de entender tambien del denominador de la proporcion, y proporcionalidad.

Sucede muchas veces, que una razon está expressada con terminos muy grandes, de suerte, que facilmente no se puede conocer el respeto del antecedente al consequente; como esta 189. à 27. Y assi se necessita de denominador, que explique, y declare con terminos menores el dicho respeto, ò relacion, que será la razon de 7. á 1. por la qual claramente se conoce, que la razon de 189. á 27. es septupla.

Assi mismo, la razon que ay entre la razon de 40. á 5. y la de 2. á 1. que es proporcion, no se puede conocer facilmente sin el denominador 4. á 1. el qual manifiesta que la proporcion es quadrupla; y lo mismo digo de la proporcionalidad.

Y porque el denominador de qualquier razon declara la continencia del antecedente en el consequente, ò de este en aquel, le llamò Euclides en la *definicion 5. del libro 6.* segun la inteligencia del Padre Clavio, *Quantidad de la razon*, porque enseña quan grande, ò pequeña sea la razon. Solo difiniò Euclides al denominador de la razon, no al de la proporcion, ni proporcionalidad. Porque como los antiguos no conocieron, ò no trataron de otra proporcion que de la de igualdad, la qual no necessita de denominador; por esto no trataron del denominador de la proporcion, ni proporcionalidad.

276. Siendo, pues el denominador una razon semejante à la razon de quien es denominador, que declara qual sea el respeto del antecedente al consequente, necessariamente ha de constar de terminos muy claros, que manifiesten el dicho respeto, ò relacion; y como ninguna razon pueda tener terminos mas claros que la que tienen por consequente la unidad por ser la mas simple, y conocida en la Arithmetica; por esto el denominador ha de ser una razon semejante á la razon de quien es denominador, que tenga por consequente la unidad; y assi el denominador de la razon de 40. à 5. es la razon de 8. á 1. porque claramente enseña que es octupla.

277 Y como qualquier numero, ò sea entero, ò quebrado, diga orden á lo menos implicito á la unidad (127), pues que, ò se compone de unidades, ò es parte, ò partes de la unidad; no es necessario que en el denominador se declare la unidad que es consequente; y assi el denomi-

nominador de la razon de 12. à 3. es 4. porque ya se entiende que es lo mismo que 4. á 1. Assi mismo el denominador de la razon de 13. á 9. es 1. y $\frac{4}{9}$, que es lo mismo que 1. $\frac{4}{9}$ á 1. y assi de los demàs. Con que para expressar el denominador no es menester poner dos terminos, sino solo el antecedente, dexando el consequente, que es la unidad.

Concluyo con que el denominador no necessita de otro denominador; porque como ha de ser la razon mas clara que aya entre todas las razones de la especie de la razon de quien es denominador, si huviera denominador de denominador, este no seria denominador, porque no seria el mas claro, supuesto que avria otro denominador que le declarasse: v. g. el denominador de la razon de 80. à 40. ha de ser la razon mas clara que se halle entre todas las razones duplas; si huviera, pues, otra razon mas clara que el denominador, ella seria denominador: Luego el que por la supcsicion es denominador en la verdad, no seria denominador, sino aquella razon mas clara: Luego el denominador no necessita de otro denominador, porque assi, el denominador del denominador seria el verdadero denominador.

A mas desto: Si el denominador nécessitàra de otro denominador, se daria denominador de denominador: Luego el primero no seria denominador; porque se precederia en infinito, señalado denominador de denominador, y otra vez denominador de este denominador, &c. y assi no seria verdadero denominador, porque avria otro denominador, ò razon mas clara; la qual, segun la difinicion, seria el verdadero denominador.

DE LOS TERMINOS PROPORCIONALES.

278 Terminos, ò numeros proporcionales son los que componen la proporcion, los quales son quatro formales. (272) Y como la proporcion puede estàr entre razones desiguales (272), no es necessario que los terminos proporcionales guarden una misma razon. Pero porque los antiguos no conocieron sino la proporcion de iguales, que es la que difiniò Euclides en la *difini.* 4. *del lib.* 5. diciendo que es semejanza de razones; siempre que hablarè de terminos proporcionales entenderè de los que componen proporcion de igualdad, mientras otra cosa no advirtiere en contrario.

279 Y assi quatro numeros son proporcionales, quando la misma razon ay del primero al segundo, que del tercero al quarto, como 8. 2. 12. 3. porque tanto del 8. al 2. como del 12. al 3. ay razon quadrupla; assi mismo 4. 6. 9. son proporcionales; porque la misma razon sub-

ses-

sesquialtera ay del 4. al 6. que del 6. al 9. El 6. hace oficio de antecedente, y consequente, porque la proporcion es continua.

280 Los numeros proporcionales se suelen expressar deste modo, como 4. á 2. assi 8. á 4. que es lo mismo que decir, que la misma razon ay de 4. à 2. que de 8. á 4. porque ambas son duplas. Estos terminos proporcionales son los de la regla de tres; porque no se busca otra cosa, que conocidos los tres primeros terminos, hallar el quarto proporcional. De los terminos proporcionales, el primero es semejante al tercero, y el segundo al quarto: esto es, el antecedente de una razon al antecedente de la otra, y el consequente al consequente, á quien Euclides en la *difin.* 11. *del lib.* 5. llama terminos *Homologos*, ò semejantes; porque si el un antecedente es mayor, igual, ò menor que su consequente, tambien el otro antecedente ha de ser mayor, igual, ò menor que su consequente.

281 Los terminos proporcionales se pueden comparar entre sì de seis modos, y siempre son proporcionales: es à saber Alternando, Invirtiendo, Componiendo, Dividiendo, Convirtiendo, y por igualdad, como lo demuestra Euclides en el libro 5. y nosotros en el capitulo siguiente.

282 Terminos proporcionales directos, son los primeros proporcionales que se ofrecen antes de hacer la inversion, alternacion, &c. como 8. à 6. assi 24. á 18. y esta se llama Proporcion directa.

283 Proporcion *Alterna*, ò permutada, es la comparacion del antecedente al antecedente, y consequente al consequente; como si son directamente proporcionales 6. á 3. como 10. á 5. serán alternando 6. á 10. como 3. à 5.

284 Proporcion *Inversa* es la comparacion de los consequentes à los antecedentes; como si son directamente proporcionales 6. á 3. como 10. á 5. seràn invirtiendo 3. à 6. como 5. à 10.

285 Composicion de razon es la comparacion de la suma del antecedente, y consequente al mismo consequente; la suma se señala con esta señal † como si son directamente proporcionales 6. á 3. assi 10. à 5. seràn componiendo como 6. † 3. à 3. assi 10. † 5. à 5. esto es, como 9. á 3. assi 15. á 5. A esta composicion de razon se pueden añadir otras dos: La primera es composicion conversa, quando la suma del antecedente, y consequente se compara el antecedente, como 6. † 3. à 6. assi 10. † 5. á 10. esto es, como 9. à 6. assi 15. à 10. La segunda es composicion contraria, quando el antecedente se compara à la suma de antecedente, y consequente, como 6. à 6. † 3. assi 10. à 10. † 5. esto es, como 6. á 9. assi 10. à 15.

286 Divifion de razon, es, quando la diferencia del antecedente, y confequente fe compara al mifmo confequente; la diferencia fe feñala de efte modo — como fi fon directamente proporcionales, como 4. à 3. afsi 8. á 6. feràn dividiendo como 4. — 3. à 3. afsi 8. — 6. á 6. efto es, como 1. à 3. afsi 2. à 6. pero es neceffario que el antecedente fea mayor que el confequente. A efta divifion de razon fe pueden añadir otras dos. La primera es divifion *Converfa*, quando fe compara el confequente á la dicha diferencia, como 3. à 4. — 3. afsi 6. à 8. — 6. La fegunda es divifion *Contraria*, quando fe compara el antecedente con la diferencia del confequente, y antecedente; y afsi eL confequente ha de fer mayor, como fi fon directamente proporcionales, como 3. à 4. afsi 6. á 6. feràn dividiendo contrariamente, como 3. à 4. — 3. afsi 6. á 8. — 8. efto es, como 3. à 1. afsi 6. á 2.

287 Converfion de razon, es, quando el antecedente fe compara à la diferencia del antecedente, y confequente; como fi fon directamente proporcionales, como 4. á 3. afsi 8. à 6. feràn convirtiendo como 4. à 4. — 3. afsi 8. à 8. — 6. efto es, como 4. á 1. afsi 8. á 2. con que el antecedente neceffariamente ha de fer mayor que el confequente.

288 La proporcion por igualdad, es, quando aviendo mas que dos numeros en una ferie, como 18. 12. 6. y tomando otros tantos en otra ferie 6. 4. 2. de fuerte, que cada dos de ellos fean proporcionales, como 18. á 12. afsi 6. á 4. y como 12. á 6. afsi 4. á 2. fe quitan los medios, quedaràn los extremos proporcionales, como 18. á 16. afsi 6. à 2. y efta es la proporcion por igualdad, la qual puede fer en dos maneras, como aora verèmos.

18.	12.	6.
6.	4.	2.

Efta proporcion por igualdad fe divide en *Ordenada*, y *Perturbada*. La ordenada, es, quando fe guarda un mifmo orden en los primeros dos numeros, que en los fegundos, como en el exemplo antecedente.

18.	12.	6.
12.	6.	4.

La perturbada, es, quando fe invierte el orden; como fi es 18. à 12. afsi 6. à 4. y como 12. à 6. afsi 12. á 6. entonces quitando los medios quedaràn los extremos proporcionales, como 18. á 12. afsi 6. à 4.

Pero aqui fe ha de advertir con cuydado, que no es lo mifmo proporcion de igualdad, que proporcion por igualdad, porque aquella es la que eftá entre razones iguales, y efta es quando fe quitan los medios, y quedan los eftrèmos proporcionales, como eftá dicho.

Ter-

289 Terminos *reciprocos* ſon los dos medios, y los dos eſtremos de quatro numeros proporcionales, como en eſta proporcion 8. à 2. como 4. à 1. los terminos reciprocos ſon los medios 2. y 4. y tambien los eſtremos 8. y 1.

DE LA RAZON COMPUESTA.

290 *Razon Compueſta*, es la que ſe compone de otras por multiplicacion, como un numero de otro. Euclides la difiniò en la *difin.* 5. *del lib.* 6. por los denominadores, que ſon las quantidades de las razones, diciendo que la razon es compueſta quando las quantidades de las razones multiplicadas entre sí hacen alguna razon; ò ſegun la verſion de Zamberto, hacen la quantidad de alguna razon, que es lo miſmo que decir, que ſu denominador es el producto de los denominadores de las razones de quien ſe compone; como ſi ſon dos razones 8. à 2. y 9. à 3. cuyos denominadores 4. y 3. multiplicados hacen 12. pues la razon cuyo denominador es 12. que es la *duodecupla*, ò de 12. á 1. (276) es la compueſta de las razones de 8. à 2. y de 9. à 3. De ſuerte, que aſsi como el numero 12. es compueſto de la multiplicacion de 4. por 3. del miſmo modo la razon duodecupla ſe compone por multiplicacion de las razones quadrupla, y tripla.

Aſsi miſmo, ſi ſe proponen las razones de 4. à 1. y de 3. à 7. y de 5. à 2. cuyos denominadores 4 $\frac{3}{7}$, y 2. $\frac{1}{2}$, ſe multiplican entre sì, ſaldrà el denominador 4. $\frac{2}{7}$ de la razon compueſta dellas; con que la razon quadrupla ſuperbiparciente ſeptimas, que correſponde al denominador 4. $\frac{2}{7}$, ſerá compueſta de las razones de 4. à 1. y de 3. à 7. y de 5. à 2. Eſta multiplicacion ſe puede hacer de otro modo ſin los denominadores, multiplicando las miſmas razones, y el producto ſerà la razon compueſta por multiplicacion; como ſi ſe multiplican las razones de 8. à 2. y de 9. á 3. eſcritas en forma de quebrado, aſsi: $\frac{8}{2}$, $\frac{9}{3}$, multiplicando antecedente por antecedente, y conſequente por conſequente, ſaldrà la razon compueſta 72. ſextos, ò de 72. á 6. que es duodecupla. Aſsi miſmo, multiplicando las razones de 4. à 1. de 3. à 7. y de 5. à 2. aſsi: $\frac{4}{1}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{2}$, ſaldrà la razon compueſta 60. 14. avos, que es quadrupla ſuperbiparciente ſeptimas.

La razon deſto es manifieſta; porque el denominador ha de ſer una razon ſemejante à la que es denominador, que tenga por conſequente la unidad (276) la qual ſe omite, porque no aumenta la multiplicacion; pero ſi ſe multiplican los denominadores, teniendo la unidad por conſequente, como en el primer exemplo $\frac{4}{1}$ por $\frac{3}{1}$ (poniendolos en forma de que-

quebrados, pues como luego dirèmos, el multiplicar razones es lo miſmo que multiplicar quebrados) ſaldrà el denominador $\frac{12}{1}$ de la razon compueſta, como conſta por la definicion de Euclides. Y como los denominadores ſean las miſmas razones, ò ſemejantes à aquellas de quien ſon denominadores, lo miſmo ſerà multiplicar los denominadores, que las miſmas razones de quien ſon denominadores. Luego multiplicando las miſmas razones componentes, ſale la razon compueſta.

De aqui ſe infiere, que ſi ay una ſerie de numeros, qualeſquiera que ſean, como 6. 8. 4. 3. 12. la razon del primero 6. al ultimo 12. es compueſta de las razones intermedias; eſto es, la razon de 6. à 10. ſe compone de las razones de 6. à 8. de 8. á 4. de 4. á 3. y de 3. à 12. porque ſi ſe eſcriven en forma de quebrados, aſsi: $\frac{6}{8}\ \frac{8}{4}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{12}$, y ſe multiplican los antecedentes entre sí, y tambien los conſequentes, ſaldrà la razon de 576. á 1152. que es ſemejante á la compueſta de 6. à 12. porque como los antecedentes ſon los miſmos que los conſequentes, fuera el 6. y el 12. ſi ſe multiplican los antecedentes 3. 4. 8. entre sì, produciràn el miſmo numero 96. que multiplicando los miſmos conſequentes 3. 4. 8. y como el antecedente 6. ſe ha de multiplicar por el 96. que es el producto de los demàs antecedentes, y el conſequente 12. ſe ha de multiplicar por el miſmo numero 96. que es el producto de los demàs conſequentes, es manifieſto, que un miſmo numero 96. multiplica à los numeros 6. y 12. Luego produce numeros proporcionales 576. y 1152. (71) Luego en qualquier ſérie de numeros, la razon de los extremos es compueſta de las razones de los medios.

291 Si las razones compueſtas ſon iguales, ò ſemejantes, entonces la razon compueſta ſe dice *Duplicada*, *Triplicada*, *Quadruplicada*, &c. ſegun el numero de las razones de que ſe compone; y aſsi ſi ſon dos razones ſemejantes 8. á 1. y 24. à 3. cuyos denominadores 8. y 8. multiplicados hacen el denominador 64. á 1. diga, que eſta razon de 64. à 1. es duplicada de la razon octupla, porque ſe compone de dos octuplas por multiplicacion.

Aſsi miſmo, ſi ſon tres razones iguales 2. à 1. — 4 à. 2. — 6. à 3. cuyos denominadores 2. 2. y 2. multiplicados hacen 8. digo que la razon octupla es triplicada de la dupla; porque multiplicando tres veces la dupla hace la octupla; y aſsi de la quadruplicada, quintuplicada, &c.

La razon *Subduplicada*, *Subtriplicada*, *Subquadruplicada*, &c. es aquella de la qual ſe compone la *Duplicada*, *Triplicada*, &c. Y aſsi, en el exemplo antecedente la razon dupla es ſubtriplicada de la octupla; porque de la dupla, tomada tres veces por multiplicacion, ſe compone la octupla.

Eſta

292 Esta composicion de razon, y sus especies, se entienden mejor en los terminos continuamente proporcionales. Sean, pues, A. B. C. D. E. por los quales estàn significadas diferentes series de numeros proporcionales, como parece en el exemplo, donde la razon de A. á C. es duplicada de la razon de A. à B. porque como la razon de A. à B. es la misma que la de B. á C. por ser continuamente porporcionales, componiendose la razon de A. à C. de las razones de A. à B. y de B. á C. es lo mismo que si constàra de la razon de A. à B. dos veces, ò de dos razones de A. á B. y por esso se dice duplida.

A.	B.	C.	D.	E.
81.	27.	9.	3.	1.
2.	4.	8.	16.	32.
4.	4.	4.	4.	4.

La razon A. á B. serà subduplicada de la razon A. C. porque dos razones de A. à B. componen la dicha razon A. á C. De suerte, que asi como comparando un numero que comprehenda á otro dos veces, como 4. á 2. la razon se dice *Dupla*; y comparando el 2. al 4. se llama *Subdupla*; tambien quando una razon se compone de dos iguales, se dice *Duplicada*; y cada una de estas dos se llama *Subduplicada*, respeto de la *Duplicada*.

Asi mismo, la razon de A. à D. es triplicada de la de A. à. B. porque se compone de las tres razones A. à B. B. à C. C. à D. que son iguales entre sì, que es lo mismo que componerse tres veces de la razon de A. à B. Y la razon de A. à B. es subtriplicada de la A. à D. De modo, que asi como el 6. porque contiene tres veces al 2. es triplo del 2. y el mismo 2. porque ès contenido en el 6. tres veces, se dice subtriplo del 6. del mismo modo, porque la razon de A. à D. contiene tres razones iguales à la razon de A. á B. es triplicada de ella, y la razon de A. à B., porque es contenida tres veces en la razon de A. á D. serà subtriplicada; y asi de la quadruplicada, quintuplicada, &c.

293 Esta màteria es muy dificultosa, y pide grande atencion. Solo advierto, para que los principiantes no se equivoquen, que no es lo mismo razon *Dupla*, que *Duplicada*; ni *Tripla* que *Triplicada*, &c. porque la razon dupla es quando el antecedente contiene dos veces al consequente; (256) y la duplicada es, quando una razon (sea la que fuere, dupla, tripla, sesquialtera, &c.) se toma dos veces, para componer à otra; (291) y asi, la razon de 81. à 9. es duplicada de la de 81. à 27. aunque se componga de dos triplas. Y la razon de 2. à 32. es quadruplicada de la de 2. à 4. aunque se compone de quatro subduplas.

En

En las razones de igualdad tambien se guarda esta composicion de razon. Mas las razones compuestas de iguales, son iguales; porque una razon se compara à otra, como una cantidad à otra, lo qual expressan los denominadores; y como dos cantidades compuestas de iguales partes son iguales, tambien dos razones compuestas de iguales razones seràn iguales. Y assi, todas las duplicadas de iguales, son iguales. Lo mismo dirè de las triplicadas, quadruplicadas, &c. y de las subduplicadas, subtriplicadas, &c.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA THEORICA DE LAS Razones, y Proporciones.

En este capitulo tratarè de las Razones, y Proporciones en abstracto, declarando su theorica, y algunas proposiciones practicas, que es el fundamento de casi toda la Arithmetica. El que solo pretende conseguir la practica, en orden á lo mercantil, passe al capitulo siguiente, sin fatigarse en la inteligencia deste.

PROPOSICION I.

LOS NUMEROS IGUALES TIENEN LA MISMA RAZON à un qualquier numero, y al contrario.

294 Esta proposicion, aplicada à numeros, es la 7. del 5. de Eucl. la qual es puro axioma, como muchas otras del mismo libro, segun lo notan Pedro Romano en sus Escuelas Mathematicas, y el Padre Andrès Tacquet de la Compañia de Jesus, en los Comentarios del dicho libro; y assi basta solo explicarla.

Sean dos numeros iguales 4. y 4. y un otro 6. Digo, que la misma razon ay de 4. à 6. que del otro 4. al mismo 6.

Y un numero como 6. dice la misma razon á otros dos iguales 4. y 4. porque siendo iguales, es lo mismo que si fuera uno solo.

4. 4.
6.

295 Al contrario: Si dos numeros como 4. y 4. tienen la misma razon á un tercero 6. son entre sí iguales; y si el tercero 6. dice la mis-

ma-

ma razon à dos numeros 4. y 4. son estos iguales, por la misma razon esta es la *prop.* 9. *del lib.* 5. de Euclides, aplicada tambien á numeros.

PROPOSICION II.

EL NUMERO MAYOR TIENE MAYOR RAZON A OTRO tercero, que el menor; y el tercero al menor tiene mayor razon que al mayor, y al contrario.

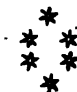
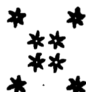
296 LA primera parte desta proposicion es la *prop.* 8. *del lib.* 5. de Euclides aplicada à numeros. Sean dos numeros desiguales 8. y 6. y un otro tercero 4. Digo lo primero, que mayor razon ay del 8. al 4. que del 6. al mismo 4. Porque siendo el 8. mayor que el 6. contendrà mas partes del 4. que el 6. Luego dice mayor razon; porque esta consiste en la continencia, (31) y quanto un numero contiene mas veces al otro, ò mas partes dèl, tanto tiene mayor razon.

8.	6.
4.	

Digo lo segundo, que el numero tercero 4. tiene mayor razon al menor 6. que al mayor 8. porque el 4. tiene mas partes del 6. que del 8. pues que del 6. tiene mas que la mitad, y del 8. la mitad justa. Assimismo, si son otros dos numeros 3. y 5. y un tercero 9. este tendrà mayor razon al menor 3. que al mayor 5. porque contiene mas veces al 3. que al 5.

Al contrario. De dos numeros desiguales 8. y 6. si el 8. tiene mayor razon à un tercero 4. que el 6. al mismo 4. serà el 8. mayor que el 6. porque si tiene mayor razon, tiene mayor continencia, y assi serà mayor. Pero si el 4. dice mayor razon al 6. que al 8. serà el 6. menor que el 8. porque à quien el 4. dice mayor razon, tiene mayor continencia. Luego el 4. ò le contiene mas veces, ò mas partes. Luego el 6. es menor que el 8. Y esta es la *prop.* 10. *del lib.* 5. de Euclides aplicada à numeros.

Por esta proposicion se entenderà de raiz lo que advertimos arriba, (270) que no ay la misma razon de un numero à otro, que de este à aquel; esto es, que la razon de 8. à 4. es diferente que la de 4. à 8. supuesto que aquella es mayor.

PRO-

PROPOSICION III.

SI DOS RAZONES SON IGUALES, O SEMEJANTES à una tercera, tambien ſon iguales, ò ſemejantes entre sì.

297 ESta propoſicion es la 11. *del lib.* 5. de Euclides, la qual es puro axioma, y no neceſsita de prueba, ſino que por sì miſma es manifieſta; porque ſi dos razones ſon iguales à una tercera, tambien ſerán iguales entre sì; como ſi dos numeros ſon iguales à un numero tercero, ſeràn tambien iguales entre sì. A mas deſto, el denominador de qualquier razon numerica es un numero ſolo, (277) y los denominadores de las razones iguales ſon numeros iguales; porque enſeñando la quantidad de las razones, ſi eſtas ſon iguales, tambien lo ſeràn ſus denominadores. Pues ſi dos numeros, por ſer iguales à un tercero, ſon iguales entre sì; luego tambien las razones, de quien los tales numeros ſon denominadores, por ſer iguales à una tercera, ſeràn iguales entre sì.

PROPOSICION IV.

SI QUATRO NUMEROS SON PROPORCIONALES, el producto de los medios es igual al producto de los eſtremos, y al contrario.

298 ESta propoſicion es la 19. *del lib.* 7. de Euclides, y el fundamento de la regla de tres. Sean proporcionales A.B.C.D. Digo, que multiplicando el primero A. por el quarto D. ſale el producto igual al producto de la multiplicacion del ſegundo B. por el tercero C. eſto es, multiplicando 8. por 3. ſale 24. y multiplicando 4. por 6. tambien ſale 24.

A.	B.	C.	D.
8.	4.	6.	3.

Supongo, pues, que multiplicando A. por D. ſale AD. multiplicando B. por C. ſale BC. y multiplicando A. por C. ſale AC. Eſto ſupueſto, porque A. multiplica à C. y D. tendràn los productos AC. AD. la miſma razon que C. à D. (71) Aſsimiſmo, multiplicando C. à A. y B. tendràn los productos AC. AB. la miſma razon que A. à B.

AD.	AC.	BC.
24.	48	24.

y pues las razones A. á B. y C. à D. son iguales por la suposicion, seràn tambien iguales las razones AC. á AD. y AC. à BC. y porque un numero AC. dice una misma razon à dos numeros AD. BC. seràn estos iguales. (294) Luego el producto de los medios es igual al producto de los estremos.

299 Al contrario. Si los productos de los estremos, y medios, son iguales, seràn los quatro numeros proporcionales: porque el producto AC. de A. por C. tendrà una misma razon à AD. BC. (295) la qual serà igual à la de A. à B. y de C. á D. porque proviene de la multiplicacion como se dixo antes. Luego A. es à B. como C. à D. que es ser proporcionales.

Consectario.

300 Si tres numeros, como 8. 4. 2. fueren continuamente proporcionales, el producto de los estremos es igual al quebrado del medio; esto es, al producto del medio, multiplicado por sì mismo; porque en los continuos proporcionales, el medio se toma dos veces, ó hace oficio de dos terminos; (273) y assi, seràn 8. 4. 4. 2. Luego el producto de 8. por 2. es igual al producto de 4. por 4. que es el quebrado de 4. y esta es la *propos.* 20. *del lib.* 7. de Euclides. Y al contrario. Si el quadrado del medio es igual al producto de los extremos, los numeros seràn continuamente proporcionales.

PROPOSICION. V.

SI DE QUATRO NUMEROS FUERE MAYOR LA RAZON del primero al segundo, que del tercero al quarto, tambien el producto de los estremos serà mayor que el producto de los medios, y al contrario; pero si fuere menor, serà tambien el producto menor, y al contrario.

301 ESta proposicion contiene quatro partes. La primera: Sean quatro numeros señalados con las letras A. B. C. D. y sea la razon de A. à B. mayor, que la de C. à D. Digo, que el producto AD. de los estremos, serà mayor que el producto BC. de los medios: porque multiplicando A. à C. y D. produce AC. AD. en la misma razon de C. à D. (71) assimismo, multiplicando C. à A. y B. produce AC. BC. en la misma razon

A.	B.	C.	D.
12.	3.	6.	2.
AD.	AC.	BC.	
24.	72.	18.	

zon de A. à B. Con que la razon de AC. à BC. es igual á la de A. à B. y la razon de AC. à AD. igual à la de C. à D. Y como por la supoficion, la razon de A. á B. sea mayor que la de C. à D. ferà tambien la razon de AC. à BC. mayor que la de AC. à AD. Luego AD. es mayor que BC. ò BC. menor que AD. (296)

302 La segunda es conversa de la primera. Si el producto AD. de los extremos A, y D. es mayor que el producto BC. de los medios B. y C. ferà mayor la razon de A. B. que la de C. à D. porque siendo AD. mayor que BC. ferà la razon de AC. à BC. (que es la misma que la de A. à B.) mayor que la de AC. à AD. (que es la misma que la de C. à D.) por lo que està demostrado arriba numero 296.

303 La tercera. Si de quatro numeros A. B. C. D. la razon de A. à B. fuere menor que la de C. à D. ferà tambien el producto AD. de los extremos menor que el producto BC. de los medios; porque, como està dicho antes, AC. à BC. tiene la misma razon que A. à B. y AC. à AD. tiene la misma razon que C. á D. Y como la razon de A. á B. es menor que la de C. à D. ferà tambien la razon de AC. à BC. menor que la de AC. à AD. Luego AD. es menor que BC. (296)

A.	B.	C.	D.
3.	4.	8.	2.

AD.	AC.	BC.
6.	24.	32.

304 La quarta es conversa de la tercera. Si el producto AD. de los extremos, es menor que el producto BC. de los medios, ferá la razon de A. B. menor que la de C. á D. porque la razon de AC. à BC. que es la misma que la de A. á B. ferà menor que la de AC. á AD. que es la misma que la de C. à D.

Escolio.

305 En esta, y en la proposicion antecedente hemos señalado los productos con las mismas letras juntas de los numeros multiplicantes; como para denotar el producto de A. 4. por B. 6. se ha puesto el producto AB. 24. lo qual es de grandissima conveniencia; porque facilmente se conoce de que numeros provino el tal producto, los quales son los mismos que indican las letras; y assi, quando veo el producto AB. sin mas discurso que solo el verle, conozco que provino de la multiplicacion del numero significado por el numero expressado por B.

Quando veo los productos AB. AD. al instante conozco que el numero significado por A. multiplico los numeros B. y D. y assi que los productos AB. AD. tienen la misma razon que B. y D. que son las

las letras no comunes à los dos productos. Assimismo, los productos AB. AD. AE. provienen de la multiplicacion de A. por B. C. D. y assi tienen entre sì la razon de B. C. D. que son las letras no comunes, ò que no se hallan en todos los productos.

Quando un numero se multiplica por sì mismo una, ò muchas veces, se pone tantas veces quantas se multiplican; y assi, multiplicando A. por sì mismo, serà el producto AA. Si otra vez se multiplica, serà AAA. y assi los productos AA. AB. tendràn la razon de A. á B. Tambien los productos ABB. BBB. tendrán la razon de A. à B. &c. Deste modo de expressar los productos usaremos algunas veces.

PROPOSICION VI.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *FUEREN PROPORCIONales, tambien lo seràn alternando.*

306 SEan proporcionales A. B. C. D. Digo, que tambien seràn proporcionales, alternando como A. à C. assi B. à D. porque quando de quatro numeros el producto de los extremos es igual al de los medios, los numeros son proporcionales (299); pues como hecha la alternacion no se muden los medios, ni los extremos, sino en el lugar, quedarán los mismos productos que antes; y assi seràn proporcionales.

A.	B.	C.	D.
4.	1.	8.	2.

A.	C.	B.	D.
4.	8.	1.	2.

Este es el modo de comparar los proporcionales que explicamos arriba (283), y demuestra Euclides en la *prop.* 13. *del lib.* 7.

PROPOSICION VII.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONALES, tambien lo seràn invirtiendo.*

307 POrque haciendo la inversion seràn B. A. D. C. con que los medios se hacen extremos, y los extremos medios: luego siempre el producto de los extremos es igual al de los medios: luego son proporcionales. (299) Y esta es la comparacion que explicamos arriba. (284)

A.	B.	C.	D.
4.	1.	8.	2.

B.	A.	D.	C.
1.	4.	2.	8.

PROPOSICION VIII.

LAS PARTES SEMEJANTES TIENEN ENTRE SI LA misma razon que sus todos.

308 ESta proposicion es casi la 15. *del lib.* 5. de Euclides aplicada á numeros. Sean 2. y 4. partes semejantes, respeto de los todos 6. y 12. Digo, que la misma razon ay de la parte 2. á su semejante 4. que del todo 6. al otro 12. Porque como una parte aliquota es semejante à otra aliquota, quando se contiene en su todo tantas veces como la otra en el suyo (28); ò una parte aliquanta es semejanté à otra aliquanta, quando contiene tantas partes aliquotas semejantes de su todo, como la otra del suyo (29), tendràn las partes semejantes la misma razon à sus todos; esto es, serà como 2. à 6. assi 4. à 12. porque los todos contendràn proporcionalmente à sus partes semejantes; luego alternando (306) como la parte 2. à su semejante 4. assi el todo 6. al todo semejante 12.

309 Y si una parte semejante es á la otra semejante, como un todo á otro: tambien la comparte, ò residuo serà al otro residuo, como el un todo al otro. Como si 2. es á 4. como 6. á 12. tambien serán proporcionales con los mismos todos los residuos de 2. hasta el todo 6. que es 4. y de la parte 4. hasta 12. que es 8. esto es, serà como 4. á 6. assi 8. á 12. Porque los residuos tambien son partes semejantes, y esta es la *prop.* 11. *del lib.* 7. de Euclides.

Consectarios.

310 Si á dos, ò mas numeros, como al 6. y 8. se añaden numeros proporcionales como 3. y 4. las sumas 9. y 12. tendrán la misma razon; esto es, seràn proporcionales como 9. à 8. assi 9. à 12. Porque siendo los numeros añadidos proporcionales con los numeros dados, seràn partes semejantes, respeto de las sumas. Supuesto que los numeros dados 6. y 8. son partes semejantes, y las compartes 3. y 4. que son los numeros añadidos son tambien semejantes; luego los todos, ò suma tienen la misma razon.

Pero si los numeros añadidos no son proporcionales, las sumas no tendràn la misma razon, por no ser los dichos numeros añadidos partes semejantes. Y assi, si dos numeros desiguales, como á 6. y 8. se añaden numeros iguales como 4. y 4. las sumas 10. y 12. no guardaràn la misma razon, porque los numeros añadidos tampoco tienen la misma razon.

311 Si de dos, ò mas numeros, como de 8. y 24. se restan numeros proporcionales, como 2. y 6. los residuos 6. y 18. tendrán la misma razon, porque los numeros restados son semejantes; luego los residuos tambien son semejantes, y assi tienen la misma razon.

Pero si los numeros restados no son proporcionales, las restas, ò residuos tampoco son proporcionales, por no ser partes semejantes; con que si de dos numeros desiguales, como de 8. y 24. se restan iguales 4. y 4. ò al contrario, las restas 4. y 20. no son proporcionales, porque los numeros restados no tienen la misma razon.

312 Si dos, ò mas numeros, como 8. y 3. se multiplican por otro qualquier numero 6. los productos 48. y 18. guardan la misma razon; porque los numeros multiplicados 8. y 3. son partes semejantes aliquotas de los productos, los quales son todos, y assi tienen la misma razon. Y esta es la *prop. 17. del lib. 7.* de Euclides.

De aqui se infiere un modo facil para aumentar los terminos de qualquier razon, ò para dar otros terminos en la misma razon, y es multiplicarles por un qualquer numero; como si los terminos de la razon de 4. à 3. se han de hacer mayores, quedando la misma razon, multiplicoles por qualquier numero 5. y saldràn 20. y 15. en la misma razon: y assi, dada una razon, como de 4. à 3. multiplicando por qualquier numeros, saldràn otras razones iguales.

313 Si dos, ò mas numeros, como 48. y 18. se parten por un qualquier numero 6. los quocientes 8. y 3. tienen la misma razon; porque los quocientes son partes aliquotas semejantes, respeto de los todos, ò numeros dividendos 48. y 18.

De aqui nace un modo facil para disminuìr los terminos de qualquier razon, quedando ella la misma, ò igual, y es partir los dichos terminos por un qualquier numero; como para disminuìr los terminos de la razon de 12. á 6. dividolos por 2. y salen 6. à 3. en la misma razon. Si no se pueden partir enteramente, tampoco se podrán disminuìr.

Con que sumando, ò restando numeros proporcionales con otros proporcionales; ò multiplicando, ò partiendo proporcionales por otro qualquier numero, siempre nacen numeros proporcionales.



PROPOSICION IX.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONALES, tambien lo ſerán componiendo.*

314 POrque componiendo ſeràn como A. ✳ B. à B. aſsi C. ✳ D. à D. (286); luego B. y D. ſon partes ſemejantes, reſpeto de A. ✳ B. y de C. ✳ D. luego ſon proporcionales. (308) A mas deſto A. y C. tienen la miſma razon que B. y D. (306): luego las ſumas A. ✳ B. y C. ✳ D. tiene la miſma razon à las partes B. y D. (310). Eſta es la *prop.* 18. *del lib.* 5. de Euclides.

A.	B.	C.	D.
8.	12.	4.	6.

PROPOSICION X.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONALES, tambien lo ſerán dividiendo.*

315 POrque dividiendo ſeràn como A--B. á B. aſsi C--D. á D. (286) Luego, ò A--B. y C--D. ſon partes ſemejantes, reſpeto de B. y D. ò al contrario B. y D. ſon partes ſemejantes, reſpeto de A--B. y de C--D. (quando ſon iguales no tiene dificultad). Luego ſon proporcionales la diferencia de A. y B. que aqui es 4. à B. y la diferencia de C. y D. que aqui es 2. à D. Y eſta es la *prop.* 17. *del lib.* 5. de Euclides, aplicada à numeros.

A.	B.	C.	D.
10.	6.	5.	3.

PROPOSICION XI.

SI QUATRO NUMEROS A. B. C. D. *SON PROPORCIONALES, tambien lo ſerán convirtiendo.*

316 POrque convirtiendo ſerán como A. à A--B. aſsi C. à C--D. (287). Luego, ò A. y B. ſon partes ſemejantes, reſpeto de A--B. y C--D. ò al contrario (quando ſon iguales no ay dificultad). Luego ſon proporcionales.

A.	B.	C.	D.
8.	3.	16.	6.

PROPOSICION XII.

SI FUEREN MUCHOS NUMEROS A. B. C. *Y OTROS TANTOS* E. D. F. *de suerte que cada dos sean proporcionales, tambien los extremos* A. E. C. F. *seràn por igualdad de razon proporcionales.*

317 SEan tres numeros A. B. C. y otros tantos E. D. F. de suerte que sean proporcionales como A. à B. asi E. à D. y como B. à C. asi D. à F. Digo, que quitando los medios, quedarán los extremos proporcionales, como A. à E. asi C. à F. porque siendo proporcionales A. à B. como E. à D. serán tambien alternando como A. à E. asi B. à D. (306). Y porque son proporcionales como B. à C. asi D. à F. lo serán tambien alternando como B. à D. asi C. à F. Con que la razon de B. à D. será igual à las razones de A. à E. y de C. à F. Luego estas son iguales entre sì (297); esto es, serà A. à E. como C. à F. y esta es la *prop.* 14. *del lib.* 7. de Euclides.

A.	B.	C.
4.	6.	2.
E.	D.	F.
8.	12.	4.

PROPOSICION XIII.

EN LOS NUMEROS PROPORCIONALES, LA SUMA, Ò diferencia de los antecedentes, à la suma, ò diferencia de los consequentes, tiene la misma razon que un antecedente à su consequente.

318 SEan proporcionales A. à C. como B. à D. y B. à D. como E. à F. Digo, que la suma P. de los antecedentes, à la suma Q. de los consequentes, tiene la misma razon que un antecedente E. à su consequente F. Porque serán alternando como A. à B. asi C. à D. (306), y componiendo como A. ✱ B. à B. asi C. ✱ D. à D. (314); y como sea alternando como B. à E. asi D. à F. serà componiendo como A. ✱ B. ✱ E. à E. asi C. ✱ D. ✱ F. à F. Luego la suma de los antecedentes à la suma de los consequentes, es como un antecedente E. à su consequente F.

A.	8.	C.	12.
B.	2.	D.	3.
E.	4.	F.	6.
P.		Q.	
14.		21.	

319 Y si los numeros A. B. C. D. son proporcionales, tambien lo seràn la diferencia E. de los antecedentes, à la diferencia F. de los consequentes, como un antecedente C. al consequente D. porque seràn alternando como A. à C. asi B. à D. y dividiendo como A--C. à C. asi B--D. à D. esto es, como la diferencia E. al antecedente C. asi la deferencia F. al consequente D. Esta proposicion es casi la 12. del 7. de Euclides.

A. 12.		B. 24.
C. 8.		D. 16.
E. 4.		F. 10.

PROPOSICION XIV.

SI QUATRO NUMEROS SON PROPORCIONALES, LA suma del mayor, y menor será mayor que la suma de los otros dos.

320 SEan proporcionales 2. 8. 1. 4. Digo, que la suma 9. de mayor 8. y menor 1. es mayor que la suma 6. de los otros dos 4. y 2. Dispónganse los terminos proporcionales, alternando, ò invirtiendo, de modo que los dos numeros mayores se comparen por una parte, y los dos menores por otra, asi 2. à 1. como 8. à 4. Hecho esto, si restamos los dos numeros menores 2. y 1. de los mayores 8. y 4. quedarán las diferencias 6. y 3. en la misma razon, (311) y asi el 6. será numero mayor que el 3. Consideremos aora quatro numeros; los primeros dos son los proporcionales menores 2. y 1. y los otros dos son los restados del 8. y 4. que tambien son 2. y 1. Pues si sumamos el 2. de los proporcionales, con el 1. de los restados, la suma 3. será igual à la suma 3. del 1. de los proporcionales, con el 2. de los restados; y si à estas sumas iguales añadimos las diferencias 6. y 3. serán 9. y 6. y porque la diferencia 6. es mayor que la diferencia 3. la suma à que se añadiére el 6. hará mayor numero que la à que se añadiere el 3. Con que la suma del maximo, y minimo es 9. mayor que la de los otros que es 6. Esta es la *prop.* 25. *del lib.* 5. de Euclides, aplicada à numeros.

Consectarios.

321 Si fueren tres numeros 8. 4. 2. continuamente proporcionales, la suma 10. del mayor 8. y menor 2. será mayor que el duplo del 4. porque el 4. se repite dos veces, asi 8. 4. 4. 2. y como la suma del maximo, y minimo es mayor que la suma de los otros dos numeros, será mayor que el duplo del quatro, ò que la suma de dos quatros. Y lo mismo es de qualquiera otros tres numeros continuamente proporcionales.

Los

322 Los numeros maximo, y minimo siempre son medios, ò extremos de los quatro proporcionales; porque sean A. B. C. D. como la misma razon ay de A. à B. que de C. à D. si A. es mayor que B. tambien C. será mayor que D. y si menor, tambien menor.

A.	B.	C.	D.
5.	7.	15.	21.

Luego si A. es el numero maximo, D. será el minimo; y si B. es el maximo, C. serà el minimo. Assimismo, si A. es el minimo, será D. el maximo; y si B. es el minimo, será C. el maximo. Luego el maximo, y minimo, ò son los medios B. y C. ò los extremos A. y D.

PROPOSICION XV.

LAS RAICES DE QUALQUIER ESPECIE DE RAZON SON numeros entre sì primos, y al contrario.

323 RAìces de una razon son los numeros minimos enteros, en que se puede expressar aquella razon. (269) Sean, pues los minimos terminos de la razon superparticular 3. y 2. Digo, que son numeros entre sì primos; porque si no son primos, han de ser compuestos; luego les ha de medir algun numero primero. (36) Dividanse, pues, el 3. y 2. por aquel numero primo (si puede ser) los quocientes tendràn la missma proporcion, (313) y seràn menores que 3. y 2. Luego estos seràn los minimos de la razon superparticular por la suposicion, y no lo seràn porque ay otros, lo qual es imposible que sean minimos, y no minimos: luego no tienen medida por quien se puedan dividir; y assi seràn entre sì primos. Y esta es la *prop.* 24. *del lib.* 7. de Euclides.

324 Al contrario. Si son numeros entre sì primos, seràn los minimos de aquella especie de razon; porque no se podràn dividir por otro numero enteramente, pues no tienen medida comun: luego son minimos en aquella especie de razon. Y esta es la *propos.* 23. *del lib.* 7. de Euclides.

PROPOSICION XVI.

HALLAR EL DONOMINADOR DE QUALQUIER RAZON.

325 DIvidase el antecedente por el consequente, y el quociente serà el denominador. Y assi el denominador de la razon de 10. à 2. es 5. El denominador de la razon de 8. à 3. es 2. y dos tercios. El de 3. à 5. es tres quintos. El de 15. à 6. y dos tercios, es 2.

y un quinto. El de 5. à 27. es 5. 27. avos; y assi de los demàs. Porque el denominador ha de enseñar la razon del antecedente al consequente; esto es, quantas veces el antecedente contiene, ò es contenido en el consequente; y ha de tener la misma razon à la unidad, que el antecedente al consequente, como se dixo arriba; pues por la division se manifiesta la continencia del antecedente en el consequente, ò de este en aquel; y el quociente tiene la misma razon à la unidad, que el dividendo al divisor. (79) Luego partiendo el antecedente por el consequente, se sabe el denominador.

Observaciones.

326 El denominador de la razon de igualdad siempre es la unidad. El de la razon de mayor desigualdad siempre es entero solo, ò entero, y quebrado. El de la razon de menor desigualdad siempre es quebrado.

327 Siempre que en el denominador huviere algun quebrado, se ha de reducir à los mismos terminos, para que deste modo sea el denominador facilmente conocido.

328 Quando el denominador de alguna razon es quebrado, el numerador, respeto del denominador del quebrado, enseñarà la relacion del antecedente al consequente; porque el numerador al denominador tiene la misma razon, que el quebrado à la unidad. (134) Y asi el numerador al denominador tiene la misma razon, que el antecedente al consequente.

PROPOSICION XVII.

CONOCER LA RAZON QUE DOS NUMEROS tienen entre si.

329 POr el denominador conocerèmos la quantidad de las razones; porque aquellas razones son iguales, que tienen iguales denominadores. Aquella es mayor que otra, que tiene mayor denominador, y al contrario; y asi la razon de 12. à 5. es mayor que la de 7. à 6. porque el denominador 2. y dos quintos de aquella, es mayor que el denominador 1. y un sexto desta.

330 Dividase el mayor numero por el menor, y el quociente enseñarà la razon, segun lo que se dixo en la division de las razones desde el num. 256. Pero con esta diferencia, que en las razones de menor desigualdad se ha de añadir la particula *sub*. Y asi, la razon de 36. à 4. es noncupla; porque partiendo 36. por 4. salen 9. en el quociente. Si fuere la razon de 4. à 36. que es de menor desigualdad, seria subnoncupla.

La

La razon de 81. à 90. es subsesquinona, porque partiendo 90. à 81. caben à 1. y 9. 81. avos, ò un noveno; y si la razon fuera de mayor desigualdad de 90. à 81. seria sesquinona. (257)

Assimismo, la razon de 15. à 4. es tripla supertriparciente quartas; porque dividiendo 15. por 4. caben al quociente 3. y tres quartos; pues por los 3. enteros se dice tripla, y por los tres quartos, que es parte aliquanta, se llama, supertriparciente quartas. (258) Si fuera de menor desigualdad de 4. à 15. sería subtripla supertriparciente quartas.

La razon de 35. à 7. es quintupla, porque dividiendo 35. por 7. caben à 5. y si fuera de 7. à 35. seria subquintupla.

Del mismo modo, la razon de 41. à 8. es quintupla sesquioctava, porque dividiendo salen 5. y un octavo; y si fuera de 8. à 41. seria subquintupla sesquioctava.

La razon de 13. à 54. es subquadrupla subperbiparciente decimas tercias, porque partiendo el 54. por el 12. caben à 4. y 2. 13. avos; y porque se compára el menor con el mayor, se añade la particula *sub*.

La razon desto es, porque partiendo el mayor numero por el menor, se conoce la continencia del menor en el mayor, y por consiguiente está manifiesta la razon de un numero à otro; solo con advertencia, que si el menor se compára al mayor, se ha de añadir la particula *sub*, para denotar que es razon de menor desigualdad; pues esta, y la de mayor desigualdad tienen los mismos nombres; diferenciandose solamente en tener la particula *sub*.

PROPOSICION XVIII.

HALLAR LOS NUMEROS DE QUALQUIER RAZON.

331 ESta proposicion es inversa de la precedente, porque en aquella se dá nombre à la razon que tienen los numeros, y en esta se buscan los numeros correspondientes al nombre de la razon; para lo qual es menester tener en la memoria lo que se dixo en division de las razones, desde el num. 256.

Si la razon que se ha de señalar en numeros es de las especies de multiplice, se tomará el numero que expressa el nombre por antecedente, y por consequente la unidad: Como para señalar una tripla, tomese 3. por antecedente, y 1. por consequente, y será la razon de 3. à 1. la que se busca. Si quiero una noncupla, será la razon de 9. à 1. Si una vigecupla, será la razon de 20. à 1. y assi de las demás. Pero

si la razon ha de ser de las submultiplices, se hará al contrario, tomando la unidad por antecedente, y el numero expressado en la razon que se pide por consequente; como una subsextupla será de 1. à 6. mas una subdecupla será de 1. à 10. &c.

Quando la razon que se pide en numeros, es de las especies de superparticular, tomese por consequente el numero que se nombra; y por antecedente un numero que sea una unidad mayor: Como para señalar en numeros una sesquiquinta, tomese 4. por consequente, y 5. por antecedente, y será la razon de 5. à 4. Si se ha de dar una sesquinona, será de 10. à 9. Si una sesquivigesima, será de 21. à 20. Pero si ha de ser de las subsuperparticulares, se tomará por antecedente el numero nombrado, y por consequente un numero una unidad mayor; y assi, la razon subsesquialtera será de 2. à 3. la subsesquidecima será de 10. à 11. &c.

Si la razon ha de ser de las superparcientes, porque tiene dos nombres (258), sumense los dos numeros expressados por los dos nombres, y será el antecedente, cuyo consequente es el numero significado por el segundo nombre: Como para señalar una supertriparciente quartas, juntando 3. y 4. será 7. el antecedente, y 4. el consequente; esto es, de 7. à 4. para dar una superdecuparciente decimas septimas, juntando 10. y 17. será 27. el antecedente, y 17. el consequente. Para señalar una superquadriparciente nonas, será de 13. à 9. Pero si es de las subsuperparcientes, se hará al contrario; como una subsuperbiparciente undecimas, será de 11. à 13. &c.

En las multiplices superparticulares multipliquense los numeros significados por las dos partes, y al producto añadale una unidad, y será el antecedente, cuyo consequente es el numero de la segunda parte de la razon; y assi una dupla sesquitercia será de 7. à 3. porque los numeros expressados son 2. y 3. los quales multiplicados, y al producto añadida una unidad, hacen 7. que es el antecedente, y el consequente es el 3. señalado por el nombre sesquitercia. Assimismo, la razon sextupla sesquinona serà en numeros de 55. à 9. porque multiplicando 6. por 9. salen 54. y 1. son 55: que es el antecedente, cuyo consequente es 9. Si la razon es submultiplice superparticular, se compararà el menor numero con el mayor; y assi, la razon subsextupla sesquinona serà de 9. à 55.

En las multiplices superparcientes, se multiplicará el numero señalado por el nombre dupla, tripla, &c. por el numero significado por las palabras tercias, quartas, &c. y al producto se añadirá el numero expressado por las voces, bi, tri, quadru, &c. la suma serà el antecedente,

dente, cuyo consequente es el numero señalado por los nombres tercias, quartas, &c. Y assi la razon quadrupla superbiparciente septimas, será de 30. á 7. porque multiplicando 4. por 7. son 28. y añadiendo 2. hacen 30. porque es el antecedente, cuyo consequente es 7. Assimismo, la razon sextupla superquadruparciente quintas, será de 34. á 5. porque multiplicando 6. por 5. son 30. y añadiendo 4. hacen 34. cuyo consequente es 5. En las razones submultiplices superparcientes, se compàra el numero menor con el mayor; y assi, la razon subsextupla superquadruparciente quintas será de 5. á 34.

La razon desto consta por la misma naturaleza de las razones; y assi quien las huviere entendido bien; no necessita de otra demonstracion.

PROPOSICION XIX.

DADO EL DENOMINADOR, HALLAR LA RAZON de quien es denominador.

332 ESta proposicion es inversa de la 16. Si el denominador es numero entero, será la razon multiplice; y tomando el denominador por antecedente, y por consequente la unidad, será la razon que se busca: Como si al denominador es 4. será la razon de 4. á 1. Si es 12. será de 12. à 1. y assi de los demás, como por sì mismo es manifiesto.

333 Si el denominador es entero, y quebrado, reduzgase el entero al quebrado, (161) y entonces el numerador será el antecedente, y el denominador del quebrado el consequente. Y assi, la razon correspondiente al denominador 1. y medio, serà de 3. à 2. porque el entero reducido al quebrado es dos tercios; y tomando el numerador 3. por antecedente, y el 2. por consequente, serà de 3. á 2. Assimismo, la razon del denominador 5. y dos tercios, serà de 17. á 3. porque reducidos los 5. al quebrado, son 17. tercios. Del mismo modo, la razon correspondiente al denominador 3. y cinco septimos, serà de 26. à 7.

Si el denominador es quebrado solo, entonces la razon correspondiente serà la que tiene el numerador al denominador del quebrado; y assi, la razon correspondiente al denominador dos tercios, será de 2. á 3. y la correspondiente al denominador 5. 19. avos, serà de 5. á 19. Todo esto consta por lo que se dixo arriba num. 328.

PRO-

PROPOSICION XX.

LA RAZON DE IGUALDAD ES PRINCIPIO, Y RAIZ DE las demás razones.

334 QUe la razon de igualdad sea principio, y raìz de todas las demàs razones, assi como la unidad, respeto de los numeros, y el punto de la tranquilidad continua, es expresso sentir de Adrasto, y Eratostenes, segun Theon *c.* 31. El P. Clavio en la *defin.* 4. *del lib.* 5. de Eucl. prueba con su acostumbrada sutileza, como todas las razones se engendran de la razon de igualdad, y se resuelven en ella. Nicomaco: Pappo, Theon, y Boecio la hicieron tambien principio de todos los medios proporcionales. Con que esta proposicion no es ficcion nueva, sino que la admitieron, y probaron los Antiguos; lo qual digo por cierto recencior, citado por el P. Aynscom, que nuevamente pretende, que la razon de igualdad es lo mismo que zero, ò nada.

Y aunque podia probarla por diferentes medios, solo me valdrè de los denominadores. El denominador de la razon de igualdad es 1. El de la razon de mayor desigualdad es entero solo, ò entero, y quebrado; y el de la razon de menor desigualdad es quebrado solo, como consta por la *prop.* 16. La unidad, pues, es principio, y raìz de todo numero, assi entero, como quebrado (5): luego la razon correspondiente al denominador 1. será principio, y raìz de todas las razones correspondientes á los denominadores que son numero entero, ò quebrado, los quales son denominadores de todas las otras razones.

Consectarios.

335 De lo dicho se infiere, que la razon de mayor desigualdad es mayor que la de igualdad; y la razon de menor desigualdad es menor: porque la quantidad de las razones se mide por los denominadores; (329) y la razon de mayor desigualdad tiene por denominador à lo menos un entero, y quebrado, que es mayor que el denominador 1. de la razon de igualdad; y el denominador de la razon de menor desigualdad es quebrado, el qual es menor que el denominador 1. de la razon de igualdad.

336 Si la razon de menor desigualdad vá creciendo successivamente por todos los terminos, siempre se acercarà mas, y mas á la razon de igualdad; però nunca llegará à igualarla, sino que siempre será menor: porque el denominador de la razon de menor desigualdad es un quebrado, el qual puede crecer continuamente sin llegar à

nu-

numero entero, ò à la unidad, que es el denominador de la razon de igualdad; como parece en este quebrado $\frac{1}{2}$, que puede aumentarse deste modo $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$, &c. y como ha de pasar por infinitos terminos, jamàs llegarà à la unidad.

337 Assimismo, si la razon de mayor desigualdad và decreciendo successivamente por todos los terminos, siempre irà acercandose à la razon de igualdad, pero nunca llegarà; porque como su denominador à lo menos es un entero, y quebrado, y el quebrado pueda disminuirse infinitamente, deste modo $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$, &c. jamàs llegarà à desvanecerse el quebrado, de suerte, que quede sola la unidad, ò el entero, que es el denominador de la igualdad.

338 Ninguna razon de mayor, ò menor desigualdad absolutamente puede ser la maxima, ò minima de todas; sino que dada qualquier razon destas, se puede señalar otra mayor, ò menor; porque sus denominadores son numero entero, ò quebrado, y absolutamente no ay numero maximo, ni minimo. Esto se ha de entender de los generos de razon de mayor, ò menor desigualdad, en quanto cada una comprehende cinco especies; pero no de cada especie de por sì: porque, como aora verémos, puede aver maxima, y minima en algunas destas.

339 En las razones multiplices, la dupla es la minima de todas, porque los denominadores de las razones son numero entero; y de los enteros no puede aver otro numero menor que el 2. que es el denominador de la razon dupla. Pero en las submultiplices, la subdupla es la maxima; porque el denominador destas es un quebrado que tiene la unidad por numerador, de los quales quebrados no puede aver otro mayor que el $\frac{1}{2}$, que es denominador de la dupla.

340 En las razones superparticulares, la sesquialtera es la maxima; porque el denominador destas razones es 1. y un quebrado que tiene por numerador la unidad, de los quales ninguno es mayor que el $\frac{1}{2}$; porque el dicho quebrado denota una parte aliquota, de las quales no ay otra mayor que la mitad; y assi, el denominador 1. y medio, serà el mayor de todos los de las razones superparticulares. Pero en las subsuperparticulares, la subsesquialtera es la minima, porque su denominador dos tercios es el minimo de todos los desta especie.

341 En las razones superparcientes, multiplices superparticulares, y multiplices superparcientes, absolutamente no ay maxima, ni minima: porque como cada una consta à lo menos de dos partes, por la una puede ser maxima, y por la otra minima; como se vè en la dupla sesquialtera, en donde por ser dupla es minima, y por sesquialtera maxima.

PRO-

PROPOSICION XXI.

QUALQUIER RAZON ES LO MISMO QUE UN QUEBRAdo, cuyo numerador es el antecedente, y el denominador el consequente.

342 ESta proposicion es tan notoria, como un axioma; y assi solo necessita de explicacion. Qualquier razon se expressa con dos terminos, que son el antecedente, y consequente. Qualquier quebrado tambien se explica con dos terminos, que son el numerador, y denominador: luego si el antecedente se hace numerador, y el consequente denominador, la razon serà quebrado. Pero se ha de advertir, que aqui no se toma el quebrado en todo rigor, en quanto el numerador es menor que el denominador, sino en quanto puede ser igual, y mayor, como se advirtiò arriba (129); ni es necessario interponer linea entre el antecedente, y consequente, como en los quebrados.

Consectarios.

De aqui es manifiesto, que casi toda la doctrina, y operaciones de los quebrados se pueden aplicar á las razones, como aora verèmos, suponiendo como cierto, que aqui en los numeros respectivos, la razon de igualdad es lo mismo que en los absolutos la unidad, como està probado en la proposicion antecedente.

343 Qualquier razon tiene el mismo respeto à la razon de igualdad, que el antecedente al consequente; porque qualquier quebrado tiene la misma razon à la unidad (134), que el numerador al denominador; y la razon de igualdad en las razones, es lo mismo que la unidad en los numeros, como està dicho.

344 Las razones que tienen un mismo consequente, tienen entre sì la proporcion de los antecedentes; y assi la razon de 3. à 2. es à la razon de 6. á 2. como el antecedente 3. al antecedente 6. esto es, la razon de 3. á 2. es mitad de la de 6. à 2. porque siendo los consequentes iguales, toda la desigualdad de las razones proviene de los antecedentes: luego tienen la proporcion de los antecedentes. Esto mismo se demonstrò en los quebrados *cap.* 1. *theor.* 4.

3	6
2	2

345 Las razones tienen entre sì la misma proporcion, que los productos de la multiplicacion en cruz de los antecedentes por los consequen-

quentes, como está demonstrado en el *theor. 5. del cap. 1.* de los quebrados: y asi la razon de 8. á 3. á la rozon de 5. à 9. tiene la misma razon que 72. á 15. ò abreviando, que 24. á. 5. De donde se infiere, que si multiplicando en cruz, los productos son iguales, son tambien las razones iguales. Pero si son desiguales, aquella razon serà mayor, cuyo antecedente multiplicando el consequente de la otra razon produxere mayor numero; y asi, la razon de 8. á 3. es mayor que la de 5. á 9. porque el 72. es mayor, que el 15.

72	15
8	5
X	
3	9

346 Las razones que tienen iguales antecedentes, tienen entre sí la razon reciproca de los consequentes, como se demonstrò en el *theor. 6.* del lugar citado. Con que la razon de 3. à 2. à la razon de 3. à 9. es como 9. á 2. Asi mismo, la proposicion de la razon de 5. à 1. á la de 5. á 7. es como 7. á 1. y asi de las demàs.

3	3
2	9

347 Para reducir una razon á los minimos terminos, dividase el mayor numero (sea el antecedente, ò el consequente) por el menor; y si sobra algo, dividase el menor por el residuo. Si de esta particion sobra algo, partase el primer residuo por el segundo; y desta suerte continuando, hasta que sobre zero, ò unidad. Si sobra unidad no se podrà reducir, porque està yá en los minimos terminos. Si sobra zero, el ultimo partidor serà la maxima medida comun, por la qual se partiràn los terminos de la razon, y quedarà reducida. (149)

Como si se ha de reducir la razon de 80. à 12. diviendo el 80. por 12. quedan 8. partiendo 12. por 8. quedan 4. partiendo 8. por 4. queda zero; pues el 4. es la maxima medida comun, por la qual dividiendo los terminos 80. y 12. de la razon propuesta, vendrà la razon reducida de 20. à 3.

348 Para reducir las razones à un mismo, ò comun consequente, se obrarà como en los quebrados. (154) Sean las razones de 5. à 7. y de 8. à 15. Multiplicando los consequentes 7. por 15. sale el comun consequente 105. y multiplicando en cruz salen los nuevos antecedentes 75. y 56. Con que las razones reducidas seràn de 75. à 105. y de 56. à 105.

75	56
5	8
X	
7	15
105	

349 Para reducir una razon à un consequente determinado, se multiplicarà el consequente dado por el antecedente de la razon, y el producto se partirà por el consequente de la misma razon: como, si la razon de 5. à 3. se ha de reducir à una razon que tenga 6. por consequente, se multiplicarà el 6. por el 5. y el producto 30. se partirà por el 3.

el

el quociente 10. ſerà el antecedente nuevo, y la razon reducida ſerà de 10. à 6. como conſta por el num. 156. Si no ſe puede partir enteramente, tampoco ſe podrà reducir.

350 Para ſumar las razones, ſe reduciràn primero á un comun conſequente, y deſpues ſe ſumarán los antecedentes como en los quebrados; y aſsi, ſi las razones que ſe han de ſumar ſon de 4. à 3. y de 8. à 10. reducidas à un comun conſequente ſon de 40. á 30. y de 24. á 30. Sumenſe los antecedentes 40. y 24. y ſerà la ſuma la razon de 64. á 30.

40	24
4	8
3	10
30	

351 Para reſtar. Reducidas à un comun conſequente, reſteſe el un antecedente del otro; y aſsi, ſi ſe ha de reſtar la razon de 8. à 10. de la razon de 4. á 3. reducidas ſon de 24. à 30. y de 40. à 30. Reſteſe el antecedente 24. de 40. y quedarà la razon de 6. á 30. que es la diferencia entre las razones dadas.

352 Para multiplicar. Se multiplicaràn los antecedentes entre sì, y ſaldrà el nuevo antecedente. Aſsimiſmo, multiplicando los conſequentes entre sì, ſe hallarà el nuevo conſequente. Con que multiplicando la razon de 7. à 3. por la de 5. à 9. ſerá el producto la razon de 35. à 27. como ſe dixo en los quebrados. Para doblar, treſdoblar, quatrodoblar, &c. una razon, ſe multiplicarà el antecedente por 2. 3. 4. &c. como ſe dixo en los quebrados.

7——	35
3——	27

353 Para partir. Multipliqueſe el antecedente de la razon dividenda por el conſequente del diviſor, y el producto ſerà el antecedente del quociente. Aſsimiſmo, multipliqueſe el conſequente de la razon dividenda por el antecedente del diviſor, y el producto ſerà el conſequente del quociente; como para dividir la razon de 8. à 2. por la de 5. à 7. multiplicando el antecedente 8. por el conſequente 7. ſale el nuevo antecedente 56. y multiplicando el conſequente 2. por el antecedente 5. reſulta el nuevo conſequente 10. Con que el quociente es la razon de 56. á 10. Para tomar la mitad, tercio, quarto, &c. de una razon, ſe multiplicarà el conſequente por 2. 3. 4. &c. como en los quebrados.

8	X 5	56
2	7	10

354 Eſtas quatro operaciones de ſumar, reſtar, multiplicar, y partir ſe pueden hacer por los denominadores de las razones, hallando primero los denominadores (325), ſumando, reſtando, multiplicando, ò partiendolos llanamente, y deſpues buſcando la razon correſpondiente al denominador que ſaliere. (332) Como ſi ſe ha de multiplicar la ra-

zon

zon de 8. à 4. por la de 9. à 3. multiplico los denominadores 2. y 3. y hallo el denominador 6. cuya razon es de 6. à 1.

355 Algunos confunden el sumar, y restar razones, con el multiplicar, y partir, diciendo, que el sumar razones es lo mismo que el multiplicar; y el restar, lo mismo que el partir. Pero se engañan totalmente, como lo advierten el P. Clavio à ultimo del lib. 9. de Euc. y el P. Aynscom en el libro de la naturaleza de las Razones cap. 14. Porque las razones son lo mismo que los quebrados, como queda probado, y lo demuestran Clavio en el lugar citado, Aynscom en dicho libro cap. 13. Cardano en el lib. 5. de proporciones prop. 12. Salignaco lib. 2. cap. 1. Henischio lib. 3. Gregorio à S. Vincencio lib. 8. Candalla, Volumnio, y otros muchos; pues si en los quebrados son diferentes la suma, y resta, de la multiplicacion, y division, como es cierto, tambien lo seràn en las razones. A mas desto, porque haciendo las operaciones por los denominadores (354), sale diferente la suma de la multiplicacion, y la resta de la division, como es manifiesto.

356 Multiplicando entre sì dos razones de mayor desigualdad, la razon producida tambien es de mayor desigualdad; como si se multiplica la razon de 8. á 2. por la de 6. à 3. sale la razon de 48. à 6. ò de 8. à 1. de mayor desigualdad; porque como los antecedentes 8. y 6. son mayores que los consequentes 2. y 3. necessariamente han de producir mayor antecedente que el consequente; y assi la razon producida es razon de mayor desigualdad.

8	6	48
2	3	6

357 Multiplicando entre sì dos razones de menor desigualdad, producen una razon de menor desigualdad; como si la razon de 2. à 8. se multiplica por la razon de 3. à 6. saldrà la razon de 6. á 48. de menor desigualdad; porque como los antecedentes son menores que los consequentes, necessariamente el antecedente nuevo 6. ha de ser menor que el consequente nuevo 48.

2	3	6
8	6	48

358 Multiplicando una razon de mayor desigualdad por otra de menor desigualdad, la razon producida puede ser de mayor desigualdad, como parece en el primer exemplo; de igualdad, como se vè en el segundo exemplo; ò de menor desigualdad, como lo enseña el exemplo tercero. Però la razon producida siempre es menor que la razon de mayor desigualdad multiplicanda, y mayor que la razon de menor desi-

gualdad multiplicante ; porque la unidad à un numero de los multiplicantes, tiene la miſma razon que el otro numero de los multiplicantes al producto (57) : Luego la razon de igualdad (que es lo miſmo que la unidad en los numeros abſolutos) tendrà el miſmo reſpeto á la razon de 3. à 1. en el primer exemplo, que la razon de 2. à 4. à la razon producida de 6. à 4. y como la razon de 3. á 1. es mayor que la razon de igualdad, tambien la razon de 6. à 4. ſerà mayor que la de 2. à 4. que es de menor deſigualdad.

3—2	6
1—4	4
2—2	4
1—4	4
6—3	18
5—4	20

Y alternando, como la razon de igualdad, à la de 2. à 4. aſsi la de 3. à 1. al producto de 6. à 4. y como la razon de 2. á 4. es menor que la razon de igualdad; tambien la razon de 6. à 4. producida, ſerà menor que la razon de mayor deſigualdad multiplicanda de 3. á 1.

359 Multiplicando qualquier razon como la de 8. à 5. por la razon de igualdad de 3. á 3. ſale la miſma razon multiplicada de 24. à 20. eſto es, que el producto es igual à la razon que ſe multiplica; porque como en la razon de igualdad el antecedente 3. es igual al conſequente 3. es lo miſmo que ſi fuera un ſolo numero 3. pues multiplicando el antecedente 8. y conſequente 5. por un miſmo numero 3. ſalen los numeros 24. y 15. en la miſma razon de 8. à 5. (312) Luego la razon de 24. á 15. es igual, ò la miſma que la de 8. à 5. Y por eſto, multiplicando una razon de igualdad por otra tambien de igualdad, la razon producida es de igualdad.

8—3	24
5—3	15

360 Si los terminos de una qualquier razon, como de 3. à 5. ſe invierten de ſuerte, que ſalga otra razon de 5. à 3. y ſe hace la multiplicacion de eſtas dos razones, la razon producida ſerà de igualdad; porque como los antecedentes 3. y 5. ſon los miſmos numeros que los conſequentes 5. y 3. haciendo la multiplicacion de los antecedentes entre sì, y tambien de los conſequentes entre sì, ſaldràn numeros iguales, que hacen la razon de igualdad.

3—5	15
5—3	15

361 Si de dos razones iguales, como de 5. à 10. y de 3. à 6. ſe invierten los terminos de la una, de ſuerte, que ſean de 5. à 10. y de 6. á 3.

13. multiplicandolas, estando invertida la una, saldrá la razon de igualdad; porque siendo las razones de 5. á 10. y de 3. à 6. iguales, serán los numeros 5. 10. 3. 6. proporcionales; y haciendo la inversion de los terminos de la una razon, y despues multiplicando las razones, se vienen à multiplicar los medios, y los extremos: Luego han de salir numeros iguales (298) que hacen la razon de igualdad.

5—6		30
10—3		30

362 Si son tres, ò mas numeros en continua proporcion, como 8. 4. 2. y se toma un otro qualquier numero, como 16. las razones de 8. à 16. de 4. à 16. de 2. à 16. son continuamente proporcionales; porque teniendo los mismos consequentes, tienen la razon de los antecedentes (344), que por la supoficion son continuamente proporcionales.

8.	4.	2.
16.	16.	16.

Assi mismo serán continuamente proporcionales las razones de 16. à 8. de 16. à 4. de 16. à 2. porque como tienen iguales antecedentes, tienen entre sì la razon reciproca de los consequentes (346), los quales por la supoficion son continuamente proporcionales.

16.	16.	16.
8.	4.	2.

PROPOSICION XXII.

REDUCIR QUALQUIER RAZON ENTRE QUEBRADOS à razon entre numeros enteros.

363 MUchas veces sucede, que por estár una razon entre quebrados solos, ò entre enteros, y quebrados, no se puede conocer facilmente, ni hacer en ella algunas operaciones de las referidas, ni de las que darèmos adelante; por lo qual es conveniente que enseñemos el modo de reducirla á numeros enteros.

Sea, pues, qualquier razon de dos tercios à cinco septimos, la qual se ha de reducir à enteros. Reduzganse los quebrados à un comun denominador (154), y será la razon de 14. 21. avos á 15. 21. avos; y porque los quebrados que tienen iguales denominadores guardan entre si la razon de los denominadores será el quebrado 14. 21. avos à 15. 21. avos, como 14. à 15. Luego la razon de dos tercios á cinco septimos, ò de 14. 21. avos à 15. 21. avos, que es toda una estará reducida á la razon de 14. á 15.

Otro exemplo. Sea la razon de 9. à dos tercios la que se ha de reducir á razon entre numeros enteros. Pongase una unidad debaxo el 9. assi $\frac{9}{1}$, y luego reduzganse los quebrados $\frac{9}{1}$ $\frac{2}{3}$ à un comun denominador, y serán 27. tercios, y dos tercios; tomense los numeradores solos, y será la razon reducida de 27. à 2. la misma que la de 9. à dos tercios.

Si la razon dada es de 3. y dos quintos à 8. y tres quartos, reduzgase los enteros à los quebrados (162), y serán 17. quintos, y 35. quartos. Reduzganse aora á un comun denominador $\frac{68}{20}$, y $\frac{175}{20}$; tomando los numeradores solos, quedarà la razon sobredicha reducida à enteros de 68. á 175.

PROPOSICION XXIII.

MULTIPLICANDO EL DENOMINADOR DE QUALQUIER razon por el consequente, produce el antecedente.

364 SEa qualquier razon de 8. à 2. cuyo denominador es 4. (325) digo, que si el 4. se multiplica por el consequente 2. el producto serà el antecedente 8. porque el denominador nace de la division del antecedente por el consequente: Luego multiplicando el denominador por el consequente, se restituye el antecedente.

Consectario.

365 Dividiendo el antecedente de una razon por el denominador, sale el consequente; como en la razon de 12. à 4. cuyo denominador es 3. Digo, que dividiendo el 12. por 3. sale el consequente 4. porque multiplicando el consequente por el denominador, se produce el consequente: Luego dividiendo el antecedente por el denominador, buelve à salir el consequente.

366 Dado el denominador, y un termino de la razon, se hallarà la dicha razon deste modo: Si el termino dado es el consequente, multipliquese por el denominador, y saldrà el antecedente: pero si es el antecedente, dividase por el denominador, y saldrà el consequente; como si el denominador de una razon es 8. y se dà el consequente 4. multiplicando 8. por 4. saldràn 32. y assi la razon serà de 32. à 4. pero si el termino dado es el antecedente 32. partiendo por 8. saldrà el consequente 4. y la razon serà de 32. à 4.

PRO-

PROPOSICION XXIV.

DADO EL ANTECEDENTE HALLAR EL CONSEQUENTE *en qualquier razon.*

367 SEa el antecedente 4. al qual se ha de buscar un consequente, de suerte, que formen una razon quintupla. Primeramente busquense los terminos de la razon quintupla, y serán 5. à 1. (331). Multipliquense aora el antecedente dado 4. por el consequente 1. y el producto 4. dividase por el antecedente 5. pues el quociente quatro quintos será el consequente que se busca, y la razon quintupla será de 4. à quatro quintos.

Assimismo, dado el antecedente 9. se ha de hallar un consequente, de modo, que resulte una razon sesquialtera. Los terminos de la sesquialtera son 3. y 2. (331). Multipliquense el antecedente 9. por el consequente 2. de la razon sesquialtera, y el producto 18. dividase por el antecedente 3. El quociente 6. será el numero que se busca, y la razon sesquialtera será de 9. á 6.

Del mismo modo, dado el antecedente 8. se ha de hallar un consequente, de suerte, que sea la razon subquadrupla. Los terminos desta razon son 1. y 4. Multiplicando el antecedente 8. por 4. y partiendo el producto 32. por 1. sale el consequente 32. y assi la razon subquadrupla será de 8. à 32.

La razon deste modo de obrar nace de la *prop.* 4. (298). Porque en el ultimo exemplo (lo mismo es de los demàs) lo que se pide es una razon semejante à la de 1. à 4. dado el antecedente 8. y se ha hallado el consequente 32. de suerte, que son quatro numeros proporcionales 1. 4. 8. 32. Pues como en esta el producto de los medios es igual de los extremos, y los medios están conocidos que son 4. y 8. si se multiplican, y el producto 32. se parte por un extremo conocido, que es 1. el quociente serà el otro extremo 32. que se busca. Y esta es la regla de tres, como luego veremos.

PROPOSICION XXV.

DADO EL CONSEQUENTE HALLAR EL ANTECEDENTE *en qualquier razon.*

368 ESta proposicion es inversa de la antecedente. Sea dado el consequente 12. al qual se ha de hallar un antecedente

en razon superbipareiente septimas. Los terminos desta razon son 9. y 7. (33). Multipliquense, pues, el consequente dado 12. por el antecedente 9. y partiendo el producto 108. por el consequente 7. saldrá el antecedente 15. y tres septimos, que es el que se busca; y la razon de 15. y tres septimos à 12. serà superbipareiente septimas.

Assimismo, dado el consequente 10. se busca un antecedente que constituya una razon subquintupla. Los terminos desta razon son 1. y 5. Multipliquese, pues el consequente 10. por el antecedente 1. y partiendo el producto 10. por el consequente 5. saldrá el antecedente 2. de la razon subquintupla de 2. à 10.

Del mismo modo, conocido el consequente 22. se busca un antecedente en razon subtripla sesquiseptima. Los terminos desta razon son 7. à 22. y pues este consequente es igual al que está dado, no ay mas hacer, sino tomar el antecedente 7. por el que se busca.

La razon deste modo de obrar es la misma. Porque en el exemplo segundo son proporcionales 2. 10. 1. 5. y como los medios están conocidos, multiplicando 10. por 1. y partiendo el producto por un extremo conocido 5. saldrá el otro 2. que se busca.

PROPOSICION XXVI.

SI DE QUATRO NUMEROS PROPORCIONALES A. B. C. D. los extremos A. D. son entre sì primos, todos los quatro serán los minimos en su proporcion.

369 ESta es la *prop.* 1. *del lib.* 8. de Euclides. Sean proporcionales en qualquier razon, como A. à B. assi C. à D. y los extremos A. y D. sean entre sì primos. Digo, que los dichos proporcionales son los menores que en numeros enteros se pueden hallar en su proporcion; esto es, que en la razon subdupla, que es la que guardan, no se pueden hallar otros quatro numeros proporcionales enteros, que sean menores que los sobredichos.

A.	B.	C.	D.
3.	6.	2.	4.

Porque no se pueden señalar otros numeros menores; y si acaso alguno dixere que estos otros numeros E. F. G. H. son menores, probarè que han de ser mayores. Porque como E. F. G. H. son proporcionales à A. B. C. D. serán por igualdad de razon proporcionales A. E. D. H. (317); y alternando (306) serán proporcionales A. D. E. H. Y pues A. y D. son entre sì pri-

E.	F.	G.	H.
6.	12.	4.	8.

primos, serán los minimos en su razon (323): luego E. y H. no son los minimos: luego son mayores. Y assi, los intermedios F. y G. tambien han de ser mayores que los medios B. y C. porque entrambos tienen la missma razon con los extremos.

Pero advierto, que aqui habla Euclides de los numeros enteros, excluyendo la unidad, y los quebrados; porque si ponemos en un termino de los proporcionales la unidad, ò algun quebrado, podràn darse otros numeros menores que los proporcionales, que tengan los extremos entre sì primos como estos 1. 2. 2. 4. ò estos otros $\frac{1}{2}$, 1. 3. 6.

PROPOSICION XXVII.

HALLAR LOS NUMEROS QUE UNO QUISIERE continuamente proporcionales, minimos en una razon dada.

370 SEa una qualquier dada de A. à B. y se han de hallar primeramente tres numeros continuamente proporcionales, que guarden la razon dada de A. à B. y seràn los menores que todos los que pueda aver en la missma razon. Si los numeros A. y B. no son los minimos en su razon, hallense los minimos, reduciendo la dicha razon de A. à B á minimos terminos. (347) Despues desto multipliquense el numero A. por sì mismo, y serà AA. Multipliquese A. por B. y será AB. Multipliquese ultimamente B. por sì mismo, y serà BB. Digo, pues, que los numeros AA. AB. BB. son continuamente proporcionales, y los minimos en là razon de A. à B.

A	B		
5.	3.		
AA	AB	BB	
25.	15.	9.	
AAA	AAB	ABB	BBB
125.	75.	45.	27.

Que sean continuamente proporcionales lo pruebo assi: El numero AA. à AB. tiene la missma razon que A. á B. (305). Assimismo, la razon de AB. à BB. es la missma que la de A. à B. Luego los sobredichos tres numeros son continuamente proporcionales, porque continuamente guardan una missma razon.

Que sean los minimos en aquella razon que guardan de A. à B. lo pruebo assi: Como A. y B. son numeros minimos en su razon, seràn entre sì primos (323); y multiplicandose à sí mismos, los pro-

 ductos

ductos AA. y BB. serán tambien entre sì primos, (73) que es la *prop.* 29. *del lib.* 7. de Eucl. y por consiguiente serán los minimos en su razon. (323) Luego por la propcficion antecedente los tres numeros AA. AB. BB. son los minimos en aquella razon que tienen.

Mas se han de hallar quatro numeros continuamente proporcionales, que guarden entre sì la misma razon que A. à B. y sean los minimos de todos los quatro numeros continuamente proporcionales en la misma razon. Si A. y B. no son los minimos en su razon, hallanse los minimos en la misma razon. (347) Y aviendo hallado los tres AA. AB. BB. continuamente proporcionales, y minimos en su razon, multiplicando AA. y AB. por A. y AB. BB. por B. saldrán los quatro numeros AAA. AAB. ABB. BBB. que se buscan.

Del mismo modo se hallarán cinco, y mas numeros continuamente proporcionales, y minimos en la razon que guardan entre sì. La demonstracion es la misma. Esta es la *prop.* 2. *del lib.* 8. de Euclides.

Consectarios.

371 Si ay muchos numeros continuamente proporcionales, y minimos en su razon, como 25. 15. 9. los extremos 25. y 9. son primos entre sì, que es la *prop.* 3. *del lib.* 8. de Euclides. Y si son tres los numeros continuamente proporcionales en la forma sobredicha, los extremos son numeros quadrados; si son quatro, los extremos son cubos; si cinco, quadrado quadrados, &c.

372 La unidad, y los numeros A. AA. AAA. &c. son continuamente proporcionales. Tambien lo son la unidad, y los numeros B. BB. BBB. &c. y tantos medios ay entre los dos extremos de los referidos numeros, quantos entre cada extremo, y la unidad: v. gr. entre AAA. y BBB. ay dos numeros medios, pues otros tantos ay entre AAA. ò BBB. y la unidad.

PROPOSICION XXVIII.

LOS NUMEROS MINIMOS, O LAS RAICES DE UNA razon, miden igualmente á otros sus proporcionales.

373 SEan 3. y 2. los minimos numeros, ò raices de la razon sesquialtera. Digo, que miden á todos los otros numeros enteros que están en razon sesquialtera, como à 12. y 8. Porque siendo 3. y 2. los minimos, necessariamente 12. y 8. han de ser mayores; lue-

luego 3. y 2. ſerán partes aliquotas, ò aliquantas ſemejantes, reſpeto de ellos; pues de ningun modo pueden ſer tres partes aliquantas ſemejantes, porque eſtas conſtan de partes aliquotas ſemejantes (19), y eſtas aliquotas ſemejantes guardarian la miſma razon que 3. à 2. y ſerian menores, por ſer partes; con que 3. y 2. no ſerian los minimos numeros en la razon ſeſquialtera, que es contra la ſupoſicion: luego han de ſer aliquotas ſemejantes, y por conſiguiente miden à los numeros 12. y 8. Lo miſmo demoſtrarè de otros numeros en razon ſeſquialtera. *Eſta* es la *prop.* 21. *del lib.* 7. de Euclides.

PROPOSICION XXIX.

SI TRES NUMEROS SON PROPORCIONALES A OTROS tres, tambien ſus diferencias ſon proporcionales.

374 SEan tres numeros A. B. C. proporcionales à otros tres D. E. F. La diferencia de A. à B. ſea G. y la de B. à C. ſea H. Aſsimiſmo, la diferencia de D. à E. ſea I. y la de E. à F. ſea K. Eſto ſupueſto digo, que la miſma razon tiene la diferencia G. à la diferencia H. que la diferencia I. à la diferencia K. eſto es; que las diferencias ſon proporcionales, como G. à H. aſsi I. à K.

	G		H	
	2		1	
A		B		C
6		4		3
D		E		F
18		12		9
	I		K	
	6		3	

Porque ſiendo proporcionales A. à B. como D. à E. ſerán, invirtiendo B. à A. como E. à D. (307). Luego reſtando los numeros menores B. y E. de los mayores A. y D. quedarán los reſiduos G. y I. proporcionales (311), como B. à E. aſsi G. à I. Aſsimiſmo ſe demonſtrará, que las diferencias H. y K. ſon proporcionales con B. y E. Luego la razon de G. à I. es la miſma que la de H. à K. (297). Luego es como G. à I. aſsi H. à K. que es ſer proporcionales.



PROPOSICION XXX.

SI A DOS NUMEROS SE AÑADE UN NUMERO, ò de los mismos se resta el mismo numero, las diferencias de las sumas, ò restas serán las mismas que antes de sumar, ò restar.

375 SEan dos numeros 8. y 12. cuya diferencia es 4. Digo lo primero, que si se añade un numero 5. de suerte que sean 13. y 17. la diferencia tambien serà 4. Porque añadiendo el 5. á los numeros 8. y 12. tanto se aumenta el uno como el otro: luego la diferencia es la misma que antes.

Digo lo segundo, que si de dos numeros 8. y 12. se resta un mismo numero 5. los residuos, ò restas 3. y 7. tendràn la misma diferencia que los mismos 8. y 12. Porque restando un mismo numero de los dos, tanto se disminuye el uno como el otro; luego la diferencia es la misma.

	4	
8		12
	5	
13		17
3		7

PROPOSICION XXXI.

SI TRES NUMEROS MULTIPLICAN, O DIVIDEN por un mismo numero, las diferencias de los productos, ò quocientes son proporcionales à las diferencias de los dichos tres numeros.

376 SEan tres numeros 8. 12. 16. los que se han de multiplicar, ò dividir por un qualquier numero 4. La diferencia de 8. à 12. es 4. y la de 8. à 16. es 8. Multiplicando, pues, ò dividiendo los dichos tres numeros por 4. salen los productos 32. 48. 64. y los quocientes 2. 3. 4. Digo, que las diferencias 16. y 32. del producto 32. à 48. y del mismo 32. à 64. ò las diferencias 1. y 2. del quociente 2. à 3. y del mismo 2. à 4. son proporcionales à las diferencias 4. y 8. de los tres numeros 8. 12. 16.

8	12	16	4	8
	4			
32	48	64	16	32
2	3	4	1	2

Porque el numero 4. multiplicando à los numeros dados 8. 12. 16. produce los numeros 32. 48. 64. proporcionales. (312) Luego las diferencias de 8. 12. 19. y las de 32. 48. 64.

84. son proporcionales. (374) Assimismo, dividiendo los numeros propuestos 8. 12. 16. por 4. salen los quocientes 2. 3. 4. proporcionales (315). Luego las diferencias tambien son proporcionales.

PROPOSICION XXXII.

SI QUATRO NUMEROS SE EXCEDEN IGUALMENTE, la suma de los extremos es igual à la suma de los medios, y al contrario.

377 Este Theorema demonstrarèmos en todos los numeros, cuyo excesso es igual, ò que forman una progression Arithmetica, en el lib. 4. aora basta en solos quatro. Sean, pues, 4. 6. 8. 10. cuyo excesso, ò diferencia es 2. Digo lo primero, que la suma 14. de los extremos 4. y 10. es igual à la suma 14. de los medios 6. y 8. porque si el extremo mayor 10. dá su diferencia, ò excesso 2. al menor extremo 4. resultaràn los quatro numeros 6. 6. 8. 8. como es manifiesto, en los quales los extremos son iguales à los medios; luego la suma de los extremos es igual à la suma de los medios.

4. 6. 8. 10.

378 Digo lo segundo, que si son quatro numeros, y la suma de los extremos es igual à la de los medios, los tales numeros se exceden igualmente. Porque si las diferencias, ò excessos no fueren iguales, dando el extremo mayor 10. su diferencia 2. al menor extremo 4. no quedarian los numeros 6. 6. 8. 8. para que las sumas de los extremos, y medios sean iguales; luego los excessos han de ser iguales.

Advierto, que no es preciso que los quatro numeros propuestos se excedan continuamente con un mismo excesso, como en el exemplo, sino que basta que los dos primeros, y dos ultimos se excedan igualmente como en estos 3. 7. 5. 9. en los quales la demonstracion es la misma.

PROPOSICION XXXIII.

SI DOS NUMEROS MULTIPLICAN A UNO, la diferencia de los productos es igual al producto de la diferencia de los multiplicadores, por el mismo numero multiplicando.

379 Multipliquen estos dos numeros 3. y 5. (cuya diferencia es 1.) á un qualquier numero 4. y los productos sean

12. y 20. cuya diferencia es 8. Digo que esta diferencia 8. es igual al producto del mismo 4. por la diferencia 2. Porque si los numeros 3. y 5. fueran iguales, tambien los productos de la multiplicacion por 4. serian iguales: luego el ser el producto 20. mayor que el producto 12. proviene de que el numero 5. es mayor que el numero 3. esto es, por la diferencia 2. multiplicada por 4. Luego la diferencia de los productos 20. y 12. es igual al producto de la diferencia 2. por 4.

	2	
3		5
	4	
12		20
	8	

Estas noticias, y proporciones bastan para entender de raiz este Libro; en los dos siguientes se proseguirán por mas extenso. Aora passemos á la Regla de Tres.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA REGLA DE TRES, ò de Proporcion.

380 Regla de Proporcion es la que enseña el modo de hallar un numero incognito por la proporcion que tiene con algunos conocidos, los quales porque son tres (à lo menos los principales) se dice *Regla de Tres*; y tambien de *Oro*, por la grande utilidad que trae. Dividese en *Simple*, y *Compuesta*; y cada una de estas en *Directa*, è *Inversa*.

381 La Regla de Tres simple, es la que por solos tres numeros dados, ò conocidos enseña à hallar un quarto numero proporcional; como en esta question. Un Oficial en 4. meses gana 20. libras, quanto ganará al mismo respeto en 8. meses? En donde son conocidos tres numeros, y se busca la ganancia correspondiente à los 8. meses, al respeto de lo que gana en los 4. meses; de suerte, que han de tener la misma razon los 4. meses à la ganancia 20. libras, que los 8. meses à la ganancia que se busca, la qual es 40. libras; esto es, son proporcionales como 4. à 20. asi 8. à 40.

382 La Regla de Tres compuesta, es la que contiene muchas proporcionales; y asi concurren mas que tres terminos conocidos, por los quales se busca un numero no conocido: Como si 4. hombres en 6. meses ganan 50. libras, 8. hombres en 12. meses quanto ganarán? En don-

donde ay conocidos cinco numeros, y se busca el sexto.

383 Aqui se han de advertir dos cosas: La primera, que aunque en esta regla compuesta concurran mas què tres terminos, esso no obstante se dice *Regla de Tres*; porque entre los terminos conocidos solos ay tres principales á quien los otros acompañan, como luego verèmos. La segunda, que en todas las reglas de tres los numeros, ò terminos conocidos son impares, como tres, cinco, siete, &c. y con el que falta se hace numero de terminos pares.

PROBLEMA I.

DISPONER LOS TERMINOS DE LA REGLA DE TRES simple, y conocer si es directa, ò inversa.

384 DE los tres numeros conocidos que concurren en la regla de tres simple, los dos son homogeneos: esto es, numeran una misma especie, de los quales el uno tiene annexa la question. El otro numero de los tres conocidos es homogeneo con el quarto numero que se busca: Como en la question propuesta (381), si un oficial en 4. meses gana 20. libras, en 8. meses què ganará? Los 4. y 8. meses son homogeneos; y las 20. libras son tambien homogeneas con la ganancia que se busca; pero de los dos terminos conocidos homogeneos 4. y 8. el 8. tiene annexa la question, porque son los meses, respecto de los quales se busca la ganancia.

385 Pues para disponer, ò ordenar la regla de tres, segun el metodo debido, el numero que tiene annexa la question pongase en tercer lugar, y su homogeneo en primero; el otro numero, que es solitario, pero homogeneo al numero incognito, estará en segundo lugar, ò en medio de los dos homogeneos: de suerte, que el primer numero ha de ser semejante al tercero, y el segundo al quarto. Como porque en la misma question el numero 8. meses tiene annexa la question, se pondrà en tercer lugar; y su homogeneo, que son los 4. meses, estarà en primer lugar. El otro termino solitario, que son las 20. libras, pongase en segundo lugar, assi: Si en 4. meses se ganan 20. libras, en 8. meses què se ganarà? Y de este modo los terminos semejantes seràn los antecedentes, y tambien los consequentes, como lo explica Euclides *en la defin. 14. del lib. 5.*

386 Estando assi ordenados los terminos, se conocerà si la proporcion es directa, ò inversa; deste modo: Si el primer termino tiene la misma razon al tercero (que son los homogeneos) que el segundo

do al quarto (que son los otros homogeneos): esto es, si creciendo, ò menguando el tercer termino, respeto del primero; tambien ha de crecer, ò menguar el quarto, respeto del segundo, serà la proporcion directa, segun la *prop.* 14. *del lib.* 5. de Euclides. Como en la misma question, porque siendo el tercer numero 8. mayor que el primero 4. tambien el quarto numero (que es 40.) es mayor que el segundo 20. La proporcion es directa. Assi mismo en esta otra question: Si un correo en 12. horas camina 16. leguas, en 3. horas quantas leguas caminará? Tambien es directa; porque siendo el tercer numero 3. menor que el primero 12. tambien el quarto (que es 4.) es menor que el segundo 16.

387 Pero si el primer termino tiene la misma razon al tercero, que reciprocamente el quarto al segundo: esto es, si creciendo, ò menguando el tercero, respeto del primero, al contrario, el quarto ha de menguar, ò crecer, respeto del segundo, la proporcion es *inversa*, *indirecta*, ò *reciproca*; como si 100. hombres para hacer una fortaleza han de menester 4. meses, 200. hombres quantos meses avràn de menester? Cierto està, que al mismo passo que los hombres son mas, la fortaleza se acabarà mas presto: Con que siendo el numero de 200. hombres mayor que los 100. el tiempo en que acabaràn la fortaleza serà menor que los 4. meses. Assi mismo, esta otra question es indirecta: Si de paño de 8. palmos de ancho son menester 6. varas para hacer un vestido, de paño de 5. palmos de ancho quantas varas serán menester? Porque no ay duda, que menguando lo ancho del paño, son menester mas varas para hacer el vestido; y assi, siendo menor el tercer termino que el primero, el quarto ha de ser mayor que el segundo.

Dirà alguno: Si el numero quarto aun no està conocido, como se puede saber si es mayor, ò menor que el segundo? Respondo, que aunque individuamente antes de resolver la question no sea conocido el quarto numero; pero por las circunstancias de la question se puede conocer en general si es mayor, ò menor; porque si 4. hombres ganan 10. libras, 8. hombres ganarán mas de 10. libras; y 2. hombres ganaràn menos; aunque hasta que estè resuelta la question, no se conozca determinadamente quanto sea aquel mas, ò menos.

388 Para sacar al estudioso de este cuydado, señala otra regla el P. Tacquet en su Arithmet. pract. lib. 4. cap. 1. que es la siguiente: Si los dos terminos homogeneos (el primero, y tercero) hacen, ò son en algun modo causa de alguna cosa unica, que està fuera de la question: esto es, que no es uno de los quatro terminos de la ques-

tion,

tion, de suerte, que los otros dos terminos (segundo, y quarto) sean como circunstancia de hacer la tal cosa, será inversa la proporcion. Y assi, esta question si 100. hombres para hacer una fortaleza han menester 4. meses, 200. hombres quantos meses avràn menester para hacer la misma fortaleza, serà indirecta, ò inversa; porque los hombres, que son el primero, y tercero terminos, gocen la fortaleza, que està fuera de la question, ò no es uno de los quatro terminos; y los meses son circunstancia; para hacer la dicha fortaleza. Pero esta regla padece algunas dificultades.

389 Aqui es preciso advertir, que algunas veces se propone alguna question, cuyos terminos estàn desordenados de suerte, que parece inversa, siendo en la verdad directa; como: Si una redoma se llena con 20. dineros de vino de á 10. sueldos el cantaro, de vino de à 10. sueldos con quantos dineros se llenarà. Pero este genero de questiones, si se ordenan por la regla sobredicha (385), no pareceràn inversas, sino directas, deste modo: Si valiendo el cantaro de vino 10. sueldos son menester 20. dineros para llenar una redoma, valiendo el cantaro 16. sueldos, quantos dineros seràn menester para llenar la misma redoma? No ay duda que serán menester mas dineros; y assi la proporcion, serà directa: porque siendo el tercer numero 16. mayor que el primero 8. el quarto tambien es mayor que el segundo 20. Y tengase por regla general, que siempre que el termino homogeneo al que se busca està en primer lugar, la question està desordenada.

Dirà alguno: Puede aver question, que aunque no esté ordenada segun la regla antecedente, con todo, esso se puede resolver bien, como esta: Si con 15. reales, gano 5. reales, con 20. doblones quanto ganarè? En la qual los terminos homogeneos estàn en primero, y segundo lugar, contra lo que ordena la regla sobredicha. Respondo, que en la proposicion directa, mientras que el primer termino esté en su lugar, aunque el segundo; y tercero estèn desordenados, no importa: porque, como luego veremos, para resolver la question directa, se multiplica tercero por segundo; y como lo mismo sea multiplicar el tercero por el segundo, que este por aquel, por esso no importa que estén variados. En la proporcion inversa se multiplica primero por segundo, ò segundo por primero; y assi, no importa que estos dos terminos estén desordenados.

390 Advierto tambien, que à veces la question se propone de tal suerte, que necessita de reduccion: Como si en 4. meses gano 30. reales, en 2. años quanto ganarè? Aqui parece que no ay terminos

ho-

homogeneos, porque el primero son meses, y el tercero años; pues reduzganse los años à meses, y se propondrá assi: Si en 4. meses gano 30. reales en 24. meses quanto ganaré.

Assi mismo: Si por una libra de moneda pago 2. sueldos de derechos, he gastado 20. libras, comprehendiendo los derechos, quanto importan los dichos derechos? Lo primero los terminos homogeneos. 1. y 20. libras reduzgase à sueldos, y serán 20. y 400. y porque en los 400. sueldos estàn comprehendidos los derechos, y sumo los 2. sueldos que deve cada libra con los 20. sueldos, y seràn 22. Digo, pues: Si 22. sueldos comprehendiendo los derechos dàn 2. sueldos de derechos, 400. sueldos, comprehendiendo los derechos, quanto pagaràn de derechos? y con esto estarà la question, segun el devido orden. Otras muchas questiones declarèmos en el exercicio de la regla de tres.

391 Ultimamente, casi siempre que el numero que se busca es de tiempo, como horas, dias, meses, &c. la regla de tres es inversa, como se vè en la question siguiente: Si 6. labradores aran un campo en 12. horas, 3. labradores en quantas horas le ararán? El conocimiento de la regla de tres directa, ò inversa pide exercicio.

PROBLEMA II.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA DE TRES simple directa.

392 Resolver una question de regla de tres simple, y directa, es hallar un numero, que con otros tres conocidos haga quatro proporcionales directamente (386), que es lo mismo, que conocida una razon, y el antecedente de otra razon igual, ò semejante, buscar el consequente (367): Como si 4. varas de paño costaron 12. libras, 6. varas què costaràn? Donde està conocida à la razon de 4. à 12. y se busca otra razon igual, señalado el antecedente 6.

Multipliquese, pues, el tercer termino 6. por el segundo 12. y el producto 72. partase por el primero 4. y el quociente 18. serà el quarto termino, el qual es consequente, respeto del 6. y assi seràn dos razones iguales, la una de 4. à 12. y la otra de 6. à 18.

Assi mismo: Si con 3. libras gano 6. sueldos, con 9. libras quanto ganarè? Multiplico el tercero 9. por el segundo 6. y el producto 54. le parto por el primero 3. y el quociente 18. son los sueldos que ganarè

tarè con las 9. lib. al mismo respeto que con 3. lib. ganò 6. sueldos.

Otro exemplo. Con 40. reales compro 36. lib. de azucar: con 100. reales quantas libras comprarè? Multiplicando 100. por 36. y partiendo el producto 3600. por 40. sale el quarto numero 90. que son las libras que puedo comprar con 100. reales.

Otro exemplo. En 5. meses gasto 30. lib. en 15. meses quanto gastarè? Multiplico 15. por 30. y parto el producto 450. por 5. el quociente 90. son las libras que al mismo respeto gastarè en los 15. meses; de suerte, que si en 5. meses gasto 30. lib. en 15. meses gastarè al mismo tenor 90. libras.

Demonstracion.

La demonstracion de esta regla se funda en la *prop. 4. del cap. antecedente*; que si quatro numeros son proporcionales, el producto de los medios es igual al de los extremos: pues multiplicando el tercero por el segundo, sale el producto de los medios, el qual partido por un extremo, que es el primero, dá el otro extremo, que es el quatro; porque como el producto del primero, y quarto, ha de ser igual al producto del segundo, y tercero: si este ultimo producto se parte por el primer termino, saldrà el quarto, pues que multiplicando el partidor, que es el primero por el quociente, que es el quarto, buelve à salir el numero que se partiò.

Escolio.

393 Por otros modos se puede tambien resolver qualquier question de regla de tres simple directa. Sea esta: Si un hombre en 8. dias camina 64. leguas, en 12. dias quantas leguas caminarà? Dividase el segundo numero 64. por el primero 8. y multipliquese el quociente 8. por el tercero 12. serà el producto 96. el numero de las leguas, que caminará en los 12. dias.

De otro modo: Partase el tercero 12. por el primero 8. y multipliquese el quociente 1. y $\frac{1}{2}$ por el segundo 64. y saldrán las mismas 96. leguas.

De otro modo: Partase el primero 8. por el segundo 64. y partiendo tambien el tercero 12. por el quociente $\frac{8}{64}$ saldràn las mismas 96. leguas.

De otro modo: Dividase el primero 8. por el tercero 12. y el segundo 64. dividase por el quociente $\frac{8}{12}$ lo que saliere serán las mismas 96. leguas.

Examen.

394 Para examinar qualquiera de las sobredichas operaciones; multipliquese el primer numero por el quarto, y el producto ha

de ser igual à la multiplicacion del segundo por el tercero. Tambien se puede examinar haciendo la operacion al revès, deste modo: Si el quarto numero ya hallado dá el tercero, què darà el segundo? Siguiendo la regla se ha de hallar el primero, que estava ya antes conocido.

PROBLEMA III.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA DE TRES simple inversa.

395 QUal sea la proposicion inversa, indirecta, ò reciproca, y como se conoce, ya queda explicado arriba, (387) aora falta el resolverla. Multipliquese el primer termino por el segundo, y el producto partase por el tercero: Como en un Presidio ay bastimento para que 3600. Soldados se sustenten en 8. meses, si huviera 4000. Soldados quanto tiempo se podrian sustentar? Multiplicando 3600. por 8. y partiendo el producto 28800. por 4000. salen 7. meses y $\frac{800}{4000}$, ò $\frac{1}{5}$ de mes.

Otro exemplo: Si 8. Oficiales acaban una casa en 2. años, 5. Oficiales en quanto la acabarán? Multipliquese los 8. por 2. y el producto 16. partase por 5. el quociente 3. y $\frac{1}{5}$ serán los años buscados.

Otro exemplo: De paño de 4. palmos de ancho son menester 10. varas para un vestido, si el paño tiene 6. palmos, quantas varas seràn menester? Multiplicando 4. por 10. y partiendo el producto 40. por 6. salen 6. varas $\frac{4}{6}$.

Demonstracion.

En la proporcion inversa el primer termino tiene la misma razon al tercero, que el quarto al segundo (387); esto es, en el ultimo exemplo como 4. à 6. assi 6. y $\frac{4}{6}$ à 10. luego invirtiendo (307) será como 6. à 4. assi 10. à 6. y $\frac{4}{6}$, y con esto está reducida la proporcion inversa à directa; de suerte, que la misma razon tiene lo ancho de un paño con lo ancho del otro, como lo largo del segundo con lo largo del primero. Pues estando reducida, si se multiplica el tercero 10. por el segundo 4. y el producto 40. se parte por el primero 6. saldrá el quarto 6. y $\frac{4}{6}$, como consta por la proposicion antecedente, que es lo mismo, que si antes de la reduccion, se multiplica el primero por el segundo, ò èste por aquèl, y el producto se parte por el tercero. Con que reduciendo es la misma demonstracion, que la antecedente.

Esco-

Escolio.

396 Qualquier question de regla de tres inversa se puede reducir à directa, como consta por la demonstracion, y resolverla como si fuera directa, como esta: En 4. meses acaban una casa 8. Oficiales, para acabarla en 2. meses quantos Oficiales serán menester? La qual se reducirá à directa poniendo el tercer termino en primer lugar, y el primero en segundo, el segundo termino estarà en tercer lugar, deste modo: Si 2. meses dan 4. meses, 8. Oficiales quantos darán? Siguiendo la regla directa hallarémos 16. Oficiales, que son menester para acabar la casa en 2. meses.

De otro modo sin reduccion: Dividase el primero 4. por el tercero 2. y multipliquese el quociente 2. por el segundo 8. para hallar el quarto 16.

De otro modo sin reduccion: Partase el segundo 8. por el tercero 2. y el quociente 4. multipliquense por el primero 4. saldràn 16.

De otro modo sin reduccion: Partase el tercero 2. por el primero 4. y por el quociente $\frac{2}{4}$ se partirà el segundo 8. para hallar los mismos 16. Oficiales.

De otro modo sin reduccion: Dividase el tercero por el segundo, y partiendo el primero por el quociente, hallarèmos el quarto.

Examen.

Para examinar la operacion de la regla de tres, multipliquense el primer numero por el segundo, y el producto ha de ser igual al producto del tercero por el quarto.

PROBLEMA IV.

DISPONER LOS TERMINOS DE LA REGLA DE TRES compuesta, y conocer si ay indireccion.

397 QUando los numeros conocidos son mas de tres, como cinco, siete, nueve, once, &c. (siempre el numero dellos es impar) la proporcion es compuesta, (382) y siempre concurren tres terminos principales, de los quales los dos son homogeneos, semejantes, ò numeran una misma cosa, y el otro está solo pero es homogeneo con el que se busca. De los dos terminos homogeneos conocidos, el uno tiene annexa la question, como se dixo arri-

ba (384), y à ellos acompañan todos los demás terminos como circunstancias, ò condiciones. De suerte, que los tres terminos principales forman una proporcion simple, y todos los otros terminos que ay en la proporcion compuesta les acompañan en particular à los dos homogeneos, como está dicho.

Todo esto verèmos claramente en esta question: Si 4. hombres en 10. meses ganan 24. doblones: 8. hombres en 20. meses quantos doblones ganarán? En donde los 4. 24. y 8. son los terminos principales, de los quales los 4. y 8. son homogeneos, porque numeran una misma cosa, y el 8. tiene annexa la question; el 24. está solitario, pero es homogeneo con el numero que se busca, los 10. y 20. meses acompañan por modo de circunstancia à los 4. y 8. hombres.

398 Esto supuesto; para disponer los terminos de la question de regla de tres compuesta, primeramente se buscarán los tres principales mirando que terminos hacen algo; esto es, ganan, pierden, trabajan, &c. los quales solamente son dos, y son los homogeneos, como en la question propuesta 4. y 8. hombres: mirese tambien, que es lo que hacen, ganan, pierden, &c. y este será el otro termino principal, que es solitario, pero homogeneo con el incognito, como son los 24. doblones: ultimamente vease con que circunstancias, tiempo, ò condiciones lo hacen, pierden, ganan, trabajan, &c. y estos son los terminos que acompañan à los homogeneos, como los 10. y 20. meses.

Pues de los dos terminos principales homogeneos, el que tiene annexa la question, que aqui son los 8. hombres, ponganse en tercer lugar con su compañero 20. meses: el otro homogeneo 4. hombres con su compañero 10. meses estè en primer lugar; y el termino principal solitario ponganse en medio, como en la regla de tres simple, pues aqui solos se añaden los terminos comitantes à los homogeneos.

399 Para entender esto mejor conducirà mucho el saber, que qualquier regla de tres tiene dos partes; en la una todos los terminos son conocidos; y en la otra (que comienza del termino, à quien està annexa la question) se ignora un termino, cuyo lugar se dexarà vacìo. Esto supuesto, se dispondrán los terminos como está dicho, pero de suerte, que el primero de una parte corresponda al primero de la otra, el segundo al segundo, &c. esto es, que sean homogeneos. Y à cada termino se pondrá su exponente como parece en el exemplo siguiente: Si 8. molinos con 3. muelas cada uno, en 5. dias muelen

ſen 200 cahices de trigo; 3. malinos con 4. muelas cada uno, en 2. dias, quantos cahices molerán?

El P. Joſeph Zaragozá, para diſponer los terminos de la regla de tres compueſta, en ſu Arithmetica Univerſal *lib.* 1. *cap.* 13. no ſe vale deſta regla de reducir la proporcion à tres terminos principales: ſino que uſa deſta otra, copiada palabra por palabra: *Los numeros ſiempre ſe han de diſponer de ſuerte, que el primero de la una parte ſea de la miſma eſpecie que el primero de la otra, &c. de ſuerte, que ſe correſpondan el primero con el primero, el ſegundo con el ſegundo, &c.* Y aſsi ſolo dà por regla, el que ſe correſpondan los terminos de una, y otra parte de la proporcion. Eſte modo es mas ſimple, pero pide cuydado para diſponer la Proporcion, de ſuerte que tenga ſentimiento cabal. El otro modo que hemos dado, es mas artificioſo, y dá ſentido à la queſtion.

1	8. molinos.
2	3. muelas.
3	5. dias.
4	200. cahices.
5	3. molinos.
6	4. muelas.
7	2. dias.
8	cahices.

400 Diſpueſtos los terminos como ſe vè, falta averiguar ſi ay alguna proporcion inverſa; porque como la proporcion compueſta conſte de muchas proporcionales ſimples, las quales ſon tantas, quantos terminos ay en la ſegunda parte, es contingente, que entre ellas ſe halle alguna indirecta, la qual ſe conocerá deſte modo.

Reſuelvaſe la proporcion compueſta en ſiemples dexando los otros terminos, y ſuponiendo que en cada parte ſon los miſmos aſsi: Si 8. molinos con ciertas muelas, y dias muelen 200. cahices, 3. molinos con las miſmas muelas, y dias, quanto moleran? Eſta proporcion es directa; porque ſiendo menor el numero de los molinos en la ſegunda parte, tambien han de moler menos; y reſolviendola (392) ſaldrán 75. cahices.

Aora formeſe otra propoſicion ſimple reſpeto de las muelas, diciendo: Si 3. muelas en cierto tiempo muelen 75. cahices, que ſalieron en la proporcion antecedente; 4. muelas en el miſmo tiempo quanto molerán? La qual tambien es directa; porque ſiendo las 4. muelas mas que las 3. tambien han de moler mas que los 75. cahices, y aſsi ſiguiendo la rega (392) ſalen 100. cahices.

Ultimamente inſtituyaſe otra proporcion ſimple para los dias, diciendo: Si en 5. dias ſe muelen 100. cahices, que ſalieron en la queſtion antecedente, en 2. dias quantos ſe molerán? La qual tambien es directa, y reſolviendola ſaldrán 40. cahices.

P3 Otro

401 Otro exemplo: Si 4. Escrivanos escriven 100. hojas en 3. dias, 6. Escrivanos 150. hojas en quantos dias las escrivirán? Resuelvase la question, diciendo: Si 4. Escrivanos para escrivir ciertas hojas han menester 3. dias; 6. Escrivanos para escrivir las mismas hojas quantos dias avràn menester? Esta question es inversa; porque siendo mas los Escrivanos en la segunda parte, han de ser menos los dias; la qual resuelta (395) darà 2. dias.

1	4. Escrivanos.
2	100. hojas.
3	3. dias.
4	6. Escrivanos.
5	150. hojas.
6	dias.

Formese otra regla de tres, respeto de las hojas diciendo: Si 100. hojas se escriven en 2. dias, que se hallaron antes; 150. hojas en quantos dias se escrivirán? La qual es directa, porque siendo mas las hojas de la segunda parte, tambien han de ser mas los dias; con que la question propuesta contiene una proporcion inversa, y otra directa; y la indireccion està en el primero, y quarto termino, que son los Escrivanos.

402 Otra regla dá el P. Andrès Tacquet de la Compañia de Jesus en su *Arith. Pract. lib.* 4. para conocer si la proporcion compuesta tiene inversion, que es la siguiente: Si en el primer, y tercer lugar (comprehendiendo los terminos, que acompañan á los principales homogeneos) un termino, respeto de otro es circunstancia, medio, condicion, &c. la question es directa; pero si un termino hace algo respeto de su compañero, es inversa. Y assi, porque las muelas, y dias son circunstancias medios, ò condiciones, para que los molinos muelan, es la question directa; pero porque los Escrivanos obran algo en sus compañeros que son las hojas, pues las escriven, la question contiene proporcion inversa. Esta regla es mas breve, pero es muy obscura, y facil de errar.

403 Ultimamente, para la cabal inteligencia deste Problema es conveniente advertir dos cosas, à mas de las que se notaron arriba (389. y 390.) la primera, que una misma proporcion compuesta, solo con mudar de termino incognito puede passar de inversa à directa, ò al contrario, como en la proporcion antecedente, buscando los dias como con efecto alli se buscan, es la proporcion inversa; pero si se buscan las hojas, será directa, deste modo: Si 4. Escrivanos en 3. dias escriven 100. hojas; 6. Escrivanos en 3. dias quantas hojas escriviràn?

404 La segunda, que todos los terminos superfluos, se deven

qui-

quitar de la proporcion, y resolverla en los que quedan. Y assi, quando en las dos partes de la proporcion un termino se expressa con un mismo numero, se ha de quitar; porque no muda la proporcion: como en esta question: Si 4. Escrivanos en 3. dias escriven 100. hojas; 6. Escrivanos en 3. dias quantas hojas escriviràn? Porque los dias en una, y otra parte tienen el mismo numero, ò son los mismos, quitense, y quedarà la question deste modo: Si 4. Escrivanos escriven 100. hojas; 6. Escrivanos, quantas escriviràn?

405 Tambien son superfluos, y se deven quitar los terminos, que aviendo hecho alguna reduccion, son inutiles; como en la question propuesta antes: (399) Si 8. molinos cada uno con 3. muelas en 5. dias muelen 200. cahices; 3. molinos cada uno con 4. muelas en 2. dias quanto moleràn? Cada uno de los 8. molinos tiene 3. muelas; luego multiplicando los 8. por 3. seràn 24. muelas las que tienen entre todos los 8. molinos; assimismo cada uno de los 3. molinos tiene 4. muelas: luego entre todos los 3. molinos tendràn 12. muelas; pues como las muelas son las que muelen, los molinos son inutiles, y mientras que en una parte aya 24. muelas, y en la otra 12. moleràn lo mismo, aunque aya mas, ò menos molinos; y assi se han de quitar quedando la proporcion deste modo: Si 24. muelas en 5. dias muelen 200. cahices; 12. muelas en 2. dias quanto moleràn?

406 Pero advierto, que esta reduccion no es necessaria, porque en la misma solucion està comprehendida, supuesto que se multiplican los terminos como luego verèmos; solo lo que digo es, que aviendo hecha la reduccion son superfluos los terminos reducidos; por lo qual està manifiesto que no se deve seguir, lo que hace cierto Autor, que reduciendo dexa los mismos terminos, que estàn comprehendidos en la reduccion.

PROBLEMA V.

RESOLVER QUALQUIER QUESTION DE REGLA DE TRES compuesta, y directa.

407 Resuelvase la question compuesta en tantas simples, como terminos conocidos ay en la segunda parte conforme queda dicho en el Problema antecedente, y resolviendo cada una de por sì, se hallarà el termino deseado.

Exemplo I.

1	6. hombres.
2	4. meses.
3	30. libras.
4	4. hombres.
5	5. meses.
6	libras.

Si 6. hombres en 4. meses ganan 30. libras; 4. hombres en 5. meses quanto ganarán? Digase primero por regla de tres simple: Si 6. hombres en cierto tiempo ganan 30. libras; 4. hombres en el mismo tiempo quanto ganaràn? Siguiendo la regla (392) saldràn 20. libras. Digase otra vez: Si en 4. meses se ganan 20. libras; en 5. meses quantas se ganaràn? Siguiendo la regla (392) se hallaràn 25. libras, que es el termino deseado.

Demonstracion.

Las reglas de tres siemples, ya quedan demonstradas, con que toda la dificultad està en probar que ha de aver tantas reglas de tres simples, como terminos conocidos ay en la segunda parte de la proporcion, lo qual es manifiesto; porque cada termino conocido tiene connexion con el que se busca, de suerte, que mudando qualquiera de los conocidos, se muda tambien el no conocido; y como todas las especies de los terminos conocidos estèn en la segunda parte, avrà tantas reglas de tres como terminos en dicha segunda parte.

De otro modo.

408 Incorporense los terminos, que acompañan, en los principales homogeneos, multiplicando unos por otros, y en los productos, y termino principal solitario, formese la regla de tres: como en el mismo exemplo multiplicando los 4. meses que acompañan á los hombres de la primer parte por los 6. hombres, seràn 24. multiplicando tambien los 4. meses que acompañan á los hombres de la segunda parte por los 4. hombres, son 20. Y con esto queda superfluo el numero de los hombres, y assi se ha de quitar. (405) Digase pues: Si en 24. meses se ganan 30. libras, en 20. meses, quanto se ganarà? Siguiendo la regla saldrán las mismas 25. libras.

Exemplo II.

1	5. Terciopeleros.
2	8. horas.
3	3. semanas.
4	1000. varas.
5	3. Terciopeleros.
6	9. horas.
7	7. semanas.
8	varas.

Si 5. Terciopeleros, trabajando. 8. horas cada dia, en 3. semanas texen 1000. varas de tafetan; 3. Terciopeleros, trabajando 9. horas cada dia, en 7. semanas quantas varas texeràn? Digase: Si 5. Terciopeleros en ciertas horas, y semanas texen 1000. varas; 3. Terciopeleros en el mismo tiempo

quan-

quantas varas texerán? Siguiendo la regla (392) salen 600. varas.

Formese otra regla, diciendo: Si trabajando 8. horas cada dia, se texen en ciertas semanas 600. varas: trabajando 9. horas en las mismas semanas quanto se texerá? Siguiendo la misma regla, saldrán 675. varas.

Otra vez digase: Si en 2. semanas se texen 675. varas; en 7. semanas quantas se texerán? Siguiendo la misma regla saldrán 1575. varas, que es el termino que se busca.

De otro modo: Multipliquense los terminos que acompañan á los principales; esto es 3. 8. 5. por una parte, y 7. 9. 3. por otra, y serán los productos 120, y 189. Digase aora: Si 120. dàn 1000. 189. què darán? Siguiendo la regla vendrán las mismas 1575. varas.

Exemplo III.

Si en 3. Conventos de 30. Religiosos cada uno, en 4. semanas dando 2. cahices de limosna, se consumen 8. cahices de trigo: en 5. Conventos de 20. Religiosos cada uno, en 6. semanas, dando 4. cahices de limosna, quantos cahices avràn menester? Resuelvase en reglas simples: Si 3. Conventos, con ciertos Religiosos, semanas, y limosna, consumen 8. cahices: 5. Conventos, con los mismos Religiosos, &c. quanto consumirán? Sigase la regla, (392) multiplicando 5. por 8. y partiendo el producto 40. por 3. y porque no se puede enteramente, partase haciendo quebrando asi $\frac{40}{3}$.

1	3. Conventos.
2	30. Religiosos.
3	4. semanas.
4	2. limosna.
5	8. cahices.
6	5. Conventos.
7	20. Religiosos.
8	6. semanas.
9	4. limosna.
10	cahices.

Hagase otra regla: Si 30. Religiosos, con ciertas semanas, y limosna consumen $\frac{40}{3}$ de cahiz: 20. Religiosos, con las mismas circunstancias, quantos consumirán? Sigase la regla multiplicando 20. por $\frac{40}{3}$. que es multiplicar solo el numerador (181), y el producto $\frac{800}{3}$. dividase por 30. multiplicando el denominador (195), y serán $\frac{800}{90}$. de cahiz; ò mas abreviado $\frac{80}{9}$.

Formese otra regla diciendo: Si en 4. semanas, con cierta limosna, se gastan $\frac{80}{9}$. de cahiz: en 6. semanas quanto se gastará? Multiplicando 6. por $\frac{80}{9}$. que es multiplicar 6. por 80. y partiendo el producto $\frac{480}{9}$. por 4. que es multiplicar el denominador, saldrán $\frac{480}{36}$ de cahiz, que abreviados son $\frac{40}{3}$.

Ultimamente digase: Si dando de limosna 2. cahices se gastan

tan $\frac{40}{3}$. de cahiz: dando de limosna 4. cahices, quantos se gastarán? Multiplicando 4. por $\frac{40}{3}$, que es multiplicar el numerador, y partiendo el producto $\frac{160}{3}$ por 2. que es multiplicar el denominador, sale $\frac{160}{6}$. de cahiz, que son 26. cahices y $\frac{2}{3}$. el termino que se buscava.

De otro modo.

Multipliquense los terminos que acompañan à los homogeneos principales, por los mismos homogeneos; esto es, 3. 30. 4. 2. y será el producto 720. multipliquense tambien entre sì 5. 20. 6. 4. y saldràn 2400. Digase aora por regla de tres, si 720. dán 8. què daràn 2400? Siguiendo la regla, saldràn los mismos 26. cahices y $\frac{2}{3}$.

Consectario.

409 Si se considera con atencion el progresso de las operaciones antecedentes, estará manifiesto, que en el primer exemplo dividiendo el producto de los terminos, tercero, quarto, y quinto, por el producto del primero, y segundo, sale el sexto termino, el qual multiplicado por el primero, y segundo, necessariamente ha de restituir al producto del tercero, quarto, y quinto, que se partiò: luego el producto del sexto, primero, y segundo, es igual al producto del tercero, quarto, y quinto.

En el exemplo 2. el producto del termino quarto, quinto, sexto, y septimo, partido por el producto del primero, segundo, y tercero, dá el octavo termino, el qual multiplicando por este ultimo producto, buelve á restituìr al producto del quarto, quinto, sexto, y septimo: luego el producto del octavo, primero, segundo, y tercero, es igual al producto del quarto, quinto, sexto, y septimo. Assimismo en el exemplo 3. el producto del termino decimo, primero, segundo, tercero, y quarto, es igual al producto del quinto, sexto, septimo, octavo, y nono; y assi de las demàs operaciones.

Con que en qualquier question de regla de tres compuesta, si el ultimo exponente se escrive primero, y despues los demàs por su orden, dividiendo los exponentes con una linea, de suerte, que aya tantos à una parte como à otra, serán los productos de una, y otra parte iguales; como en las questiones de cinco numeros, pongase primero el ultimo exponente, que es 6. y despues los demàs deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. será el producto de los numeros correspondientes á los exponentes 6. 1. 2. igual al producto de los numeros correspondientes à los exponentes 3. 4. 5.

En las questiones de 7. numeros escriviendo el ultimo exponente en primer lugar, y los demàs consecutivamente dividiendoles con una linea deste modo, 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. será el producto de los numeros

los correspondientes á los exponentes 4. 5. 6. 7. igual al producto de los numeros correspondientes à los exponentes 8. 1. 2. 3.

En las questiones de 9. numeros se esviràn los exponentes assi 10. 1. 2. 3. 4. | 5. 6. 7. 8. 9. y los productos de los numeros que acompañan en la question à los exponentes en ambas partes seràn iguales; y assi de las demás questiones de 11. 13. 15. numeros, &c.

Examen.

410 Escrivanse los exponentes como acabamos de decir, y multiplicando los terminos correspondientes à los exponentes, los productos de una, y otra parte han de ser iguales: como en el exemplo 1. dispuestos los exponentes seràn 6. 1. 2. | 3. 4. 5. Los numeros correspondientes à los 6. 1. 2. son 25. 6. 4. (el 25. es el termino hallado) los quales multiplicados entre sì hacen 600. pues los numeros correspondientes á los otros exponentes 3. 4. 5. que son 30. 4. 5. tambien multiplicados entre sì hacen 600.

En el exemplo 2. dispuestos los exponentes, serán 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. cuyos terminos correspondientes á los 8. 1. 2. 3. son 1575. 5. 8. 3. los quales multiplicados entre sì producen 189000. pues lo mismo han de producir los numeros 1000. 3. 9. 7. correspondientes á los exponentes 4. 5. 6. 7.

PROBLEMA IV.

RESOLVER LA QUESTION DE REGLA DE TRES compuesta, quando ay inversion.

411 EL modo para conocer quando la question de regla de tres compuesta contiene proporcion inversa, ya queda enseñado en el Problema 4. aora solo falta el resolverla. Resuelvase, pues, en proporciones simples, como queda dicho, y cada una se resolverá por el Problema 2. ò 3. segun fuere directa, ò inversa.

Exemplo I.

Si 10. Labradores aran 8. cahizadas de tierra en 3. dias; 12. Labradores 20. cahizadas en quantos dias las ararán? Digase: Si 10. Labradores aran ciertas cahizadas en 3. dias; 12. Labradores las mismas cahizadas en quantos dias las ararán? Esta question es inversa, porque creciendo el numero de los Labradores, han de

1	10. Labradores.
2	8. cahizadas.
3	3. dias.
4	12. Labradores.
5	20. cahizadas.
6	dias.

de menguar los dias, y la inversion está en el primero, y quarto termino de la question compuesta, que son los Labradores; resuelvase, pues, (395) multiplicando 10. por 3. y partiendo el producto 30. por 12. y porque justamente no se puede, pártase en forma de quebrado asi $\frac{30}{12}$. ò abreviando $\frac{5}{2}$.

Formese otra regla de tres simple para las cahizadas, deste modo: Si 8. cahizadas se labran en $\frac{5}{2}$. de dias; 20. cahizadas en quanto tiempo se labraràn? Esta es directa, porque siendo mas las cahizadas, han de ser tambien mas los dias; resuelvase, pues (392), multiplicando las 20. cahizadas por los $\frac{5}{2}$. que es multiplicar el numerador, y el producto $\frac{100}{2}$. dividase por 8. que es multiplicar el denominador; el quociente $\frac{100}{16}$. que son 6. dias y $\frac{1}{4}$. serà el termino deseado.

Exemplo II.

Si valiendo el cahiz de trigo 6. libras, y pesando 12. arrobas, por 4. dineros, dàn 12. onzas de pan; valiendo 7. libras, y pesando 14. arrobas, por 6. dineros, quantas onzas daràn? Digase: Si valiendo 6. libras con cierto peso, y por ciertos dineros dan 12. onzas; valiendo 7. libras con las mismas circonstancias, quantas onzas darán? Esta proporcion es inversa, porque creciendo el valor del trigo, han de menguar las onzas; pues multiplicando 6. por 12. y partiendo el producto 72. por 7. haciendo quebrado asi $\frac{72}{7}$. seràn las onzas.

1	6. libras.
2	12. arrobas.
3	4. dineros.
4	12. onzas.
5	7. libras.
6	14. arrobas.
7	6. dineros.
8	onzas.

Hagase otra regla de tres simple, diciendo: Si 12. arrobas dàn $\frac{72}{7}$. de onza; 14. arrobas quanto daràn? Esta es directa; porque creciendo el peso, han de crecer las onzas en numero: pues multiplicando 14. por $\frac{72}{7}$. que es multiplicar el numerador, (181) y partiendo el producto 1008. 7. avos por 12. que es multiplicar el denominador (295) saldrán 1008. 84. avos de onza.

Ultimamente digase: Si 4. dineros dàn 1008. 84. avos de onza 6. dineros quanto darán? Esta proporcion es tambien directa; porque
los dineros, ha de crecer tambien el numero de las onzas;
plicando 6. por 1008. 84. avos, que es multiplicar el nu-
partiendo el producto 6048. 84. avos por 4. que es multi-
nominador, saldrán 6048. 336. avos, esto es 18. onzas, y
darán con las dichas circunstancias por 6 dineros.

Ex-

Exemplo III.

1	2. Escrivanos.
2	20. hojas.
3	30. lineas.
4	50. letras.
5	3. dias.
6	4. Escrivanos.
7	15. hojas.
8	20. lineas.
9	32. letras.
10	dias.

Si 2. Escrivanos escriven 20. hojas de à 30. lineas cada una, y de à 50. letras cada linea en 3. dias; 4. Escrivanos, para escrivir 15. hojas de à 20. lineas cada una, y de à 32. letras cada linea, quantos dias avrá menester? Resuelvase en proporciones simples deste modo: Si 2. escrivanos escriven ciertas hojas de ciertas lineas, y letras en 3. dias; 4. Escrivanos las mismas hojas en quantos dias las escrivirán? Esta proporcion es inversa, porque creciendo el numero de los Escrivanos, ha de menguar el numero de los dias, pues multiplicando 2. por 3. y partiendo el producto 6. por 4. en forma de quebrado assi $\frac{6}{4}$ seràn los dias.

Aora por razon de las hojas formese otra regla de tres simple, diciendo: Si 20. hojas de ciertas lineas, y letras, se escriven en $\frac{6}{4}$ de dia; 15. hojas con las mismas circunstancias en quantos dias se escriviràn? Esta es directa, porque siendo menos las hojas, tambien han de ser menos los dias; multipliquense, pues, las 15. hojas por $\frac{6}{4}$ multiplicando solo el numerador, y el producto $\frac{90}{4}$ partase por 20. multiplicando solo el denominador, y seràn $\frac{90}{80}$ de dia, que abreviando es $\frac{9}{8}$.

Hagase otra regla de tres atendiendo à las lineas: Si 30. lineas de ciertas letras cada una se escriven en $\frac{9}{8}$ de dia 20. de las mismas letras, en quanto se escriviràn? La qual tambien es directa, pues multiplicando 20. por $\frac{9}{8}$ que es multiplicar el numerador, y partiendo el producto $\frac{180}{8}$ por 30. que es multiplicar el denominador, saldràn 180. 240. avos de dia, que abreviando en $\frac{3}{4}$.

Ultimamente: Si 50. letras se escriven en $\frac{3}{4}$ de dia, 32. en quanto tiempo se escriviràn? La qual tambien es directa; pues multiplicando 32. por $\frac{3}{4}$, y partiendo el producto $\frac{96}{4}$ por 50. saldrán 96. 200. avos de dia, que son 5. horas 45. minutos y 36. segundos por el termino deseado. Advierto aqui en la reduccion, ò valor del quebrado, que aunque el dia tiene 24. horas, pero para el trabajo solas se cuentan 12. y en esta forma està reducido el quebrado.

Con-

Consectarios.

412 Quien atendiere con cuydado à las operaciones antecedentes verá, que si se truecan los terminos donde està la inversion, serà lo mismo que el consectario del Problema antecedente; y assi en la question de cinco terminos directa escriviendo los exponentes deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. el producto de una parte; es igual al de la otra; y en la inversa, mudando los exponentes de los numeros donde està la inversion, que en el exemplo 1. es en el primero, y quarto termino, assi 6. 4. 2. | 3. 1. 5. los productos de entrambas partes son iguales.

En el exemplo segundo, si todas las proporciones fueran directas, serian los exponentes 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. (409). Pero como ay una proporcion inversa, que està en el primero, y quinto termino, mudense estos exponentes, passando de una parte à otra assi 8. 5. 2. 3. | 4. 1. 6. 7. y dispuestos deste modo, el producto de los terminos correspondientes à los exponentes de una parte serà igual al producto de los terminos correspondientes à los exponentes de la otra parte. Lo mismo es en qualquier otra regla de tres compuesta, é inversa, passando siempre de una á otra parte los exponentes, que contienen la inversion.

Examen.

413 Escrivanse los exponentes, como si la question fuera directa, segun se dixo antes, y despues mudense de una à otra parte los exponentes en donde està la inversion; estando deste modo, si los productos de entrambas partes son iguales, la operacion està bien hecha.

MODO FACIL PARA RESOLVER QUALQUIER REGLA de tres compuesta.

414 DE lo dicho hasta aqui se infiere un modo facilissimo para resolver qualquier proporcion compuesta, aunque el numero que falta, no sea el ultimo, sino qualquier otro; para lo qual se guardarán los preceptos siguientes.

415 Primero: Escrivanse los terminos de la pregunta, y al lado sus exponentes, dexando vacio el lugar del termino, que se busca.

316 Segundo: Escrivanse los exponentes de suerte, que el ultimo (sea el que falta, ò no) estè en primer lugar, y los otros por su orden, dividiendolos con una linea de modo, que aya tantos à una parte como à la otra, y assi en las questiones de 5. numeros estarán deste modo 6. 1. 2. | 3. 4. 5. en las de 7. assi 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. en

7. en las de 9. asi 10. 1. 2. 3. 4. | 5. 6. 7. 8. 9. en las de 11. deste modo 12. 1. 2. 3. 4. 5. | 6. 7. 8. 9. 10. 11. y asi de las demàs.

417 Tercero: Examinese si ay alguna, ò algunas inversiones en la question (397), si no ay inversion, quedarán los exponentes en la forma sobredicha, pero si la ay, los exponentes donde está la inversion, passarán de una à otra parte, como si en la question de 7. numeros la inversion está en el 2. y 7. se mudarán deste modo 8. 1. 6. 3. | 4. 5. 2. 7. si huviere otra inversion en el 3. y 7. se dispondrá deste modo 8. 1. 6. 7. | 4. 5. 2. 3. y asi de las demás.

418 Quarto: Despuestos los exponentes, se multiplicarán entre sì los terminos correspondientes à los exponentes de la parte donde estuvieren todos conocidos, y el producto será el numero dividendo; tambien se multiplicarán entre sì los numeros correspondientes à los exponentes de la parte donde falta el termino que se busca, y el producto serà el partidor; hagase la division, y el quociente serà el termino que se busca. Para esto aprovecharà mucho tener en memoria los consectarios de los Problemas antecedentes.

Exemplo I.

Si 8. hombres, cada uno con 10. doblones, ganan 50. libras; 3. hombres, cada uno con 15. doblones quanto ganaràn? Escrivanse los exponentes como està dicho 6. 1. 2. 3. 4. 5. y porque no ay inversion, quedarán assimismo los dichos exponentes. Aora porque el termino que

1	8. hombres.
2	10. doblones.
3	50. libras.
4	3. hombres.
5	15. doblones.
6	libras.

falta es el correspondiente al 6. que està en la primera parte, multipliquese el 8. por 10. (que son los terminos correspondientes à los exponentes 1. y 2.), y el producto 80. serà el partidor: Multipliquese entre sì los numeros 50. 3. y 15. que corresponden à los exponentes 3. 4. 5. y el producto 2250. serà el dividendo; hecha la division de 2250. por 80. serà el quociente 28. y $\frac{1}{8}$ el sexto termino.

Si el termino que falta no es el sexto, sino qualquier otro, como el quarto, asi: Si 8. hombres con 10. doblones cada uno, ganan 50. libras: quantos hombres con 15. doblones cada uno ganaràn 28. libras y $\frac{1}{8}$. Dispuestos los exponentes 6. 1. 2. | 3. 4. 5. porque el termino que falta es el quarto, que està en la segunda parte de los expo-

ponentes, multipliquenſe los numeros 28. y $\frac{1}{8}$ 8. 10. correſpondientes à los exponentes 6. 1. 2. y el producto 2250. partaſe por el producto 750. los numeros 50. y 15. correſpondientes à los exponentes 5. y 5. el quociente 3. ſerà el quarto termino.

Si falta otro termino, como el quinto deſte modo: Si 8. hombres con 10. doblones cada uno, ganan 50. libras; 3. hombres con quantos doblones ganaràn 28. libras y $\frac{1}{8}$? Diſpueſtos los exponentes como eſtá dicho, ſerán 6. 1. 2. | 3. 4. 5. y pues el termino que falta, es el quinto,

1	8. hombres.
2	10. doblones.
3	50. libras.
4	3. hombres.
5	15. doblones.
6	28. libras y $\frac{1}{8}$.

que eſtà en la ſegunda parte de los exponentes, multipliquenſe los numeros 50. y 3. correſpondientes à los exponentes 3. y 4. de la parte donde falta el termino quinto, y el producto 150. ſerá el partidor: Multipliquenſe tambien los numeros 28. y $\frac{1}{8}$ 8. 10. correſpondientes à los exponentes 6. 1. 2. de la otra parte, y el producto 2250 ſerá el numero dividendo: hecha la diviſion, ſe hallarà el termino quinto 15. doblones.

Exemplo II.

Si 4. hombres conſumen para ſu ſuſtento 2. cahices de trigo, que peſa cada uno 12. arrobas en 10. ſemanas; 3. hombres, 5. cahices de peſo de 13. arrobas en quanto tiempo los conſumirán? Los exponentes ſe eſcriviràn aſsi 8. 1. 2. 3. | 4. 5. 6. 7. y porque ay inverſion en el 1. y 5. mudenſe deſte modo, 8. 5. 2. 3. | 4. 1. 6. 7. y multiplicando entre sì los numeros 10. 4. 5. 13. que correſponden à los exponentes 4. 1. 6 7. ſerà el producto 2600. el numero dividendo, multipicando los numeros 3 2. 12. correſpondientes à los exponentes 5. 2. 3. el producto 72. ſerá el diviſor: hecha la diviſion, ſaldrà el octavo termino 36. $\frac{1}{9}$.

1	4. hombres.
2	2. cahices.
3	12. arrobas.
4	10. ſemanas.
5	3. hombres.
6	5. cahices.
7	13. arrobas.
8	ſemanas.

Aſsimiſmo, ſi falta qualquier otro termino multiplicando los numeros correſpondientes à los exponentes de la parte donde eſtàn conocidos todos, el producto ſerà el dividendo; y multiplicando los numeros correſpondientes à los exponentes conocidos de la parte donde falta, ſerà el producto del diviſor. Eſto quiere exercicio.

De-

Demonstracion.

Dispuestos los exponentes como está dicho, el producto de los numeros correspondientes à los exponentes de una parte, es igual al producto de los numeros correspondientes à los exponentes de la otra parte (40. y 412.) luego partiendo el producto de la parte donde no falta termino alguno, por el producto de la parte donde falta algun termino, será el quociente el termino que se busca.

Advierto que si falta alguno de los terminos intermedios, la question no passa de directa à inversa, ò al contrario; pero si se dispone la pregunta de suerte, que el termino intermedio que falta, estè en el ultimo lugar, puede suceder, que de directa passa à inversa, ò al contrario, como se notò arriba. (403)

Advierto tambien, que aunque no hemos puesto exemplos en numeros denominados, ò quebrados, se han de seguir las mismas reglas; pues no añaden otra dificultad mas que multiplicar, y partir quebrados, ò numeros denominados, la qual queda explicada en la segunda, y tercera parte del libro 1. Pero para evitar el enfado que traen el multiplicar, y partir numeros denominados; si los huviere en alguna regla de tres, se podrán reducir à la minima especie (76) y despues obrar como si fueran enteros; advirtiendo, que si un termino se reduce, tambien se ha de reducir à la misma especie el otro termino homogeneo, ò semejante, como se verá en el numero 458. question 57.

CAPITULO TERCERO.

DEL EXERCICIO DE LA REGLA DE TRES.

PAra que el estudioso halle juntàs las questiones de una misma especie, divido este exercicio en diferentes classes de reducciones de monedas, pesos, y medidas, intereses, ganancias, arrendamientos, &c. Advirtiendo, que aunque algunas questiones se resuelvan sin regla de tres, pero esso no obstante me ha parecido ponerlas aqui, para que estèn todas las de una especie juntas.

Reducciones de monedas, pesos, y medidas.

419 Question 1. 27. doblones, quantas libras son de Valencia; porque cada doblon en Valencia, vale 3. libras y 17. sueldos, ò 38. reales, y ½. Multipliquense los 27. doblones por 38. reales, y ½, y

el producto 1039. reales, y $\frac{1}{2}$. reduzgase à libras, partiendo por 10. que es quitar el primer guarismo 9. y quedaràn 103. libras y 9. reales, y $\frac{1}{2}$. ò 19. sueldos, y tanto importaràn los 27. doblones. Lo mismo se halla multiplicando los 27. doblones por 3. libras, y 17. sueldos. (226)

420 Question 2. Pedro ha de pagar 3624. libras moneda de Valencia en doblones; preguntase quantos ha de dár? Reduzga las libras à sueldos multiplicando por 2. y añadiendo un zero, y serán 72480. sueldos dividalos por 77. sueldos que vale un doblon, y hallará 941. doblon, y sobran 23. sueldos, que ha de dar en otra moneda.

Para reducir los doblones à libras, y sueldos, ò al contrario, tienen los Mercaderes, y otras personas de negocio, una tabla del valor de los doblones, la qual se hace deste modo: Escrivase el valor de un doblon, doblese, y saldrà el valor de dos doblones: sumese el valor de un doblon con el dé dos doblones, y saldrán tres, sumese el valor de uno con el de los tres, y serán quatro, y assi prosiguiendo en suma el valor de un doblon con todos los demás, saldrá el immediate siguiente, como parece en la presente tabla.

1	3. lib. 17. suel.
2	7. lib. 14. suel.
3	11. lib. 11. suel.
4	15. lib. 8. suel.
5	19. lib. 5. suel.
6	23. lib. 2. suel.
7	26. lib. 19. suel.
8	30. lib. 16. suel.
9	34. lib. 13. suel.
10	38. lib. 10. suel.
	&c.

Esto supuesto, si quiero saber 7. doblones quanto valen, enfrente del 7. hallo 26. libras, y 19. sueldos. Al contrario, si quiero saber 34. libras 8. sueldos quantos doblones hacen, busco el numero proximo menor à las 34. libras 8. sueldos y hallo 30. libras 16. sueldos, y al lado 8. doblones, resto aora las 30. libras 16. sueldos de las 34. libras 8. sueldos, y sobran 3. libras 12. sueldos que ay à mas de los 8. doblones.

Assimismo para reducir en Valencia los reales de à ocho à libras, se multiplicarán por 9. reales, y $\frac{3}{4}$. que vale cada uno, y el producto se reducirá à libras; como si quiero saber 124. reales de à ocho, quantas libras son, los multiplico por 9. y $\frac{3}{4}$. multiplicando primero por 9. y despues sacando mitad por los dos quartos, y mitad de la mitad por el otro quarto, el producto 1209. son reales, que quitado el 9. serán 120. libras y 9. reales, ò 18. sueldos.

Lo mismo se puede hacer de otra manera. Se han de reducir 253. reales de à ocho à libras de Valencia: Supongo que los reales de

de à ocho son libras; pues porque à cada real de à ocho falta un quartillo, ò seis dineros para una libra, avrè de quitar tantos quartillos como reales de à ocho: pues dividiendo 253. quartillos por 4. tendrè 63. reales, y un quarto; esto es, 6. libras 6. sueldos y 6. dineros. Restolos de los 253. y quedan 246. libras 13. sueldos y 6. dineros, que valen los 253. reales de à ocho.

421 Question 3. Dos mil maravedis, quantas libras son de Valencia? El real de à ocho Mexicano en Castilla vale 15. reales de vellon, que son 510. maravedis, en Valencia valen 19. sueldos, 6. dineros, que son 234. dineros. Digase, pues, por regla de tres: 510. maravedis son 234. dineros, 2000. maravedis quantos dineros darán? Multiplicando 2000. por 234. y partiendo el producto 468000. por 510. saldràn 917. dineros, que reducidos à libras, y sueldos (100) son 3. libras 16. sueldos 5. dineros, y treinta y tres cinquenta un avos.

Del mismo modo reducirè los 2000. maravedis à moneda de Aragon, donde el real de à ocho vale 8. reales, ò 192. dineros, diciendo: Si 510. maravedis dan 192. dineros, 2000. maravedis quantos dineros darán? Siguiendo la regla hallo 752. dineros, reduzgolos à libras, y sueldos, y hallo tres libras dos sueldos, y ocho dineros.

Pero adviertase, que aunque segun la Pragmatica el real de à ocho Mexicano vale en Castilla 15. reales de vellon, esso no obstante en el trato comun vale 15. reales, y un ochavo, que son 512. maravedis; y segun esto, se ha de decir: Si 512. maravedis dan 234. dineros de Valencia; luego 2000. maravedis darán 914. dineros, y un diez y seis avo, que son 3. libras 16. sueldos y 2. dineros, y mas el dicho quebrado; y lo mismo es en otros Reynos.

422 Question 4. Preguntase: Los 30. reales en que Christo nuestro Señor fue vendido por Judas, quanto son de la moneda de Valencia? Para resolver esta question es necessario acordarse de lo que se advirtiò en los proemiales, tratando de las monedas, pesos, y medidas Hebreas: que siempre que en la Sagrada Escritura se nombra *Argenteus* sin añadir mas, se entiende siclo; y como la Escritura diga: *Constituerunt ei triginta argenteos*, Matth. 26. vers. 15. eran 30. siclos; y como cada siclo era media onza, y en el valor casi igual à un real de à quatro Mexicano, serian los 30. siclos lo mismo que 15. reales de à ocho, que en Valencia valen (420) 14. libras 12. sueldos y 6. dineros. Por este vil precio fue vendido Jesu-Christo.

Pero advierto, que en la Iglesia Mayor desta Ciudad de Valencia se guardan dos reales de los que Judas vendiò à Christo, cuñados en Rhodas, como consta por el cuño del Sol, y cada uno pesa medio siclo, pues son del tamaño de un real de à dos. Lo mismo dice Vilalpando de uno que viò en Roma: Y assi à Judas le devieron dar 60. destos, los quales hacen 30. siclos; y siempre es verdadero decir que le dieron 30. siclos. Como si huviera de dar 30. doblones, y pagára con 60. medios doblones, seria verdadero decir, que havia dado 30. doblones.

423 Question 5. De la Epistola que se canta en la Missa de los difuntos, consta, que Judas Machabeo embiò al Templo de Jerusalen 12000. dragmas de plata, para ofrecer Sacrificio por los que eran muertos en la guerra; preguntase quanto corresponde en nuestras monedas? La respuesta es facil; porque, como consta de la segunda parte de los proemiales, una dragma vale lo mismo que un real de plata Mexicano. Con que las 12000. dragmas son otros tantos reales de plata, y partidos por 8. son 1500. reales de à ocho Mexicanos, que en Valencia valen 1462. libras 10. sueldos.

424 Question 6. Un Mercader ha de llevar de Valencia à Madrid 1262. varas de tafetan, pregunta quantas varas serán en Madrid? Porque 12. varas de Valencia son 13. de Castilla, como està dicho en los proemiales, diga por regla de tres: Si 12. dán 13. què darán 1262. Siguiendo la regla hallará 1367. varas, y un sexto.

425 Question 7. Pedro merca en Castilla 30. cahices, y 8. hanegas de trigo por 45. reales de vellon el cahiz; despues los trae à Valencia, haciendo de gastos 30. libras y los vende à 7. libras el cahiz; preguntase quanto gana. Reduzganse à celemines (76), y serán 4416. Digase por regla de tres: Si 12. celemines de Castilla son 13. de Valencia (proem. part. 2.), 4416. quantos serán de Valencia? Siguiendo la regla saldrán 4784. los quales reducidos à cahices (100) son 99. cahices, y 8. barchillas.

Saquese el valor de los 30. cahices, y 8. hanegas, multiplicando assi mismo los 99. cahices, y 8. barchillas por 7. libras, y valdràn 697. libras, y dos tercios; restense las 30. libras de gastos, y quedaràn 667. libras, y dos tercios, las quales reducidas à reales, y multiplicando por 10. son 6676. reales, y dos tercios. Esto supuesto, formese una regla de tres: Si 9. reales, y tres quartos, que vale el real de à ocho en Valencia, dán 15. reales de vellon en Castilla, 6676. reales, y dos tercios de Valencia, que darán en Castilla? Siguiendo la regla, salen 10271. real de Castilla, y 31. 39. avos, de los quales restando

do los 1380. reales que costò el trigo en Castilla, quedan 8891. reales de ganancia.

426 Question 8. Salomon dava cada año al Rey Hiràm 20000. coros de trigo, como consta del 3. de los Reyes, *cap.* 5. *v.* 11. preguntase quantos cahices eran de Valencia? Porque cada coro contenia 5. medimnos, y cada medimno era igual à una hanega de Castilla, como consta de los Proemiales, multipliquense los 20000. coros por 5. y saldràn 100000. medimnos, ò hanegas de Castilla; y porque cada hanega contiene 12. celemines, multiplicando por 12. saldràn 1200000. celemines de Castilla; aora digase por regla de tres: Si 12. celemines de Castilla, son 13. celemines de Valencia; 1200000. celemines de Castilla, quantos seràn de Valencia? Siguiendo la regla, salen 1300000. celemines de Valencia, que son 27083. cahices y 4. barchillas.

427 Question 9. El Rey Atalo comprò de Aristide, Pintor Tebàno, una tabla pintada por 100. talentos, como lo dice Plinio en el *lib.* 7. *cap.* 38. pidese quantas libras serian de Valencia? De los Proemiales consta, que cada talento contenia 6000. dragmas, ò reales de plata, los quales multiplicados por 100. seràn 6 0000. y partidos por 8. que son los reales que tiene un real de à ocho, seràn 75000. reales de à ocho, los quales valen al presente en Valencia 73125. libras. Excelente pincél serìa, pues fue estimado en tanto precio. De Demetrio, afirma el mismo Plinio en el lugar citado, que no quiso poner fuego à Rhodas por no quemar una pintura de Protogenes, que estava en aquella parte del muro por donde avia de entrar. De Alexandro Magno se cuenta, que diò 800. talentos à Aristoteles para que adelantàra la Filosofia, que son 60000. reales de à ocho.

Cambios.

El cambio es un trueque de una moneda en otra en un mismo lugar, ò en diferente. Dos modos ay de cambios, en quanto pertenecen á la Arithmetica: el uno es, *cambio menudo*, que es un trueque de una moneda en otra sin interés alguno: el otro es, *cambio real*, quando interviene interès en el trueque, ò sea en un mismo Reyno, ò en diferente; y tambien es cambio real, quando no se cambìa la moneda, sino que una misma se transporta, pero pagando interès por la conduccion. Muchas questiones de cambios, particularmente menudos, quedan ya resueltas, aora resolverè otras.

428 Question 10. Un Mercader diò à otro en Zaragoza 240. libras 8. sueldos, para que se los haga buenos en Valencia, pidese quan-

tas le darà en Valencia? Resuelvanse las 240. libras 8. sueldos en reales, multiplicando las libras por 10. y los sueldos partiendolos por 2. y sumando el quociente en los reales, seràn 2404. reales; digase aora por regla de tres: Si 8. reales (que es valor del real de à ocho en Zaragoza) dàn 9. reales y $\frac{3}{4}$. (que es el valor en Valencia) quedarán 2404. reales? Siguiendo la regla, saldràn 2929. reales y $\frac{7}{8}$. que son 292. libras 1. sueldo y 9. dineros, y tanto le ha de dár en Valencia.

429 Question 11. Pedro ha de cambiar en Valencia 20. doblones por moneda de plata Valenciana, pagando à razon de 2. libras y $\frac{1}{2}$. por 100. porque la plata es mas estimada, que el oro; preguntase quantas libras recibirà? Reduzga los doblones à libras (419), y seràn 77. libras. Reste las 2. libras y $\frac{1}{2}$. de 100. y quedarán 97. libras y $\frac{1}{2}$. Diga aora por regla de tres: Si 100. libras están rebaxadas à 97. libras y $\frac{2}{3}$. las 77. libras à quantas se rebaxaràn? Siguiendo la regla, hallarà 75. libras 1. sueldo y 6. dineros, y tanto ha de recibir en moneda de plata.

430 Question 12. Al contrario, Pedro tiene 420. libras en plata, y quiere cambiarlas en Valencia por doblones para ganar el interés corriente, que supongo es á 2. libras por 100. pidese quantos doblones recibirà? Sume las 2. libras de interès con las 100. y seràn 102. diga aora por regla de tres: Si 100. dán 102. quedarán 420? Siguiendo la regla salen 428. libras 8. sueldos, las quales convertidas en doblones (420) son 111. doblones, y mas 1. libra y 1. sueldo, que es lo que ha de recibir.

431 Question 13. Un Mercader en Valencia, dà à otro 150. libras 12. sueldos, para que se las abone en Barcelona, pagando de interès à 3. por 100. moneda de Valencia, preguntase quantas le ha de hacer buenas en Barcelona? Resta las 3. libras de las 100. y quedan 97. Dì aora por regla de tres: Si 100. libras se han rebaxado à 97. por razon del interés; 150. libras 12. sueldos, à quantos se rebaxaràn? Siguiendo la regla, hallaràs 146. libras 1. sueldo y 7. dineros y $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{5}$. y que estas libras de Valencia se han de convertir en moneda de Barcelona, diràs por regla de tres: Si 234. dineros, que vale el real de à ocho en Valencia, son 336. ardites de Barcelona; 35059. dineros de Valencia (están reducidas las 146. libras 1. sueldo y 7. dineros, á dineros, dexado el quebrado, para hacer la operacion mas facil) quantos seràn de Barcelona? Siguiendo la regla, hallaràs 50341. ardites, los quales reducidos à libras son 204. libras 15. sueldos 1. dinero, y tanto ha de abonar en Barcelona.

Si el interès se paga aparte, de suerte, que todas las 150. libras 12. sueldos, se han de transportar à Barcelona, primeramente se verà lo que sube el interès deste modo: Si 100. libras hacen 3. de interès; 150. libras 12. sueldos, quanto haràn? Siguiendo la regla, hallarèmos 4. libras 10. sueldos 4. dineros, y tanto se ha de pagar de interès á mas de las 150. libras 12. sueldos. Aora para saber lo que corresponde en Barcelona, à las dichas 150. libras 12. sueldos, se harà otra regla de tres: Si 9. reales y $\frac{3}{4}$. que es el valor del real de à ocho en Valencia, son 14. reales en Barcelona, ò para quitar quebrados: Si 39. reales de Valencia, son 56. en Barcelona; 150. libras 12. sueldos de Valencia, quantas seràn en Barcelona? Siguiendo la regla, hallarèmos 216. libras 4. sueldos 11. dineros, que es lo que ha de dàr en Barcelona.

432 Question 14. Un Mercader en Valencia diò à otro cierta cantidad, para que la conduxera à Barcelona, pagando de interès à 3. por 100. moneda de Valencia; aviendola conducido se sabe, que en Barcelona ha dado 216. libras 4. sueldos 11. dineros y $\frac{1}{13}$ de aquella moneda; preguntase què cantidad le diò de moneda de Valencia?

Digase por regla de tres: Si 14. reales de Barcelona, son 9. reales $\frac{3}{4}$. de Valencia, que es el valor del real de à ocho en cada Reyno, ò para quitar el quebrado: Si 56. reales, son 39. quanto seràn las 216. libras 4. sueldos 11. dineros y $\frac{1}{13}$. siguiendo la regla, salen 150. libras 12. sueldos de Valencia. Aora por el interès formese otra regla: Si 100. dan 3. de interès, 150. libras 12. sueldos, quanto daràn de interès? Siguiendo la regla, salen 4. libras 10. sueldos 4. dineros y $\frac{8}{25}$. las quales sumadas con las 150. libras 12. sueldos, hacen 155. libras 2. sueldos 4. dineros y $\frac{8}{25}$. de Valencia, y tanta cantidad diò el Mercader en Valencia para transportar à Barcelona, pagando el interès en la misma Valencia.

433 Question 15. Un Mercader tiene en Valencia 36. libras, y queriendolas en Barcelona, halla quien se las dè à razon de 4. por 100. moneda de Barcelona, preguntase quantas libras le daràn en Barcelona? Digase por regla de tres: Si 39. dàn 56. (como se hizo en la question 13.) 36. libras que daràn? Siguiendo la regla, se hallaràn 51. libra y $\frac{9}{13}$ moneda de Barcelona.

Aora formese otra regla de tres por el interès, y porque el interès està incluìdo en las 51. libra y $\frac{9}{13}$. Sumese el 4. con el 100. seràn 104. vienen de 100. las 51. libra y $\frac{9}{13}$. de quanto vendràn, siguiendo la regla, hallo 49. libras y $\frac{119}{169}$ y tanto le ha de dàr en Barcelona.

434 Question 16. Un Mercader tiene 150. libras en Aragon, y ha-

halla quien le hace buenos en Cadiz 2600. reales por cierto interès, pidese quanto importa el interès en Cadiz? Resuelvase las 150. libras en reales, y seràn 1500. reales, digase aora por regla de tres: Si 8. reales de Aragon, son 15. de Castilla, ò Cadiz; 1500. reales, quantos seràn, siguiendo la regla, hallo 2812. reales y $\frac{1}{2}$. de los quales resto los 2600. reales, y quedan 212. reales y $\frac{1}{2}$. y tanto sube el interès. Y si quisiere saber à quanto es por 100. digo con otra regla: Si 2600. dan 212. que daran 100. Sigo la regla, y hallo 8. reales y 5. maravedis, y $\frac{2}{13}$.

435 Question 17. Un Mercader quiere un cambio de 50. escudos, de Roma para Valencia, y halla quien se lo haga dàr à razon de 8. reales por escudo; esto es, que de cada escudo, le han de dàr 8. reales en Valencia; preguntase quantas libras le daràn en Valencia? Digase por regla de tres: Si 1. escudo son 8. reales en Valencia; 50. escudos, quantos seràn? Y se hallaràn 400. reales, que son 40. libras, y tanto impotarà lo que le han de dàr en Valencia.

436 Question 18. Pedro estando en Aragon, quiere passar primero à Valencia, y despues à Cataluña; se halla con 10. doblones, y queriendolos cambiar, pide al Campsor (el qual tiene moneda de dichos Reynos) que le dè tantos dineros de Aragon, y de Valencia, como de Cataluña; pidese quantos ha de dár de cada Reyno destos?

Para resolver esta question, es precisso acordarse de lo que queda dicho en los Proemiales, que el doblon en Aragon vale 3. libras 4. sueldos, en Valencia 3. libras 17. sueldos, y en Cataluña 55. reales, ò 5. libras 10. sueldos. Conviertanse, pues, en una especie en que no aya quebrados, la qual serà sueldos, y serán 64. 77. y 110. Hecho esto, supongase que el Campsor dá una qualquer cantidad de sueldos, de cada moneda, es à saber 10. sueldos, los quales se pondrán encima de los 64. 77. y 110. sueldos en forma de quebrado deste modo $\frac{10}{64}$. $\frac{10}{77}$. $\frac{10}{110}$. ó abreviado $\frac{1}{11}$. Sumense estos quebrados, y seràn $\frac{20438}{54208}$. Digase aora por regla de tres: Si $\frac{20438}{54208}$. vienen de 10. sueldos; 10. doblones (reducidos) de quantos sueldos vendràn? Siguiendo la regla, se hallaràn 265. sueldos, que ha de dàr de moneda de cada Reyno.

La prueva es reducir los 265. sueldos y $\frac{2365}{10219}$. de Cataluña, à moneda de Aragon; y assimismo los mismos sueldos de Valencia, à moneda de Aragon: luego sumarlos con los mismos de Aragon, y han de salir 640. sueldos, que valen los 10. doblones en Aragon. Pero adviertase, que la reduccion, se ha de hacer por lo que vale el do-

doblon en cada Reyno deſtos, ſupueſto que nos hemos valido del doblon, pero ſi ſe hace por la correſpondencia del real de à ocho, ſaldrà diferente, porque en Valencia, y Cataluña el real de à ocho, vale mas al reſpeto que el doblon; pues que en Cataluña quatro reales de à ocho valen 56. reales, y el doblon 55.

437 Queſtion 19. Un Mercader tiene en la Tabla de Valencia 150. libras, y pide que le dèn de contado tantas libras, que el quinto dellas, hecho ſueldos, ſea tantos ſueldos, como libras quedàren en dicha Tabla; pideſe quantas libras le daràn de contado? Tomeſe la quinta parte de 20. ſueldos, que tiene la libra, y es 4. ſueldos à los quales ſe añadirá por regla general 1. y ſeràn 5. Hecho eſto, partanſe las 150. libras por 5. y ſaldràn 30. libras que ſon las que le han de dàr.

La prueva es, que ſe tome el quinto de 30. libras, y es 6. libras, las quales reducidas á ſueldos, ſon 120. ſueldos, reſtanſe las 30. libras de las 150. y quedaràn tambien 120. libras en la Tabla.

438 Queſtion 20. Si 39. reales de Valencia, ſon 56. de Barcelona, 14. de Barcelona, ſon 8. de Aragon, y 16. de Aragon; ſon 30. de Caſtilla; pideſe 100. reales de Caſtilla, quantos ſeràn de Valencia? Eſta queſtion ſe puede reſolver de dos modos, el primero por regla de tres, diciendo: Si 56. reales de Barcelona, ſon 39. de Valencia; 14. de Barcelona, quantos ſeràn de Valencia? Siguiendo la regla, ſaldràn 9. reales y $\frac{3}{4}$. los quales ſon tanto como los 8. de Aragon. Digaſe otra vez: Si 16. reales de Aragon, ſon 30. de Caſtilla; 8. de Aragon, quantos ſeràn de Caſtilla? Siguiendo la regla, ſaldràn 15. reales de Caſtilla, los que ſon tanto como los 9. y $\frac{3}{4}$. de Valencia. Aora digaſe por regla de tres: Si 15. reales de Caſtilla, ſon 9. y $\frac{3}{4}$. de Valencia; 100. reales de Caſtilla, quantos ſerán de Valencia? Siguiendo la regla, ſalen 65. reales de Valencia, que correſponden á los 100. de Caſtilla.

El ſegundo modo de reſolver la queſtion, es eſcrivir los 39. reales de Valencia, y debaxo 1. deſpues eſcrivir los 56. de Barcelona, y debaxo los 14. Deſpues los 8. de Aragon, y debaxo los 16. ultimamente los 30. de Caſtilla, y debaxo los 100. como ſe vé en la formula. Hecho eſto, multipliquenſe los numeros unos por otros, ſegun lo ſeñalan las lineas; eſto es, 39. 14. 100. y el producto 873600. ſerá el dividendo, porque en el eſtà incluido el numero 100. que tiene annexa la

Valencia.	Barcelona.	Aragon.	Caſtilla.
39	56	8	30
1	14	16	100

queſ-

question. Multipliquense asimismo entre sì 1. 56. 8. 30. y el producto 13440. serà el partidor: hecha la division, hallarèmos 65. reales como antes.

Adviertase, que quando el mismo numero de moneda de un Reyno se compara con el otro deste modo: Si 39. reales de Valencia, son 56. en Barcelona, y 56. de Barcelona, son 32. en Aragon, y 32. de Aragon, son 60. en Castilla; 100. de Castilla quantos serán en Valencia? Basta formar una sola regla de tres, diciendo: Si 60. de Castilla, son 39. en Valencia; 100. de Castilla, quantos serán en Valencia? Siguiendo la regla, salen los mismos 65. reales; porque en este caso, aunque aya muchas razones intermedias; pero como el mismo consequente de una razon, es antecedente en la otra, se sigue que 60. reales de Castilla, son iguales à 39. de Valencia, y asi basta la regla de tres propuesta.

Trueques.

Trueque, es una permuta de una cosa en otra: tres modos distinguen comunmente los Arithmeticos de trueques; el primero es simple, quando una merçaderia se cambìa con otra sin ganancia, ò con ella; el segundo es compuesto, quando en el trueque se pide parte de dinero de contado; el tercero es con tiempo, quando la paga no se hace de Presente, sino con algun espacio de tiempo.

439 Question 21. Un Labrador quiere trocar trigo por cevada, el cahiz de trigo vale 70. reales, y el de la cevada 25. preguntase quantos cahices de cevada se daràn por 30. de trigo? Para responder à esta pregunta, y sus semejantes, lo primero se ha de saber quanto valen los 30. cahices de trigo á 70. reales; multiplicando 30. por 70. salen 2100. reales por el valor del trigo; dividanse por 25. reales, que es el valor del cahiz de la cevada, y saldrán 84. que son los cahices de cevada que le han de dar por los 30. de trigo. La prueva es, que tanto han de valer los 84. cahices de cevada á 25. reales, como los 30. cahices de trigo à 70. reales.

440 Question 22. Pedro tiene 40. arrobas de miel, la qual pagandola de contado, vale á 25. sueldos la arroba, pero en trueque la quiere subir à 30. sueldos, preguntase para trocarla por aceyte, que de contado vale á 20. sueldos la arroba, quantas arrobas le daràn, y à como subirà el precio del aceyte en trueque?

Para la solucion digase por regla de tres: Si 25. sueldos precio de la miel de contado, se suben en trueque á 30. sueldos; 20. sueldos precio del aceyte de contado, à quanto subirán en trueque? Sigui-

guiendo la regla, hallaremos 24. sueldos, y á tanto vale la arroba del aceyte en trueque, porque ha de subir á proporcion de la miel. Aora para saber las arrobas que se han de dàr de aceyte por los 40. de miel, multipliquense las 40. arrobas de miel por los 30. sueldos en trueque, y son 1200. dividase por los 24. sueldos que vale el aceyte en trueque, y salen 50. arrobas de aceyte, que le han de dar por las 40. de miel.

441 Question 23. Pedro quiere trocar miel por aceyte, la miel vale de contado á 25. sueldos la arroba, y en trueque à 30. el aceyte fuè puesto en trueque à 24. sueldos la arroba, pidese de contado à quanto valdrá? Digase por regla de tres: Si 30. sueldos en que la miel fuè puesta en trueque, vienen de 25. sueldos, que valía de contado; 24. sueldos en que el aceyte fue puesto en trueque, de quantos sueldos vendràn de contado? Siguiendo la regla, salen 20. sueldos, y á tanto vale la arroba del aceyte de contado.

442 Question 24. Pedro para trocar miel por aceyte, sube la miel 5. sueldos mas la arroba de lo que la vendia de contado, el aceyte de contado vale á 20. sueldos, pero en trueque, sube á 24. pidese à còmo se vendìa la miel de contado? Restase el precio del aceyte de contado, y en trueque; esto es, 20. de 24. y quedan 4. Digase aora por regla de tres: Si 4. vienen de 20. de quantos vendrán 5. que es lo que se subiò la miel en trueque? Siguiendo la regla, saldrán 25. sueldos, que es el precio de la miel de contado.

443 Question 25. Pedro trueca miel por aceyte, la arroba de la miel, no se sabe quanto vale de contado, pero en trueque vale á 30. sueldos; la arroba del aceyte vale de contado à 20. sueldos, y en trueque 24. despues de hecho el trueque, halla el que tiene la miel, que gana á razon de 10. por 100. pidese què vale la arroba de la miel de contado?

Lo primero se ha de igualar el trueque, como si no huviera ganancia, diciendo: Si 24. sueldos del valor de la arroba del aceyte en trueque, vienen de 20. sueldos, que es el valor de la arroba de aceyte de contado; 30. sueldos valor de la arroba de la miel en trueque, de quantos sueldos vendrán, y hallo, que de 25. sueldos. Aora para saber quanto vale la arroba de la miel aviendo ganancia de 10. por 100. Sumense los 10. con los 100. y digase: 100. vienen de 110. de quantos vendrán los 25. sueldos del precio de la miel de contado? Siguiendo la regla de tres, salen 27. sueldos y medio, y á tanto precio avia de valer la arroba de la miel de contado para ganar à 10. por 100.

Quef-

444 Question 26. Pedro tiene 40. arrobas de miel, las que les quiere cambiar por aceyte, pero con tal condicion, que la quarta parte del valor de la miel, le han de dàr en dinero de contado, y lo demàs en aceyte; la arroba de la miel, vale à 25. sueldos, y la del aceyte à 20. sueldos, pidese quanto dinero, y aceyte le han de dàr?

Multiplicando las 40. arrobas por 25. sueldos, saldràn 1000. sueldos, que es el valor de toda la miel; luego porque la quarta parte se ha de dár en dinero, sacando la quarta parte de los 1000. sueldos, seràn 250. sueldos los que se han de dàr de contado, y quedarán 750. sueldos, los quales partidos por los 20. sueldos que vale la arroba del aceyte, saldràn 37. arrobas y media, y tanto aceyte le han de dár.

445 Question 26. Pedro tiene 40. arrobas de miel, cuya arroba vale à 25. sueldos, y la quiere baratar por aceyte, cuya arroba vale à 20. sueldos, pero quiere los $\frac{2}{3}$. en dinero de contado, y aun quiere ganar con su trueque à razon de 10. por 100. preguntase quanto dinero, y aceyte le han de dár?

Multipliquense las 40. arrobas por los 25. sueldos como antes, y saldràn 100. sueldos por el valor de la miel; dividanse en tres partes, y tomanse las dos por razon de los $\frac{2}{3}$. y seràn *666*. sueldos, y $\frac{1}{3}$. quiere ganar à 10. por 100. digase por regla de tres: Si 100. dàn 110. de ganancia, y principal, qué darán los 333. sueldos y un tercio? *Siguiendo* la regla, saldràn 3*66*. sueldos y dos tercios, dividanse por 20. sueldos, que es el precio de la arroba del aceyte, y saldràn 18. arrobas y un tercio, que le han de dár de aceyte.

446 Question 27. Dos quieren trocar sus mercaderias, es à saber miel por aceyte; la arroba de la miel, vale de contado 25. sueldos, y en trueque 30. sueldos; la arroba del aceyte, vale de contado 20. sueldos, y en trueque 24. sueldos; el que dà la miel, quiere esperar 4. meses al que dà el aceyte: preguntase, el dueño del aceyte, quantos meses esperarà al de la miel, para que la barata sea justa.

Ordenese una regla de tres, compuesta en esta forma: Si 25. sueldos, que vale la miel, de contado ganan 5. sueldos en trueque (que es lo que ay de 25. hasta 30.) en 4. meses; 20. sueldos que vale el aceyte de conta-

1	25. sueldos.
2	5. sueldos.
3	4. meses.
4	20. sueldos.
5	4. sueldos.
6	meses.

do-

do para ganar 4. sueldos (que ay desde 20. de contado, hasta 24. en trueque) quantos meses serán menester; siguiendo la regla (que es inversa) salen 4. meses, y tanto tiempo ha de aguardar el que dà el aceyte, al de la miel.

447 Question 28. Dos quieren trocar sus mercaderias; el primero dá miel, cuya arroba de contado vale à 25. sueldos, y en trueque à 30. y dá 2. meses de espera; el segundo tiene aceyte, cuya arroba de contado vale 20. sueldos, y dá 3. meses de espera; preguntase à como pondrá el aceyte en trueque, paraque la barata sea justa?

Digase por regla de tres compuesta: Si 25. sueldos en 2. meses ganan 5. sueldos (que es la diferencia del valor de la miel de contado, ò en trueque (20. sueldos del aceyte de contado en 3. meses, quanto ganarán? Siguiendo la regla (que es directa) salèn 6. sueldos, los quales añadidos à los 20. sueldos del aceyte de contado, son 26. sueldos, que vale la arroba del aceyte en trueque, dando 3. meses de espera.

448 Question 29. Pedro, y Juan quieren trocar miel, y aceyte: Pedro vende la miel de contado à 25. sueldos la arroba, y en trueque la pone à 30. Juan vende la arroba del aceyte de contado à 20. sueldos, y en trueque la pone à 23. sueldos, preguntase si el trueque es justo, y sino lo es, à quanto se gana, ò pierde por ciento.

Digase por regla de tres: Si 25. sueldos de la miel, suben à 30. los 20. sueldos del aceyte, à quanto subirán; siguiendo la regla, salen 24. sueldos, y à tanto avia de poner Juan en trueque el aceyte: y assi Juan queda defraudado, y Pedro gana. Aora para saber quanto es por 100. la pèrdida del uno, y ganancia del otro, pongase los precios en forma de quebrado, como parece en la formula, multipliquense en cruz, y serán los productos 600. y 575. Digase pues por regla de tres: Si 600. dán 575. que darán 100. siguiendo la regla, salen 95. y 5. 6. avos, restados de 100. quedan 4. y un sexto, y esto pierde Juan por 100. Digase otra vez; si 575. dán 600. que darán 100. Siguiendo la regla, salen 104. sueldos, y 8. 23. avos: De los que restando 100. quedan 4. y $\frac{8}{23}$ avos, que es lo que gana Pedro por 100. La multiplicacion en cruz, denota la proporcion de los quebrados, ò de los precios de las mercaderias;

$$\begin{array}{ccc} 575 & & 600 \\ \frac{25}{30} & \times & \frac{20}{23} \end{array}$$

rias; con que aquel ganará, cuyo quebrado fuere menor; y assi [illegible] que el quebrado de los precios de la miel $\frac{25}{30}$. es menor que el [illegible] precios del aceyte $\frac{20}{23}$. Supuesto que el numero 575. es menor que [illegible] (140) ganará Pedro, que trueca la miel, y perderá Juan que [illegible] el aceyte. La razon desto es, porque haciendo la regla de tres, si 575. dàn 600. que daràn 100. como los 600. son mas que 575. tambien saldrà numero mayor que los 100. con que ay ganancia; y al contrario.

GANANCIAS, INTERESES, PENSIONES, *Arrendamientos, &c.*

449 Questíon 30. Un Mercader comprò cierta mercaderia por 250. reales, pidese por quanto la venderà para ganar à 7. por 100? Sumense los 7. con las 100. y seràn 107. Aora digase por regla de tres: Si 100. suben à 107. à quantos subiràn 250. reales; siguiendo la regla, que es directa, salen 267. reales, y medio, y por tanto precio la ha de vender.

450 Question 31. Pedro hace teñir 1000. varas de vayeta, la qual se entra, y encoje à 3. por 100. pidese quantas varas tendrà despues de teñida? Restense los 3. de los 100. y serán 97. digase aora por regla de tres: Si 100. baxan à 97. à quanto baxaràn las 1000. varas? Siguiendo la regla, que es directa, salen 970. varas, y tantas tendrà despues de teñida.

De suerte, que para ganar à tanto por 100. se pone el 100. en primer termino de la regla de tres; el segundo termino, es la suma de la ganancia, y de los 100. y el tercer termino, es la cantidad que ha de ganar. Pero quando se pierde à tanto por 100. se resta lo que se pierde de los mismos 100. y se ordena la regla de tres del mismo modo.

451 Question 32. Pedro vendiò cierta mercaderia por 84. libras, hallò que ganava à 8. por 100. pidese quanto le costò la dicha mercaderia: Sumese 8. y 100. y serán 108. luego digase por regla de tres: Si 108. vienen de 100. de quantos vendràn 84. Siguiendo la regla, salen 77. libras y 7. 9. avos por el coste de la mercaderia.

452 Question 33. Vendiendo la vara del terciopelo por 25. reales, se halla perder 4. por 100. pidese à quanto costò la vara. Restense 4. de 100. y quedan 96. digase aora: Si 96. vienen de 100.

de

quantos vendrán 25. Siguiendo la regla, salen 26. reales, y 1. 24. avos, y à tanto costò la vara.

453 Question 34. Vendiendo una mercaderia por 1500. reales, se ganan 500. reales, pidese à quanto se gana por 100. Restense los 500. reales de los 1500. y quedaràn 1000. Aora digase por regla de tres; Si 1000. ganan 500. quanto ganaràn 100. Siguiendo la regla salen 50. y assi digo, que se gana à 50. por 100.

454 Question 35. Un Mercader comprò una pieza de paño, la qual con drechos costò 1500. reales, pagando de drechos à 7. por 100. pidese quanto costò la pieza? Sumense los 7. y 100. y son 107. Luego digase si 107. vienen de 100. de quantos vendrán 1500. y salen 1401. reales y 93. 107. avos por el precio de dicha pieza.

455 Question 36. Un Mercader comprò cierta mercaderia por tantos reales de tal suerte, que si diera por ella 50. reales mas de lo que pagò, y la vendiera por 280. reales, hallaria ganar 12. por 100. pidese quanto costò la dicha mercaderia? Añadanse 12. à 100. y son 112. Digase aora; si 112. vienen de 100. de quantos vendràn los 280. Siguiendo la regla, salen 250. reales, y quedan 200. reales por el valor verdadero de la mercaderia.

456 Question 37. Si con 80. reales en 4. meses, se gana à razon de 7. por 100. con 60. reales en 10. meses, à quanto se ganarà por ciento. Dispongase una regla de tres compuesta, como se vè en el exemplo, y resolviendola, salen 13. reales, y un octavo, y à razon de tanto, ganan por 100. los 60. reales en 10. meses.

1	80. reales.
2	4. meses.
3	7. ganancia.
4	60. reales.
5	10. meses.
6	13. real. y $\frac{1}{8}$.

457 Question 38. Si vendiendo 3. varas de cinta por 5. reales, se gana el tercio de lo que cuestan, si se vendieran 5. varas por 7. reales, quanto se ganaria por ciento? Saquese el quarto del 5. que es el precio de las 3. varas; y quedarán 3. reales, y tres quartos por el precio que costaron. Aora para ver lo que se gana por 100. he de saber lo que se gana en 5. varas, buscando primero lo que valen por regla de tres: Si 3. varas valen 3. reales, y tres quartos, quanto valdràn las 5. varas? Y hallo 6. reales, y un quarto, los quales restados de los 7. reales de la venda de las 5. varas, quedan tres quartos de real, y tanto se gana en las 5. varas. Digo otra vez: Si en 5. varas se ganan tres quartos de real; en 100. quanto se ganarà? Sigo la regla, y hallo que se ganan 15. reales por ciento.

La

La razon, porque ganando el tercio en las varas se saca el quarto es, porque como en los 5. reales està incluìdo el coste de las 3. varas, y mas un tercio, el dicho coste està dividiendo en tres partes, y se añade una, y assi los 5. reales estàn divididos en 4. partes, luego quitado la una, quedan las tres por el verdadero valor de las 3. varas.

458 Question 39. Pedro deve à Juan 100. libras, las quales ha de pagar al fin de un año por concierto, pero si las paga de contado, Juan perderà de la paga à razon de 10.por 100.preguntase quanto se darà de contado? Añadanse los 10. con los 100. y seràn 110. Diga aora: Si 110. baxan à 100. à quantos baxaràn 100. libras? Siguiendo la regla, salen 90. libras, 18. sueldos, y 2. dineros y $\frac{2}{11}$, y tanto ha de pagar de contado.

459 Question 40. Si vendiendo una mercaderia por 1000. reales, se gana 10. por 100. para ganar à 12. por 100. por quanto se venderà? sumense los 10. y 12. con los 100. y seràn 110. y 112. Digase aora por regla de tres: si 110. dàn 1000. quantos daràn 112. siguiendo la regla salen 1018. reales, y $\frac{2}{11}$.

460 Question 41. Si vendiendo una mercaderia por 1060. reales, se halla perder à razon de 4. por 100. por quantos reales se avia de vender para ganar à razon de 4. por 100. Restense los 4. que se pierden de 100. y por otra parte añadanse los quatro que se ganan à los mismos 100. y seràn 96. y 104. Digase aora: si 96. dan 1060. reales; 104. quantos daràn, y salen 1148. reales, y $\frac{1}{3}$. y à tanto se avia de vender para ganar à 4. por 100.

461 Question 42. Si vendiendo el marco de oro de 22. quilates por 90. libras, se halla ganar à 12. por 100. pidese por quantas libras se ha de vender el marco de oro de 24. quilates para ganar à 10. por 100.? Añadense los 12. à los 100. y digase: si 112. vienen de 100. de quantos vendràn 90. siguiendo la regla salen 80. libras, y $\frac{5}{84}$. por el caudal del marco de 22. quilates. Para saber el valor del marco de 24. quilates digase: si 22. quilates dan 80. libras, y $\frac{5}{84}$. quanto daràn 24. quilates, resolviendo la question salen 87. libras, y $\frac{51}{77}$. que es el valor del marco de 24. quilates. Ultimamente, porque en èl se ha de ganar à 10. por 100. digase; si 100. dan 110. que daràn. 87. y $\frac{51}{77}$. siguiendo la regla salen 96. libras, y $\frac{3}{7}$. y por tanto se ha de vender el marco de oro de 24. quilates para ganar à 10. por 100.

462 Question 43. Vendiendo 2. arrobas de azucar por 60. reales, se pierde à 8. por 100. si se vendieran 3. arrobas por 150. reales

à

y quantos se perderia, ò ganaria por 100. Restando los 8. de los 100. quedan 92. Digase aora: Si 92. vienen de 100. los 60. reales de quanto vendrán? Siguiendo la regla, salen 65. reales y 5. 23. avos, que es el valor de las 2. arrovas de azucar, sin pèrdida, cuya mitad 32. reales y 14. 23. avos, es el valor de una arroba, el qual multiplicado por las 3. arrobas, salen 97. reales y 19. 23. avos por el valor justo de las 3. arrobas sin ganancia, ni pèrdida: pero porque se venden por 150. reales avrá de ganancia 52. reales y 4. 23. avos: Y diciendo por regla de tres: Si 97. reales ganan 52. reales y 4. 23. avos, quanto ganarán 100.? Siguiendo la regla, salen 53. reales y un tercio, y à tanto se gana por 100.

463 De otro modo mas facil se puede resolver la misma question. Restados los 8. de la pèrdida de 100. quedan 92. Digase aora por regla de tres compuesta, 2. 60. 92. 3. 150. la qual es inversa en el primero, y quarto termino; y resolviendola, salen 153. reales y un tercio. Y pues este termino hallado, es mayor que 100. avrà ganancia: restense, pues, 100. y quedarán 53. reales y un tercio, por lo que se gana por ciento; si fuera menor, avria pèrdida; y entonces, restando el dicho termino de 100. la resta seria la pèrdida por 100.

464 Question 44. Pedro prestò à Juan 1500. reales por 4. meses, à razon de 5. por 100. preguntase quanto sube el interès? Digase: Si 100. en 12. meses (que es un año) ganan 5. los 1500. reales, en 4. meses quanto ganarán? Siguiendo la regla, salen 25. reales.

465 Question 45. Pedro ha de cobrar 22. libras dentro de 2. meses, y por aver menester dinero de presente busca quien le compre la paga, y halla quien le dè 20. libras de contado, dexandose perder las 2. libras, preguntase à quanto pierde por 100.? Digase por regla de tres: Si 20. libras en 2. meses hacen 2. libras de interès, 100. libras en 12. meses, que es un año, quanto interès haràn? Siguiendo la regla, salen 60. y à tanto pierde por 100. y por consiguiente quien dà el dinero, gana à 60. por ciento.

466 Cuydado en la conciencia quien hace estos tratos, porque aunque à la primera vista no porece ganar mucho 2. libras en 20. pero atendiendo, que no son 100. libras, sino 20. ni es un año el tiempo del empleo, sino 2. meses, sale una ganancia exorbitantissima, como es à 60. por 100.

467 Question 46. Pedro prestò à Juan 1500. reales por cierto tiempo, ganando à 5. por 100. al fin del tiempo le buelve 1525. reales, pidese por quanto tiempo fue el mutuo? Digase por regla de tres: Si 100. ganan 5. en 12. meses, para que 1500. ganen 25. que

es la diferencia de 1500. à 1525. quantos meses seràn menester? Siguiendo la regla, que es inversa en el primero, y quarto termino, salen 4. meses, y por tanto tiempo durò el mutuo.

1	100. caudal.
2	5. ganancia.
3	12. meses.
4	1500. caudal.
5	25. ganancia.
6	4. meses.

468 Question 47. Pedro dexò à Juan 360. reales por tiempo de 10. años à razon de 10. por 100. sin contar interès de interès, pidese quantos reales le ha de bolver al fin de los 10. años? Digase primeramente por regla de tres: Si 100. en un año ganan 10. los mismos 100. en 10. años, quanto ganaràn? Siguiendo la regla, salen 100. los quales, sumados con los 100. del caudal, son 200. Aora digase otra vez: Si 100. suben à 200. à quantos subiràn los 360. reales? Siguiendo la regla, salen 720. reales, y tantos le ha de bolver.

469 Question 48. Juan ha de pagar à Pedro 720. reales dentro de 10. años; pero si paga de contado, le quitarà à razon de 10. por 100. pidese quantos reales pagarà de presente? Veáse lo que ganan 100. en 10. años por la question antecedente, y se hallaràn 100. los quales juntos con los 100. primeros, son 200. Digase aora por regla de tres: Si 200. baxan à 100. los 720. reales à quantos baxaràn? Resolviendo la question, salen 360. reales, y tantos ha de dar de contado. Todo esto se entiende sin interès de interès.

470 Question 49. Si 200. reales en 8. meses ganan 16. reales, 150. reales en 8. meses quanto ganaràn? Aunque esta question es de cinco numeros; pero como los dos son iguales, que son los 8. meses, se deven quitar (404), y quedarà de tres numeros assi: Si 200. reales ganan 16. quanto ganaràn 150.? Y salen 12. reales de ganancia.

471 Question 50. Pedro prestò 4000. reales à Juan por tiempo de 3. años, despues quando los bolviò Pedro no quiso recibir interès, sino que pidiò à Juan que le prestàra 7480. reales: pidese quanto tiempo los ha de retener Pedro para satisfacerse por el interès de los 4000. reales en 3. años? Digase por regla de tres: Si 4000. reales ganan cierto interès en 3. años, 7480. reales, para ganar la misma cantidad, quanto tiempo serà menester? La qual es inversa, porque creciendo el numero de los reales en la segunda parte, ha de menguar el tiempo; resolviendola, pues, salen 1. año 7. meses 7. dias y $\frac{101}{187}$.

472 Question 51. Un Mercader deve 450. reales, los quales ha de

de pagar dentro de un año en tres pagas, iguales en el tiempo, y en la cantidad; pero si los paga de contado, le quitaràn à razon de 10. por 100. preguntase, quantos reales pagará de contado? Dividanse los 450. reales de la deuda, y los 12. meses que tiene el año en tres partes iguales por las tres pagas, y avrà de pagar 150. reales al fin de 4. meses por la primera paga; mas 150. reales, despues de otros 4. meses, ò al fin de 8. meses, contando desde que contraxo la deuda por la segunda paga: ultimamente 150. reales al fin de 12. meses, desde el dia de la deuda por la tercera paga.

Hecho esto, vease que ganan los 150. reales en 4. 8. y 12. meses à razon de 10. por 100. diciendo: Si 100. en 12. meses, que es un año, ganan 10. quanto ganarán 150. reales en 4. meses? Salen 5. reales. Otra vez: Si 100. en 12. meses ganan 10. quanto ganarán 150. en 8. meses? Salen 10. Otra vez: Si 100. en 12. meses ganan 10. quanto ganarán 150. en 12. meses? Salen 15. reales: Sumense los 5. 10. y 15. reales de las ganancias, y son 30. reales por la ganancia de los 450. reales pagados en tres pagas.

Aora vease los 450. reales en quanto tiempo ganaràn los 30. reales à razon de 10. por 100. diciendo: Si 100. ganan 10. en 12. meses; 450. para ganar 30. quanto tiempo avrán menester? Esta question tiene inversion en el primero, y quarto termino; y resuelta, salen 8. meses, y en tanto tiempo los 450. reales ganaràn 30.

Estos mismos meses (siendo las pagas iguales) se pueden conocer por otro modo mucho mas facil, y es, juntar los meses de las pagas; esto es, 4. 8. y 12. y son 24. los quales se partiràn por el numero de las pagas, que son 3. y saldrán 8. meses; y al fin de tanto tiempo avria de pagar los 450. reales en una paga.

Conocidos, pues, los 8. meses por qualquiera de los dos modos, vease 100. reales en 8. meses à 10. por 100. que ganaràn, diciendo: Si 12. meses, que es un año, ganan 10. los 8. meses, quanto ganaràn? Y salen 6. reales y $\frac{2}{3}$, que sumados con 100. son 106. y $\frac{2}{3}$. Digase aora: Si 106. y $\frac{2}{3}$ baxan à 100. los 450. reales à quanto baxarán? Siguiendo la regla, salen 421. reales y $\frac{7}{8}$, y con tantos pagarà de presente.

473 Question 52. Pedro arrienda unos diezmos por 360. doblones cada año, por tiempo de 5. años; pero si los paga todos de contado, ò al presente, le quitaràn à razon de 10. por 100. al año: pidese quantos doblones pagarà de contado? Para saber en quanto tiempo devia pagar toda la cantidad junta, contando à 10. por 100. de interès, ò ganancia, se harà por reglas de tres, ò por el otro mo-

do, que enseñamos en la question antecedente, del qual usarèmos aora por ser mas facil.

Sumense, pues, los años en que consisten las pagas; esto es, 1. 2. 3. 4. 5. y son 15. años, los quales se partirán por 5. que es el numero de las pagas, ò años, y salen al quociente 3. años; pues al fin de 3. años devia pagar toda la cantidad del arrendamiento, que son 1800. doblones, es à saber, la suma de las 5. pagas, sin perjuicio de ninguno.

Esto supuesto, vease quanto ganan 100. en 3. años, à razon de 10. por 100. diciendo por regla de tres: Si en un año se ganan 10. en 3. quanto se ganarà? Y salen 30. doblones, los quales juntos con los 100. hacen 130. Digase aora: Si 130. se baxan à 100. los 1800. doblones, à quanto baxarán? Siguiendo la regla, salen 1384. doblones y 8. 13. avos, y en tanto pagarà de contado.

474 Question 53. Pedro vendiò cierta mercaderia por 10000. reales à pagar en quatro pagas; es à saber, 1000. reales dentro de un año, 2000. reales al fin de 2. años, 3000. reales dentro de 3. años, y 4000. reales al fin de 4. años; pero pagando de contado, le quitarà à razon de 10. por 100. al año: pidese en quantos reales pagarà de presente?

Por ser estas pagas desiguales, multipliquese cada paga por su tiempo; esto es, la primera, por 1. año; la segunda, por 2. la tercera, por 3. &c. y saldrán 1000. 4000. 9000. y 16000. cuya suma 30000. partida por toda la deuda 10000. darà 3. años, y al fin de tanto tiempo avia de pagar los 10000. reales en una paga, para equilibrar el tiempo. Vease aora quanto ganan 100. en 3. años à razon de 10. por 100. y se hallarán 30. que juntos con los 100. son 130. Digase aora: Si 130. dàn 100. què darán 10000. reales? Y salen 7692. reales y 4. 13. avos, y tanto ha de dar de contado.

475 Question 54. Pedro prestò à Juan 1000. reales por tiempo de 4. años, à razon de 10. por 100. al año de interès; pero con pacto, que el interès gane como el mismo principal; preguntase, quantos reales bolverà? Estas questiones de interès de interès, se pueden resolver de dos modos. Sea el primero, sumar la ganancia con el caudal, y continuar la regla de tres por tados los años que corre el interès, assi:

Año primero: Si 100. dán 10. luego 1000. darán 100. que sumados con el caudal, son 1100. Año segundo: Si 100. dán 10. luego 1100. darán 110. los quales sumados con los 1100. son 1210. Año tercero: Si 100. dán 10. luego 1210. darán 121. que sumados con los 1210. son 1331. Año

quar-

quarto: Si 100. dàn 10. luego 1331. daràn 133. y $\frac{1}{10}$. los quales sumados con los 1331. son 1464. y $\frac{1}{10}$. y tanto ha de bolver al fin de los quatro años.

De otro modo, se puede hacer mas facilmente. Escrivase el caudal, è interès de un año, tantas veces como son los años, y multiplicando unos numeros por otros, saldrán el numero dividendo: Escrivase por otra parte el caudal solo una vez menos que el numero de los años, y hecha la multiplicacion de unos numeros por otros, saldrà el divisor: Dividase un numero por otro, y el quociente dará el numero buscado.

Como en el exemplo, la suma del caudal, é interès de un año, es 1100. la qual se ha de escrivir quatro veces por otros tantos años que dura la ganancia, como se vè en la formula; multiplicando continuamente unos numeros por otros, salen 1464100000000. Escrivase el caudal 1000. tres veces: esto es, una vez menos que los años de la ganancia; y multiplicando un numero por otro continuamente, salen 1000000000. Dividase aquel producto por este, y saldràn los mismos 1464. reales $\frac{1}{10}$.

1100.	1100.	1100.	1100.
1100.	1000.	1000.	

476. Question 55. Pedro deve à Juan 1000. reales, y no pudiendolos pagar, le consigna 300. reales cada año de una renta que tiene; preguntase en quanto tiempo estará pagada la deuda, pagando, como queda dicho cada año 300. reales, en los quales se ha de comprehender todo el interés que le perteneciere, à razon de 10. por 100.? Vease lo que importa el interès de los 100. reales, à razon de 10. por 100. en un año, diciendo: Si 100. ganan 10. luego 1000. ganaràn 100: restease estos 100. de interés de los 300. reales que paga cada año, y quedaràn 200. que avrà pagado del capital; y assi, se han de restar de los 1000. y quedaràn 800. reales.

Año 2. digase: Si 100. ganan 10. luego 800. ganaràn 80. de interès, restense de los 300. y quedan 220. que avrá pagado del capital; y assi, estos 220. se han de restar de 800. y quedarán 580.

Año 3. Si 100. ganan 10. luego 580. ganarán 58. de interés, restados de los 300. quedan 242. que avrà pagado de la suerte principal à mas de interés, y por esso restense de 580. y quedaràn 338.

Año 4. Si 100. ganan 10. luego 338. ganaràn 33. y $\frac{4}{5}$. de inte-

terés, los quales, restados de los 300. quedan 266. y 1/5. que quitados de 338. restan 71. reales y 4. quintos por capital. Y porque es mucho mayor la paga del un año de 300. reales, que los 71. y 4. quintos, que sobran por la suerte principal, es manifiesto, que este año ultimo, no se podràn cobrar todos los 300. reales, sino los 71. y 4. quintos, y lo que les corresponden de interés en un año; porque se supone, que al fin del año, se hace la paga. Digase, pues: Si 100. ganan 10. luego 71. y 4. quintos ganaràn 7. reales y 9. avos, los quales juntos con los 71. y 4. quintos, son 78. y 49. 50. avos, y tanto ha de cobrar Pedro de los 300. reales de la paga del año quinto. Con que la deuda estarà pagada en 4. años, y mas 78. reales y 49. 50. avos del año quinto.

477 Question 56. Pedro quiere fundar un Beneficio, y no hallandose en bastante dinero, hace donacion à la Parroquia de 100. doblones, para que el principal, y las pensiones se carguen à censo de 5. por 100. continuamente hasta que hagan la cantidad de 150. doblones; preguntase quantos años han de pasar, suponiendo, que no aya omission en los cargamientos?

Por muchos modos se puede resolver esta question, sea el primero por la regla de tres. Sumense los 5. con los 100. y seràn 105. y vayase discurriendo por los años, como en la question 54. hasta encontrar con el numero que se busca, deste modo.

Año 1. completo: Si 100. dán 105. luego 100. doblones daràn 105.

Año 2. Si 100. dán 105. luego 105. daràn 110. y un quarto.

Año 3. Si 100. dàn 105. luego 110. y un quarto, darán 115. y 61. 80. avos.

Año 4. Si 100. dán 105. luego 115. y 61. 80. avos, daràn 121. y 881. 1600. avos.

Año 5. Si 100. dàn 105. luego 121. y 881. 1600. avos, daràn 127. y 20101. 32000. avos.

Año 6. Si 100. dàn 105. luego 127. y 20101. 32000. avos, daràn 134. y 6121. 640000. avos.

Año 7. Si 100. dàn 105. luego el numero del año antecedente darà 140. doblones y 9088541. 12800000. avos.

Año 8. Si 100. dán 105. luego el numero del año antecedente darà 147. doblones y 190859361. 256000000. avos.

Aora ya no se puede continuar la regla otro año; porque la cantidad, que ha sido en este ultimo año, està muy cerca de los 150. doblones, que se han de hacer de propriedad; de suerte, que falta me-

menos que la pension de un año; y asi solo se han de buscar los meses que faltan, para que las pensiones hagan los dichos 150. doblones. Restese, pues la ultima cantidad 147. doblones, y el quebrado sobre escrito de los 150. doblones; y quedaràn 2. doblones y 65140639. 256000000. avos. Digase aora por regla de tres compuesta: Si 100. ganan 5. en 12. meses (que es un año): luego 147. doblones y 190859361. 256000000. avos para ganar 2. doblones y 65140639. 256000000. avos, quantos meses avràn menester? Siguiendo la regla, que es inversa en el primero, y quarto termino, salen 3. meses, y 250451792 77. 378228593 61. avos. Y asi, en 8. años, 3. meses, y el immediato quebrado de mes, los 100. doblones avrán subido á 150.

De otro modo se puede resolver la misma question. Escrivase el numero 105. (que es el capital, è interès de un año) y el numero 100. (que es el capital) muchas veces, como se vé en la formula. Multipliquese el numero 105. por sì mismo algunas veces, v. g. siete; esto es, multipliquense 105. por 105. y el producto otra vez por 105. y este producto otra vez por 105. hasta siete veces, y el producto se guardarà. Multipliquense aora el numero 100. seis veces por sì mismo (siempre se ha de multiplicar una vez menos, como se dixo en la question 54.) y partiendo el producto guardado por èste, vendrà al quociente un numero mucho menor que 150. que es señal de aver pocas multiplicaciones: pues multipliquese cada producto una vez mas, que serán ocho veces en el uno, y siete en el otro; y hecha la particion, saldràn los mismos 147. doblones, y el mismo quebrado. En lo demàs obrese como en el parrafo antecedente; con que en 8. años, (porque ay ocho multiplicaciones) 3. meses, y el quebrado, los 100. doblones avràn subido à 150.

105.	105.	105.	105.	105.	105.	105.	105.
100.	100.	100.	100.	100.	100.	100.	

De suerte que esta regla, es la misma, que la que dimos en la question 54. solo con la diferencia, que allì estavan conocidos los años, y por consiguiente se sabia el numero de las multiplicaciones; pero aqui se buscan los años, haciendo diferentes multiplicaciones, hasta que partiendo el producto del numero 105. por el producto del 100. venga un numero proxime menor à 150. que se busca; y tantos años avràn passado, quantas multiplicaciones huviere del 105. por sì mismo.

De otro modo. Porque los 5. que se ganan de pension por 100. son la vigesima parte de los mismos 100. Saquese la vigesima parte de los 100. doblones, que es dividirles por 20. y será 5. añadanse à los 100. y seràn 105. los doblones del primer año. Otra vez, dividanse los 105. por 20. y el quociente 5. y un quarto, añadase à los 105. y serán 110. y un quarto los doblones del año segundo. Otra vez, saquese la vigesima parte de 110. y un quarto, y será 5. y 41. 80. avos, añadase à los 110. y un quarto, y serán 115. y 61. 80. avos los doblones del año tercero; y assi, se proseguirà hasta hallar un numero proxime menor à los 150. doblones, como se ha hecho antes.

Hasta aqui hemos procedido en buscar los años, suponiendo, que no aya avido intermission en cargar las pensiones, ò reditos; pero si la ha avido, se harà cuenta de lo que gana el principal en todo aquel tiempo, y despues de lo que gana la pension, y principal. Y para declararme mejor, supongo, que cada pension ha tardado medio año de cargar, que es el tiempo que en Valencia se dà à los Curadores, y tambien supongo, que se dá en este caso para cargar los reditos; de suerte, que juridicamente se les admite medio año, sin cargar las pensiones.

Año 1. En este año la pension de los 100. doblones, se ha de contar por medio año, porque se entregan para cargar, y se ha de dar medio año de vacìo, pero si al principio del año estuviera hecho el cargamiento, se avria de contar la pension por un año; pues siguiendo la regla de tres: Si 100. en un año, ganan 5. luego 100. doblones en un año, ganarán 5. cuya mitad 2. y medio, es lo que han rentado los 100. doblones este primer año, dando medio año de vacìo como està dicho; los quales 2. doblones y medio, se han de cargar en el segundo año, dando tambien el dicho medio año de vacìo.

Año 2. En este año los 100. doblones cargados; ganan 5. doblones por todo el año entero, y à mas deste, se ha de vèr los 2. doblones y medio quanto ganarán en medio, que siguiendo la regla de tres, es un octavo de doblon, con que al fin del segundo año, se hallan de pension 5. doblones por los 100. doblones, y un octavo de doblon por los 2. doblones y medio que se cargaron, los quales sumados, hacen 5. doblones y un octavo, y esto es lo que se ha de cargar el año tercero; y hasta aora ay cargados 100. doblones por una parte del primer año, y 2. doblones y medio del año segundo, que juntos son 102. doblones y medio.

Año

Año 3. Los 102. doblones y medio que están ya cargados, hacen doblones, y un octavo de pension por todo el año, porque están ya cargados; mas los 5. doblones, y un octavo que se han de cargar este año; hacen 41. 320. ovos de doblon de pension por medio año; con que al fin deste tercer año, se hallan de pensiones 5. doblones, y un octavo, y mas 41. 320. avos, que sumadas hacen 5. doblones y 81. 320. avos, que se han de cargar el año siguiente, y hasta aora ay cargados 102. doblones y medio de los años antecedentes, y 5. doblones y un octavo, que se cargaron este año, que todas hacen la suma de 107. doblones, y cinco octavos.

Año 4. Los 107. doblones, y cinco octavos, que están ya cargados, hacen 7. doblones y 61. 160. avos por todo el año. Mas los 5. doblones y 81. 320. avos por medio año, hacen 1701. 12800. avos de doblon: con que al fin deste año, se hallan este quebrado antecedente de doblon, y mas 7. doblones y 61. 160. avos, y deste modo se irà prosiguiendo en los otros años, hasta igualar proximamente con los 150. doblones.

478 Question 57. Pedro cargò 200. libras 10. sueldos y 6. dineros à razon de 5. por 100. preguntase en 5. meses y 8. dias, quanta pension haràn? Para evitar la molestia de los numeros denominados, se pueden reducir todos à la minima especie, y ordenar la regla de tres assi: Si 24000. dineros (que son las 100. libras) en 365. dias (que es un año) ganan 1200. dineros (que son las 5. libras) 48126. dineros (que son las 200. libras 10. sueldos y 6. dineros) en 158. dias (que son los 5. meses, y 8. dias) quanto ganaràn? Siguiendo la regla, que es directa, salen 1041. dineros y 1152. 1825. avos, que son 4. libras 6. sueldos 9. dineros, y mas el sobredicho quebrado.

1	24000 dineros.
2	365 dias.
3	1200 dineros.
4	48126 dineros.
5	158 dias.
6	dineros.

Adviertase, que los meses de ordinario se cuentan por 30. dias cada uno, pero si alguno quiere proceder con todo rigor, puede contar los meses que tienen 31. dias, escriviendolos desde que comienza el censo; como si el censo se cargò al principio de Junio, escriva Junio, y al

1	Junio	30	dias.
2	Julio	31	dias.
3	Agosto	31	dias.
4	Setiemb.	30	dias.
5	Octubre	31	dias.
		8	dias.
		161	dias.

lado

lado 30. dias, despues Julio, y al lado 31. dia, despues Agosto, y al lado 31. &c. y despues los 8. dias como parece en la formula: pues la suma de todo, seràn los dias que corriò el censo.

Adviertase tambien, que basta reducir los terminos homogeneos à una misma especie; pero si ay algun termino, que su homogeneo no es numero denominado, no necessita de la reduccion: y assi porque el termino quarto, y quinto, son numeros denominados, se han de reducir à la ultima especie, y tambien sus homogeneos primero, y segundo, se reduciràn à la misma especie; pero porque el termino tercero no es numero denominado, y el sexto, que es el que falta, no ay necessidad para que sea numero denominado, se podrà dexar el tercer termino sin hacer reduccion, y entonces saldrà el sexto termino sin reduccion de la misma especie que el tercero: y assi serà la regla de tres: Si 24000. dineros en 365. dias, ganan 5. libras 48126. dineros en 158. dias, ganaràn 4. libras y 148977. 438000. avos, que son 6. sueldos 9. dineros y 1152. 1825. avos, que es lo mismo que antes.

479 Question 58. Pedro cargò à censo 1250. libras à 16. dineros por libra; preguntase quanto hacen cada año de pension; Digase: Si una libra dá 16. dineros de pension en un año, 1250. libras, quanta pension haràn? Siguiendo la regla, hacen 20000. dineros, que son 83. libras 6. sueldos y 8. dineros.

De aqui se infiere otro modo mas facil, que es multiplicar las 1250. libras por 16. dineros, ò por 1. sueldo y 4. dineros, lo qual solo es añadir su tercera parte, esto es, saquese el tercio de 1250. que es 416. y añadido à los 1250. son 1666. sueldos y dos tercios, esto es 83. libras 6. sueldos y 8. dineros. La razon desto es, porque en la regla de tres antecedente, se multiplican las 1250. lidras por 16. y el producto se parte por 1. con que queda el mismo producto. Luego no es menester ordenar regla de tres: y como el multiplicar 1250. libras por 16. dineros, ò por 1. sueldo y 4. dineros, es multiplicar por 1. que no aumenta la multiplicacion, y despues añadir el tercio, porque 4. dineros, son el tercio de un sueldo, por esso basta añadir el dicho tercio, y seràn sueldos.

480 Question 59. Pedro quiere hacer 40. libras de renta, y halla quien tome un censo à razon de 16. dineros por libra; preguntase quantas libras cargarà? Conviertanse las 40. libras en dineros, y son 9600. dineros, dividanse por 16. y el quociente 600. seràn las libras, que ha de cargar.

481 Question 60. Pedro cargò 1000. libras à 15. dineros por li-

libra, y quiere ſaber en quanto tiempo las penſiones importaràn las miſmas 1000. libras. Buſqueſe quanto hacen de penſion las 1000. libras en un año à 15. dineros por libra, (479) y ſe hallaràn 1250. ſueldos, dividanſe las 1000. libras por los 1250. ſueldos, y ſe hallaràn 16. años, y en tanto tiempo las penſiones importaràn las 1000. libras: porque ſi ſe multiplican los 16. años por la penſion de un año, ſe producen las miſmas 1000. libras.

482 Queſtion 61. Un Mercader compra en Valencia 3. cargas 2. quintales y 1. arroba de almendras por 30. libras la carga, y por aver algunas cortezas, le quitan à razon de 5. por 100. de tara, preguntaſe quanto vàle limpio? Primeramente ſe ha de quitar la tara, reduciendo las cargas, quitales à arrobas, que es la minima eſpecie, y ſeráu 45. arrobas (76) ſuponiendo que la arroba es de 30. libras. Y porque hacen de taras à 5. por 100. juntenſe los 5. con los 100. y digaſe: Si 105. vienen de 100. de quantos vendràn 45. arrobas? Siguiendo la regla, ſalen 42. arrobas y ſeis ſeptimos de arroba limpias.

Aora para ſaber lo que valen, digaſe por regla de tres: Si 12. arrobas, que es una carga, valen 30. libras, 42. arrobas y ſeis ſeptimos, quanto valdràn? Siguiendo la regla, ſalen 106. libras 6. ſueldos 2. dineros, que es el valor de la mercaderia en limpio.

Queſtiones miſcelaneas.

483 Queſtion 62. Pedro comprò dos tercios de onza de canela, por cinco ſextos de real, quiere ſaber al miſmo reſpeto, què valdrán tres quartos de onza de la miſma canela? Diga por regla de tres: Si dos tercios valen cinco ſextos, los tres quartos, que valdrán? Multiplicando los tres quartos por los cinco ſextos, ſalen 15. 24. avos, y partiendo eſte producto por los dos tercios, hallarà 45. 48. avos de real, por el valor de los tres quartos de onza.

De otro modo ſe puede reſolver eſta queſtion, y ſus ſemejantes, cuyos terminos fueren quebrados, ò enteros, y quebrados, con tal, que los enteros ſe reduzgan à ſus quebrados. Eſcrivanſe ſegun el orden de la regla de tres; eſto es, el primer termino en el lugar primero, el ſegundo en el ſegundo lugar, &c. Y multiplicando ſegun lo ſeñalan las lineas; eſto es, el 3. por el 5. y el producto 15. por el otro 3. ſaldrá el numerador 45. multiplicando tambien el 2. por el 6. y el producto por el 4. ſaldrá el denominador 48. con que los tres

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \text{——} \frac{3}{4} \quad \frac{45}{48}$$

quar-

quartos de onza, valdràn 45. 48. avos de real.

La razon desto es manifiesta, porque resolviendo la regla de tres, se multiplican los tres quartos por los cinco sextos, que es multiplicar numerador por numerador, y denominador por denominador, y el producto 15. 24. avos, se parte por los dos tercios, que es multiplicar el numerador 15. por el denominador 3. y el denominador 24. por el numerador 2. que es lo mismo que hemos hecho.

Quando la regla de tres en quebrados es inversa, se obra como aqui està figurado. Si para ganar 2. reales y tres quartos, son menester dos quintos de dia, para ganar 6. reales y medio, quanto tiempo serà menester? Reducidos los enteros à sus quebrados, escrivanse los terminos conforme el orden de la regla de tres, multiplicando los numeros segun lo señalan las lineas, saldràn 44. 260. avos de dia, que es una hora y 28. minutos. La razon es la misma.

$$\frac{11}{4}\text{——}\frac{2}{5}\times\frac{13}{2}\qquad\frac{44}{260}$$

484 Question 63. Si cinco septimos de libra, valen dos tercios de real, tres quartos de onza, que valdrán? Conviertanse los cinco septimos de libra en quebrado de onza, multiplicando el numerador 5. por las 12. onzas que tiene la libra, y serán 60. septimos de onza. Aora obrese del mismo modo, multiplicando segun las lineas, y saldràn 42. 720. avos de real.

$$\frac{60}{7}\times\frac{2}{3}\text{——}\frac{3}{4}\qquad\frac{42}{720}$$

485 Question 64. Un Platero puso en el crisol 30. onzas de oro de 20. quilates, y despues hallò solas 28. onzas, pidese de quantos quilates son? Digase: Si 28. onzas son 30. los 20. quilates, quantos seràn? Siguiendo la regla, saldràn 21. quilate y tres septimos.

486 Question 65. En un Presidio ay biscocho para 3. meses, dando cada dia 24. onzas à cada Soldado, si ha de durar 4. meses, quantas onzas se daràn? Digase por regla de tres: Si 3. meses dán 24. onzas, 4. meses, quantas daràn? Siguiendo la regla inversa, salen 18. onzas.

487 Question 66. Si 6. hombres en 15. dias han menester 3. barchillas de trigo, y si 8. niños en 20. dias han menester 4. barchillas, preguntase si estuvieran todos juntos, en quanto tiempo consumirian 18. barchillas del mismo trigo? Vease quanto trigo han menester los 8. niños en los 15. dias de los hombres, diciendo: Si

en 20. dias consumen los niños 4. barchillas de trigo; luego en 15. dias consumirán 3. las quales juntas con las 3. barchillas que han menester los hombres, son 6. Aora digase: Si 6. barchillas se consumen en 15. dias, 18. barchillas en quantos dias se consumirán? Siguiendo la regla salen 45. dias, y en tanto tiempo consumirán los 18. barchillas, comiendo todos juntos.

488 Question 67. Pedro comprò una pieza de lienzo por cierta cantidad, la qual vendiò por 200. reales, dando 3. varas por 8. reales, y ganando el tercio de su caudal; preguntase quantas varas tirava la pieza, y à quanto costava cada una? Digase: Si 8. reales vienen de 3. varas, 200. reales de quantas vendràn? Siguiendo la regla salen 75. varas, que tirava la dicha pieza. Aora para saber lo que costò cada vara, quitese el quarto de los 200. reales, (porque gana el tercio se quita el quarto: si ganára el quinto, se quitaria el sexto; y siempre el denominador de lo que se quita, tiene 1. mas que el denominador de lo que gana) y quedarán 150. los quales divididos por las 75. varas que tira la pieza, dàn 2. reales, y tanto costò cada vara.

489 Question 68. Pedro tiene un vaso, en el qual caben 100. libras de aceyte, y le quiere llenar de miel; pregunta quantas libras cabrán? Porque la proporcion del aceyte à la miel es como 108. à 180. como consta de los Proemiales, diga por regla de tres: Si 108. son 180. luego 100. libras de aceyte seràn 166. libras y dos tercios; y con tantas libras de miel se llenarà el dicho vaso.

Lo mismo es, si tiene una bala de hierro, que pesa 6. libras, y quiere saber otra del mismo tamaño de cobre quanto pesará. Diga: Si 945. que es el hierro, dán 1065. que es el cobre; luego las 6. libras de hierro darán 6. libras y 16. 21. avos de cobre.

490 Question 69. Pedro tiene 80. arrobas de aceyte, y otras tantas de vino, las 80. arrobas de aceyte caben en 10. vasos iguales, preguntase las 80. arrobas de vino en quantos vasos tambien iguales cabrán?

Esta question es inversa de la antecedente; porque en aquella se buscava el peso de dos especies, conocida su magnitud; y en esta, conocido el peso, se busca la magnitud. La proporcion, pues, del aceyte al vino, es como 108. à 118. y un octavo, como consta de los Proemiales (siendo la misma magnitud), y pues aora se busca esta, (siendo el peso uno mismo) serà la razon reciproca como 118. y un octavo, à 108. Digase, pues: Si 118. y un octavo, dàn 108. O para quitar quebrados: Si 945. dàn 864. Luego 10. vasos daràn 9. vasos,

y un ſeptimo; y en tantos vaſos iguales à los del aceyte, cabrán las 80. arrobas de vino.

Lo miſmo es, ſi tiene una bala de plomo que peſa 10. libras, y quiere ſaber 10. libras de cera, hechas una bala, què tamaño tienen? Diga por regla de tres: Si 112. y medio de cera, dàn 1361. y un quarto de plomo. Luego 10. libras de plomo darán 121. y la razon de 10. à 121. tendrà el tamaño de la bala de plomo à la de cera: con que partiendo 121. por 10. ſaldrán 12. y un decimo, y tantas veces ſerà mayor la bala de cera, que la de plomo. Eſto ſe entiende en la ſolidèz, pero no en el diametro.

491 Y aſsi, ſi quiere ſaber el diametro, ſe podrá valer de eſta Tabla, ſacada tambien de Merſeno, y ajuſtada à la que dimos en los Proemiales, entre tanto que no tratamos de la raiz cubica.

Oro	100	Marmol	168
Azogue	111	Piedra comun	192
Plomo	118	Criſtal	200
Plata	124	Azufre	202
Cobre	128	Miel	225
Laton	130	Agua	265
Hierro	133	Vino	267
Eſtaño comun	136	Cera	271
Eſtaño puro	137	Aceyte	276
Piedra Imán	156	Harina	347

Como ſi tiene una bala de cobre que peſa 18. onzas, y quiere ſaber otra bola de plata de 18. onzas que diametro tendrà, mida primero con un compàs de puntas bueltas el diametro de la bala de cobre, y dividiendole en las partes iguales que quiſiere, ò tomandolas de un pitipiè, ſupongo que ſean 10. Diga aora: Si 128. que es el cobre, dàn 124. que es la plata: luego 10. partes del diametro de la bala de cobre daràn 9. partes y 11. 16. avos, por el diametro de la bala de plata.

492 Queſtion 70. Un Artifice quiere hacer una bala de plomo, que tenga un palmo Valenciano de diametro: pregunta quantas libras de plomo peſarà? Para reſolver facilmente eſta queſtion, ſe ha de ſuponer, que ſegun concuerdan todos los Artilleros, el diametro de una bala de hierro colado de una libra Valenciana de peſo, es la quinta parte del palmo Valenciano: y por conſiguiente, el diametro de una bala de hierro de 8. libras, es dos quintos del miſmo palmo, y

el

el de una bala de 27. libras, es tres quintos; el de 64. libras, es quatro quintos; y el diametro de una bala de 125. libras, es un palmo Valenciano. Y con estas medidas tienen hechos los calibres los sobredichos Artilleros de Valencia, aunque es verdad, que no he tenido ocasion de comprobar estas medidas; pero passen aora.

Esto supuesto, digase por regla de tres: Si 945. onzas de hierro, dàn 1361. y un quarto de plomo: luego 125. libras, que pesa la bala de hierro de un palmo, daràn 180. libras y 5. 84. avos, por el peso de la bala de plomo de un palmo Valenciano de diametro.

Otras questiones desta materia pondremos en el Libro tercero, porque necessitan de la extraccion de raìz cubica. Entretanto tengase bien en la memoria, que la Tabla que dimos en los Proemiales, supone que todas las especies son de una misma magnitud, pues estàn ajustadas á la capacidad del Congio Romano, ò de un Cubo de medio piè Geometrico. Y assi, si se busca el peso de alguna especie dispuesta en forma de Cubo de medio piè Geometrico, será las onzas Romanas, Griegas, Hebraicas, ò Castellanas, que se señalan en la misma Tabla, y si se desea en otras onzas, formese regla de tres. Pero si ay dos especies de igual tamaño, ò magnitud, (qualquier que sea) y se sabe el peso de la una, se conocerà el peso de la otra por regla de tres, como lo hicimos en la question 68. (489)

Pero en esta Tabla (491) suponiendo un mismo peso en todas las especies, se señalan las partes de los diametros, ò lados homologos, de las mismas especies hechas esferas, ò cuerpos semejantes: Como si se hace una bala de oro de qualquier peso, y su diametro se divide en 100. partes iguales, digo, que otra bala de azogue del mismo peso, tendrà 111. partes de aquellas por diametro, y otra bala de plomo del mismo peso, tendrá 118. partes de las mismas por diametro, y assi de las demàs especies.

493 Question 71. Una pieza de Artilleria ha menester para cargarse 20. libras de polvora comun, que llaman *de Artilleria*, ò de 4. as y as; preguntase de polvora de 5. as y as, ò de 6. as y as, quantas libras seràn menester? Para la perfecta inteligencia de esta pregunta, se ha de suponer, que aunque puede aver diferentes composiciones de polvora, pero las mas usadas son tres. La primera, de 4. partes de salitre, una de azufre, y otra de carbon, que es lo mismo que polvora de 4. as y as; y desta composicion sale polvora comun, ò de Artilleria. La segunda, de 5. partes de salitre, una de azufre, y otra de carbon, que es lo mismo que polvora de 5. as y as, de la qual usan en los arcabuces. La tercera de 6. partes de salitre,

una

una de azufre, y otra de carbon; esto es, de 6. as y as; la qual polvora fina, ò de pistolas.

Estas tres diferentes composiciones se han de entender en caso, que el salitre no estè refinado, y entonces la mayor, ò menor cantidad hace la polvora mas, ò menos valiente; pero si el salitre està mas refinado en una polvora que en otra, menor cantidad de salitre puede hacer mas que la mayor cantidad; y assi, la polvora de quatro as y as, que tenga el salitre muy refinado, será mas fuerte que la de cinco as y as, que tenga el salitre sin refinar; de suerte, que la perfeccion del salitre puede suplir la cantidad, y al contrario: con que en una misma cantidad de salitre, puede salir la polvora mas, ò menos valiente, si está mas, ò menos preparado. Y como la perfeccion del salitre no se puede conocer tan facilmente como la cantidad, tampoco serà facil hacer las sobredichas composiciones, de suerte, que no tengan mas, ò menos perfeccion, que la que avian de dár sus partes.

A mas desto se ha de advertir, que los que tratan la polvora, assientan todos, que la mayor, ò menor eficacia proviene de tener mas, ò menos salitre en cantidad, ò en perfeccion, como queda dicho; y por esso dicen, que la polvora de 6. as y as, es mas valiente que la de 5. as y as, porque tiene mas salitre. De suerte, que segun ellos, toda la eficacia proviene del salitre; pero en mi concepto se engañan totalmente: porque aunque es verdad, que la violencia de la polvora proviene del salitre; pero como en ella ay otros materiales, pueden estos retardar la violencia, segun su menor perfeccion, ò mayor cantidad: y no estár en devida proporcion.

Pero supuesto que en la realidad ay los tres sobredichos generos de polvora, y que toda la eficacia proviene de solo el salitre, entrarè à resolver la question; suponiendo, que en 45. libras de polvora de 4. as y as, ay tanto salitre, como en 42. libras de 5. as y as, y como en 40. libras de 6. as y as, como se verá abaxo. (5 3) Digase, pues: Si 45. libras dán 42. luego 20. libras darán 18. libras y dos tercios de polvora de 5. as y as. Otra vez: Si 45. dán 40. luego 20. darán 17. libras, y siete novenos de polvora de 6. as y as. De suerte, que tanto valor tendrán 20. libras de polvora de 4. as y as, como 18. y dos tercios de 5. as y as; y como 17. y siete novenos de 6. as y as; y con tantas libras se cargarà la dicha pieza. Pero si las 20. libras de polvora son de 5. as y as, y las quiero reducir à polvora de 4. as y as, digo: Si 42. dán 45. luego 20. darán 21. libra y tres septimos de 4. as y as: Si las 20. libras son de 6. as y as, y las quiero reducir à 4. as y as, dirè: Si 40. dán 45. luego 20. darán 22. libras y media.

PAR-

PARTE II.

DE LA REGLA DE COMPAÑIAS.

494 ENseña esta regla dividir un numero en partes proporcionales à otros numeros señalados; como partir este numero 100. en tres partes, que guarden entre sì la razon que 20. 18. 12. las quales son 40. 36. 24. Fundase en la proposicion 12. del lib. 5. de Euclides (318); porque siendo proporcionales 40. 36. 24. à 20. 18. 12. tambien la suma 100. de los antecedentes, que son los primeros numeros, serà proporcional à la suma 50. de los consequentes, que son los segundos; esto es, los todos son proporcionales à sus partes semejantes.

Y aunque ha tomado el nombre de las compañias que suelen hacer los Mercaderes, poniendo cada uno cierta cantidad, y despues repartiendo la ganancia, ò pèrdida á proporcion de la cantidad expuesta; pero tambien se aplica à muchissimas otras cuentas de reparticiones, testamentos, &c. como luego verèmos.

495 Dividase en simple, y compuesta. La regla de compañias simple es aquella en que una cantidad se reparte en partes proporcionales à otras dadas, sin atender à tiempo, ni otras circunstancias; y assi se resuelve la question por regla de tres simple. La compuesta atiende al tiempo, ù otras condiciones, y ha menester regla de tres compuesta, ò alomenos reducida á simple, que es lo ordinario.

COMPAÑIAS SIMPLES.

Precepto.

496 La suma de las cantidades expuestas, ò numeros dados, pongase en primer lugar; la ganancia, pèrdida, &c. pongase en segundo; cada cantidad expuesta, ò numero dado, escrivase en tercer lugar; despues formense tantas reglas de tres, como numeros huviere en el lugar tercero; los numeros que salieren estarán en quarto lugar, y enseñarán lo que se busca. Este orden de Escrivir los terminos se guardará siempre, dexando vacio el lugar del termino que se busca, hasta que se aya hallado. Si la cantidad, ò caudal de

cada uno no es de una especie, se hará la reduccion; de suerte, que en todos sea de una especie.

497 Question 1. Tres Mercaderes hacen compañia; el primero pone 10. doblones; y el segundo 15. y el tercero 20. Acabada la compañia hallaron 90. doblones de ganancia; para saber quanto toca à cada uno, segun la cantidad que puso, sumense los caudales de cada uno, y seràn 45. los quales se escriviràn en primer lugar. En el segundo pongase la ganancia comun 90. Y en el tercero escrivanse los caudales de cada uno.

Cau. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
45.	90.	10.	20.
		15.	30.
		20.	40.

Hecho esto, formense tantas reglas de tres como caudales ay; diciendo: Si 45. ganan 90. luego 10. ganaràn 20. Otra vez: Si 45. ganan 90. luego 15. ganaràn 30. Otra vez: Si 45. ganan 90. luego 20. ganaràn 40. Con que al que puso 10. le tocan 20. al que 15. le corresponden 30. y al que diò 20. le alcanzan 40. como se ve en la formula.

Para no hacer tantas reglas de tres, multipliquense los caudales de cada uno por la ganancia comun, y los productos 900. 1350. 1800. dividanse por la suma de los caudales, los quocientes seràn las ganancias de cada uno.

Demonstracion.

Por lo que se dixo arriba (494) es manifiesta la demonstracion; porque los caudales han de ser proporcionales con las ganancias, segun buena cuenta, y razon; esto es, la misma razon ha de aver de 10. á 20. que de 15. á 30. y de 20. à 40. A mas desto, la suma de los antecedentes, que son los caudales, tiene la misma razon á la suma de las ganancias, que son los consequentes, que cada caudal à su ganancia; y assi, son proporcionales la suma de los caudales à la ganancia comun, como cada caudal à cada ganancia: luego resolviendo las reglas de tres, saldràn las ganancias.

Examen.

Multipliquense cada ganancia por el caudal comun 45. y sumense los productos. Multipliquense tambien cada caudal por la ganancia comun 90. y sumense los productos. Pues si las dos sumas son iguales, estará bien hecha la operacion.

498 Question 2. Tres Mercaderes emplearon 45. doblones, y ganaron el primero 20. doblones; el segundo 30. y el tercero 40. pidese el caudal de cada uno. En esta question están conocidos

el

el primero, ſegundo, y quarto terminos de la regla de tres, y falta el tercero; pues como el producto de los extremos es igual al de los medios (298), multipliquenſe cada ganancia por el caudal comun, ò empleo, y partiendo los productos por la ganancia comun, ſaldràn los caudales de cada uno.

De otro modo: Pongaſe la ganancia comun 90. en primer lugar, el empleo, ò caudal comun 45. en ſegundo; las ganancias particulares 20. 30. 40. en tercero, y haganſe las reglas de tres como antes: Si 90. dàn 45. luego 20. 30. 40. daràn los empleos, ò caudales 10. 15. 20.

499 Queſtion 3. Tres Mercaderes hicieron compañia, el primero puſo 10. doblones, y ganò 20. el ſegundo puſo 15. y ganò al miſmo reſpeto; el tercero puſo 20. y ganò tambien al miſmo reſpeto? Preguntaſe quanta fue la ganancia comun, y quanto ganaron el ſegundo, y tercero? Eſcrivanſe los terminos, ſegun la formula, y, porque en la primera regla de tres falta el ſegundo termino, y el producto de los ex-

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
45.		10.	20.
		15.	
		20.	

tremos es igual al de los medios, multipliquenſe la ganancia 20. por el caudal comun 45. y el producto 900. partaſe por el caudal 10. el quociente 60. ſerá la ganancia comun. O digaſe por regla de tres: Si 10. dán 20. luego 45. darán 90. Las ganancias que faltan ſe hallaràn por la queſtion 1.

500 Queſtion 4. Tres Mercaderes, haciendo compañia, emplearon el primero 10. doblones, y ganò 20. el ſegundo no ſe ſabe lo que empleò, pero ganò 30. doblones; el tercero empleò 20. doblones, y no ſe ſabe lo que ganò; preguntaſe quanto empleò el ſegundo, y ganò el tercero? Para reſponder á eſta queſtion, ſe ha de ſuponer lo que ſe demonſ-

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
		10.	20.
			30.
		20.	

trò en la propoſicion 11. (319) que las diferencias de los antecedentes ſon proporcionales á los antecedentes, y conſequentes. Pues tomeſe la diferencia de las ganancias conocidas, que es 10. y digaſe por regla de tres: Si la ganancia 20. da 10. de diferencia, el caudal

10. què diferencia darà del caudal, cuya ganancia es 30. y figuiendo la regla falen 5. los quales juntos con el caudal 10. (y efto porque la ganancia 30. es mayor que la ganancia 20. que correfponde al caudal 10. que fi fuera menor, fe avia de reftar la diferencia 5. del caudal 10.) darà el caudal 15. del fegundo.

Con efto yà eftàn conocidos los tres caudales, y por configuiente la fuma dellos, ò caudal comun. La ganancia comun fe conocerà por la queftion 3. y por la primera quedarà conocida la ganancia del tercer Mercader.

501 Queftion 5. Un Mercader deve 10000. reales á quatro acrehedores: al primero deve 200. al fegundo 8000. el tercero 1050. al quarto 750. folos tiene 9000. reales para pagar; preguntafe quantos reales cobrarà proporcionalmente cada acrehedor? En efta queftion la paga es menor que la deuda, y afsi ay pèrdida; pues pongafe la deuda en primer lugar: la paga ò pèrdida comun en fegundo; las deudas particulares en tercero; y formando tantas reglas de tres, como deudas ay en la queftion, fegun fe hizo en las ganancias en la queftion 1. faldràn las pagas particulares, como fe vè en el exemplo.

Deuda.	Paga com.	Deudas.	Pagas.
10000.	9000.	200.	180.
		8000.	7200.
		1050.	945.
		750.	675.

De fuerte, que el modo de obrar en eftas queftiones de compañias, el mifmo es en la ganancia, que en la pèrdida.

502 Queftion 6. Dos Mercaderes ganaron en una compañia 1000. reales; al primero, entre caudal, y ganancia le tocaron en la reparticion 1500. reales; y al fegundo 1200. pidefe quantos reales pufo cada uno. Difpongafe la formula como antes, y fumando los 1500. y 1200.

Cau. com.	Gan. com.	Caudales.	Gan. y caudales.
1700.	1000.	$944 \frac{4}{7}$	1500.
		$755 \frac{5}{9}$	1200.
			2700.

reales, feràn 2700. de los quales reftada la ganancia comun 1000. quedan 1700. y tanto fue el caudal comun de los dos; con que tenemos ya el primer termino. Y pues en los 1500. y 1200. reales eftà comprehendido el caudal, y ganancia, fumefe el caudal comun 1700. con la ganancia comun 1000. y feràn 2700. (que es la mifma fuma

de

de las dos ganancias, y caudales). Aora digase por regla de tres: Si 2700. dán el caudal comun 1700. los 1500. qué caudal darán? Siguiendo la regla, salen 944. reales, y quatro novenos, y tanto puso el primero: Digase otra vez: Si 2700. dàn 1700. luego 1200. daràn 755. y cinco novenos, y en tanto contribuyò el segundo.

503 Question 7. Tres Mercaderes hicieron compañia con pacto, que el primero tuviesse de la ganancia á razon de 10. por 100. El segundo à razon de 12. por 100. Y el tercero à razon de 18. por 100. Ganaron 3600. reales, pidese quanto ha de tener cada uno? Para responder à esta question, y sus semejantes, se ha de suponer, que los 10. 12. y 18. que han de ganar por 100. son los caudales de cada uno, y que la suma 40.

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
40.	3600.	10.	900.
		12.	1080.
		18.	1620.

es el caudal comun. Dispuestos, pues, los terminos como enseña la formula, es la misma question que la primera, y assi resolviendola segun lo que alli se dixo, saldrán las ganancias 900. 1080. y 1620.

504 Question 8. Dos Mercaderes hicieron compañia, el uno puso 100. doblones, el otro solo puso el trabajo de la negociacion, el qual fue estimado por 80. doblones; despues de acabada la compañia, hallaron 380. doblones entre caudal, y ganancia; pidese quanto toca à cada uno. Sumense los caudales de cada uno 100. y 80. (porque el

Caud. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
180.	280.	100.	155. $\frac{5}{9}$.
		80.	124. $\frac{4}{9}$.

trabajo se reputa por caudal) y serà el caudal comun 180. Aora restense los 100. doblones, que puso el primero de los 380. de ganancia, y caudal, y quedaràn 280. por ganancia comun. Con esto estàn dispuestos los terminos como parece en la formula, y la question es la misma que la primera, por la qual se hallarán las ganancias 155. y cinco novenos, para el que puso los 100. doblones, y 124. y quatro novenos, para el que solo contribuyò con su trabajo.

De suerte, que en este genero de compañias en que el uno pone dinero, y el otro trabajo; el que pone dinero, ha de sacar su caudal, y la ganancia se ha de repartir à proporcion del caudal del uno, y de la estimacion del trabajo del otro; porque lo que se pone en estas

compañias es dinero, y trabajo, pues assi como el uno queda con su industria, y habilidad para emprender otra compañia; tambien el otro ha de quedar con su dinero para poder hacer otro contrato.

505 Question 9. Dos Mercaderes hicieron compañia, el primero puso 100. doblones, y el segundo 20. y à mas el trabajo, y agencias, que valen 80. doblones; acabada la compañia, se hallaron 40. doblones de pèrdida, preguntase quanto ha de pagar cada uno? En esta question la pèrdida, se ha de pagar à proporcion del caudal de cada uno, diciendo por regla de tres: Si 120. dán 40. luego 100. daràn

Caud. com.	Perd. com.	Caudales.	Pèrdidas.
120.	40.	100.	33. $\frac{1}{3}$
		20.	6. $\frac{2}{3}$

33. y un tercio, otra vez: Si 120 dàn 40. luego 20. daràn 6. y dos tercios, y no se ha de atender al trabajo, porque aunque es verdad, que los 20. doblones con el trabajo, valen tanto como los 100. doblones, que puso el primero, y que si huviera ganancia, avia de partirse igualmente; pero como pierde por razon de los trabajos, supuesto que si en la compañia huviera ganancia, ganaria por ellos, si pagàra atendiendo á los trabajos, seria doblada la paga; la una por lo que pierde, y la otra por lo que paga.

506 Question 10. Quatro Mercaderes conciertan 10000. libras de azucar por 9000. reales; el primero toma 4000. libras, el segundo 2000. el tercero 3000. y el quarto las 1000. restantes; pidese quanto ha de pagar cada uno? Digáse por regla de tres: Si 10000. libras valen 9000. lugo las 4000. libras del primero, valdràn 3600. reales; las 2000. del segundo, valdràn 1800. reales; las 3000. del tercero, valdrán 2700. reales; y las 1000. del quarto valdrán 900. reales.

507 Question 11. Dos hicieron compañia, y en ella ganaron 200. reales, de los quales al primero le tocaron 50. el segundo expuso doblado caudal que el primero, y mas 8. reales; preguntase quanto caudal expuso cada uno? Supuesto que el primero ha ganado 50. reales, es cierto, que el segundo aviendo expuesto doblado, le tocaràn 100. reales, y por los 8. reales que puso mas, le pertenecerá el residuo de 150. reales, que ganan entre primero, y segundo, hasta 200. reales de toda la ganancia, que es 50. reales. Digase, pues, si 50. reales, que es el dicho residuo, provienen de 8. reales, que expuso mas; luego 50. reales que ganò el primero, provendràn de 8. reales, y tanto fue el caudal del primero, los quales doblado, y añadiendo 8. seràn 24. reales por el caudal del segundo.

Ques-

508 Question 12. Dos hicieron compañia, exponiendo el primero 10. doblones, y el segundo 30. al fin ganaron 160. doblones, pero admitieron à un factor, ò procurador, dandole de la ganancia á razon de 10. por 100. pidese quanto toca à cada uno? Lo primero se ha de saber lo que toca al factor, diciendo: Si 100. dàn 10. luego 160. doblones, daràn 16. doblones, y tanto ha de tener el dicho factor: Aora restense los 16. doblones de los 160. y quedaràn 144. que se han de repartir entre los dos à razon de su caudal, como se hizo en la question 1.

509 Question 13. Quatro en compañia, han ganado 340. doblones, los quales de tal suerte se los han repartido entre sì, que quantas veces el segundo ha tenido 5. otras tantas el tercero aya de tener 9. y quantas el tercero ha tenido 7. otras tantas el quarto aya de tener 11. Y finalmente, quantas veces el quarto ha tenido 9. otras tantas el primero aya de tener 13. El caudal del primero, fue 286. doblones, preguntase quanto es el caudal, y ganancia de los otros.

En esta question se expressan las proporciones de las ganancias, y por consiguiente de los caudales, pues son proporcionales: Y por que el primero tantas veces ha de tener 13. quantas el quarto 9. serà la razon de los caudales del primero, y quarto, como 13. à 9. Pues digase por regla de tres: Si 13. dàn 286. doblones que puso el primero, luego 9. darán 198. doblones por el caudal del quarto: Donde se vè, que tantas veces se contiene el 9. en 198. quantas el 13. en 286.

Y porque el quarto ha de tener tantas veces 11. quantas el tercero 7. Pues si 11. dán 7. luego 198. daràn 126. doblones por el caudal del tercero. Y tantas veces entra el 7. en 126. quantas el 11. en 198.

Otra vez; porque el tercero deve tener tantas veces 9. quantas el segundo 5. Serà la razon de 126. doblones caudal del tercero, al caudal del segundo, como 9. à 5. Y assi si 9. dán 5. luego 126. darán 70. doblones por el caudal del segundo; y tantas veces entra el 5. en 70. quantas el 9. en 126.

Hecho esto, yà estàn conocidos los caudales de cada uno; aora para saber las ganancias, se dispondrá la formula como parece, y se hallaràn por la question 1.

Cau. com.	Gan. com.	Caudales.	Ganancias.
680.	340.	286.	143.
		70.	35.
		126.	63.
		198.	99.
		680.	

COMPAÑIAS COMPUESTAS.

Preceptos.

510 Quando en las Compañias ay tiempo, se multiplicarà por los caudales de cada uno, y en los productos se formarà la regla, como en las Compañias Simples, con tal, que el tiempo sea en todos los caudales de una especie; esto es, ò dias, meses, ò año; pero si en un caudal fueren meses, y en otro años, ò dias, se reducirà à una misma especie, y se obrarà como antes. Quando la Compañia es para tiempo igual, no ay que cuydar del tiempo, porque siendo igual, no muda la proporcion.

511 Si alguno saca su caudal antes de cumplirse el tiempo; se contará solamente el tiempo que estuvo. Si saca parte del caudal, se han de hacer por èl dos reglas de tres, la primera, por todo el caudal con el tiempo que estuvo; la segunda, por la parte del caudal, que quedò lo restante del tiempo.

512 Question 14. Dos Mercaderes en compañia, han ganado 250. doblones; el primero expuso 10. doblones, por 4. meses; el segundo diò 20. doblones por 3. meses; preguntasse quanto toca á cada uno de la ganancia, atendiendo al caudal, y al tiempo? Multipliquense los caudales por los meses; esto es, 10. por 4. y 20. por 3. y en los productos 40. y 60. se dispondrá la formula presente, la qual es la misma que en las Compañias Simples. Digase pues:

Cau. y tiemp. com.	Gan. com.	Cau. y tiemp.	Ganancias.
100.	250.	40.	100.
		60.	150.
		100.	

Si 100. suma de los productos de los caudales, y tiempo, dàn 250. ganancia comun, luego 40. daràn 100. y 60. daràn 150.

Demonstracion.

Solamente demonstrarè, que el caudal de cada un compañero, se ha de multiplicar por el tiempo que le acompaña; pues lo restante de la regla, yà queda demonstrado en la question primera. Digo pues, que se ha de hacer dicha multiplicacion del caudal por el tiempo, para que los caudales estén reducidos à tiempo igual, porque el que expone 10. doblones por 4. meses, hace lo mismo que dar quatro veces 10. doblones;

que

que son 40. por un mes, y el que pone 20. doblones por 3. meses, hace lo mismo que si pusiera tres veces 20. doblones, que son 60. por un mes, pues tanto ganan 10. doblones en 4. meses, quanto 40. en un mes; y tanto 20. doblones en 3. meses, quanto 60. en un mes, con que lo mismo es exponer 10. doblones por 4. meses, que 40. doblones; y lo mismo 20. doblones por 3. meses que 60. doblones, todos por un mes; luego quitando el mes, por ser numero igual en las dos partes de la regla de tres (404) quedaràn solos los 40. y 60. doblones; luego multiplicando el caudal por su tiempo, està buena la regla.

Examen.

El examen mas seguro, es probar las multiplicaciones del caudal, y tiempo por el partir; y despues examinar la operacion de la compañia, conforme se dixo en la question primera; porque multiplicando los caudales por los tiempos, la Compañia Compuesta, se reduce à Simple.

513 Question 15. Aviendo hecho compañia tres Mercaderes, ganaron 1000. reales; al primero le tocaron 500. reales de ganancia por 200. que puso por 8. meses, y 5. dias; al segundo le cupieron 300. reales de ganancia por 150. que expuso por cierto tiempo; y al tercero le tocaron 200. reales por cierto caudal que diò por 4. meses; preguntase quanto fue el tiempo del segundo, y caudal del tercero?

Para responder á esta question, se reducirá el tiempo à dias, que es la menor especie, y se dirà por regla de tres compuesta: Si 200. reales que puso el primero, ganan 500. reales en 245. dias; luego 150. reales que puso el segundo para ganar 300. reales, avrán menester 196. dias (contiene inversion en el primero, y quarto termino) con que el tiempo del segundo, es 196. dias, que son 6. meses, y 16. dias.

Otra vez: Si 200. reales en 245. dias, ganan 500. quantos reales en 120. dias, ganaràn 200. del tercero; en esta proporcion falta el termino quarto, el qual es 163. reales, y un tercio, como se enseñò en los exemplos del modo facil para resolver qualquier regla de tres compuesta (414) con que el segundo compañero puso los 150. reales por 196. dias, y el segundo expuso 163. reales, y un tercio.

De otro modo, multipliquense los 200. reales que contribuyò el primero por 245. dias que estuvieron en la compañia, y será el producto 49000. Digase aora por regla de tres simple: Si 500. rea-

reales de ganancia del primero, vienen de 49000. los 300. reales de ganancia, del ſegundo, vendràn de 29400. que es el producto del caudal, y tiempo del ſegundo: y porque el caudal ſe ſabe que es 150. reales, dividaſe el numero 29400. por 150. y ſaldràn 196. dias.

Otra vez: Si 500. reales de ganancia del primero, dàn 49000. luego los 200. reales de ganancia del tercero, daràn 19600. caudal, y tiempo, y pues el tiempo del tercero es conocido, que es 4. meſes, ò 120. dias, dividaſe el numero 19600. por el tiempo 120. y ſaldrà el caudal 163. reales, y un tercio, del tercero.

514 Queſtion 16. Dos Mercaderes hicieron compañia por 2. años; el primero puſo 1000. reales, pero deſpues de 10. meſes, ſacò 100. reales, y al fin de los 20. meſes, bolviò à poner 500. reales; el ſegundo puſo 3000. reales, al fin de 15. meſes, ſacò 2000. reales, ganaron en la compañia 2000. reales, preguntaſe quanto toca á cada uno?

Para reſponder á eſta queſtion, es neceſſario ſaber el tiempo que cada uno tuvo ſu caudal. Y pues el primero en el principio de la compañia, puſo 1000. reales, y los tuvo todos 10. meſes, multipliquenſe los 1000. por 10. y ſeràn 10000. Y porque deſpues de aver paſſado aquellos 10. meſes, quitò 100. reales, haſta los 20. meſes, es manifieſto, que tuvo en la compañia 900. reales por otros 10. meſes, los quales multiplicados, ſon 9000. reales; ultimamente, porque al fin de los 20. meſes, añadiò 500. reales, es cierto que por 4. meſes (que ay de 20. haſta 24. que ſon los 2. años que avia de durar la compañia) tuvo 1400. reales (que es la ſuma de 500. reales, que añadió, y los 900. que tenia) pues multipliquenſe los 1400. por 4. meſes, y ſeràn 5600. Sumenſe aora los tres productos 10000. 90000. y 5600. y ferá todo 24600.

El ſegundo puſo al principio 3000. reales, y al fin de 15. meſes, ſacò 2000. luego todos los 15. meſes tuvo en la compañia 3000. reales, pues multipliquenſe por los 15. meſes, y ſeràn

Cau. y tiemp. com.	Gan. com.	Cau. y tiemp.	Ganancias.
78600.	2000.	24600.	
		54000.	625. $\frac{125}{131}$.
		78600.	1374. $\frac{6}{131}$.

45000. Y pues al fin de los 15. meſes, ſacò 200. reales, tuvo 1000. reales por 9. meſes que vàn de 15. à 24. y aſsi multipliquenſe 1000. por 9.

y

y ſeràn 9000. Sumenſe los productos 45000. y 9000. y ſon 54000.

Diſpongaſe aora la formula en las ſumas de los productos de los dos, como ſe vè, y reſolviendola por la queſtion primera, ſaldrá la ganancia de cada uno.

515 Queſtion 17. Tres Mercaderes en comun negociacion ganaron 190. doblones, los quales repartieron entre ſi de tal modo, que la parte del primero, fue treſdoblada de la parte del ſegundo, y quatro doblada de la parte del tercero. El primero puſo en la compañia 80. doblones por 12. meſes. El ſegundo expuſo cierto dinero por 8. meſes. Y el tercero contribuyò tambien con cierto caudal por 4. meſes; preguntaſe quanta cantidad recibiò cada uno de los tres de la ganancia comun; y quanto dinero puſieron el ſegundo, y tercero?

Multipliquenſe los 80. doblones que expuſo el primero por los 12. meſes que los tuvo en la negociacion, y ſon 960. cuyo tercio 320. es el producto del caudal, y tiempo del ſegundo; porque como la ganancia del primero es treſdoblada de la del ſegundo; y las ganancias ſon proporcionales con el producto del caudal, y tiempo; luego tomando el tercio del producto del caudal, y tiempo del primero, ſerà el producto del caudal, y tiempo del ſegundo, y aſsi partiendo los 320. por el tiempo del ſegundo, que ſon 8. meſes, ſaldrà el caudal 40. doblones.

Aſsi miſmo el quarto de los 960. que es 240. ſerà el producto del caudal, y tiempo del tercero; luego dividiendo los 240. por el tiempo del tercero 4. meſes, ſaldrà el caudal 60. doblones que expuſo del tercero. Con que el primero puſo 80. doblones por 12. meſes: El ſegundo 40. doblones por 8. meſes: Y el tercero 60. doblones por 4. Cuyas ganancias eſtarán conocidas por la queſtion 14. las quales ſon 120. doblones del primero, 40. del ſegundo, y 30. del tercero.

516 Queſtion 18. Un Mercader encomendò à un Paſtor 120. ovejas con pacto, que ponga por ſu parte 20. y que guardandolas 5. años, ſe partan caudal, y ganancia por mitad, eſto concertado ſucediò, que no las guardò ſino 3. años, y medio, al fin de los quales ſe hallaron 400. cabezas entre caudal, y ganancia; pideſe quantas ha de aver cada uno?

Reſtenſe primeramente las 140. ovejas que los dos puſieron, de las 400. y quedaràn 260. de ganancia, cuya mitad es 130. y tantas ha de tener cada uno; porque de la ganancia en todo tiempo pertene-

nece à cada uno la mitad. Aora para saber las ovejas que ha de tener el Pastor de las 120. del Mercader, tomando la mitad dellas, que son 60. digase: Si 5. años, dàn 60. ovejas; luego 3. años, y medio, daràn 42. que tocan al Pastor.

Para saber quantas ovejas tocan al Mercader de las 20. que puso el Pastor, tomando la mitad, que son 10. digase: Si 5. años, dàn 10. luego 3. años, y medio daràn 7. y tantas ovejas ha de aver el Mercader, y las restantes 13. son del Pastor; sumense estas 13. con las 42. que ha de aver del Mercader, y con las 130 de la mitad de la ganania, y son 185. tàntas pues tocan al Pastor, y las restantes 215. al Mercader.

Reparticiones.

517 Hasta aqui hemos tratado de las reglas de Compañias, fundadas en la proposicion 12. del libro 5. de Euc. como queda advertido arriba (494). Esto es, quando un numero se ha de repartir en partes proporcionales à otras dadas; como si este numero 100. se ha de dividir en dos partes proporcionales à 6. y 4. seràn 60. y 40. de suerte, que la misma razon ay de 6. à 4. que de 60. á 40.

Aora pues trataremos de la division de un numero en partes proporcionales al todo; como si este numero 100. se ha de dividir en dos partes, que la una sea un quarto, y la otra tres quartos, del mismo 100. las quales son 25. y 75. donde la misma razon ay del todo 100. à su parte 25. y 75. que del todo quatro quartos (que es la suma de los quebrados un quarto, y tres quartos) á las suyas un quarto, y tres quartos.

518 La suma destas partes puede ser mayor, igual, ò menor que el todo, que es lo mismo que sumando los quebrados, salir el numerador de la suma mayor, igual, ò menor que el denominador, el qual representa al todo; como si 100. reales se han de repartir entre tres, de suerte, que el uno tenga la mitad, que son 50. el segundo tres quartos., que son 75. y el tercero tres quintos, que son 60. cierto està que las partes 50. 75. y 60. sumadas, hacen 180. que es numero mayor que el todo 100.

Asi mismo, si los mismos 100. reales, se han de repartir entre dos, de suerte, que el uno tenga el decimo, que son 10. y el otro el quinto, que son 20. las partes 10. y 20. sumadas, hacen 30. numero menor, que el todo divido 100. Pero si los 100. reales, se han de repartir entre dos, de modo, que el uno tenga los tres quartos, que son 75. y el otro un quarto, que son

25. entonces las partes 75. y 25. juntas hacen juſtamente el todo 100.

Quando las partes juſtas igualen al todo dividido, toca á cada uno en el repartimiento la parte miſma que ſe nombra; eſto es, el tercio, quarto, &c. Pero quando todas juntas no igualan al todo, entonces à cada uno no pertenece la parte expreſſada, ſino otra proporcional; y aſsi, ſi 12. reales ſe han de repartir entre tres, de ſuerte que el primero tenga la mitad, el ſegundo el tercio, y el tercero el quarto, no dirèmos que al primero tocan 6. reales, al ſegundo 4. y al tercero 3. porque 6. 4. y 3. ſon 13. ſino que al primero toca á razon de la mitad, que ſon 5. y 7. 13. avos, al ſegundo á razon del tercio, que ſon 3. y 9. 13. avos; y al tercero à razon del quarto que ſon 2. y 10. 13. avos. De modo, que ſumadas eſtas partes, hacen juſtamente 12. Lo miſmo digo quando la ſuma de las partes es menor que el todo.

519 Queſtion 19. Entre tres Mercaderes ſe han de repartir 1050. reales, con eſta condicion, que el primero tenga à razon de los dos tercios; el ſegundo à razon de la mitad; el tercero à razon del tercio; preguntaſe quanto toca à cada uno. Reduzganſe los quebrados à un comun denominador (154) y ſerán $\frac{12}{18}$, $\frac{9}{18}$, $\frac{6}{18}$; cuya ſuma es $\frac{27}{18}$. y porque el numerador es mayor que el denominador, en la reparticion no ſaldrán las miſmas partes ſeñaladas, ſino menores à proporcion, como ſe dixo en el parrafo antecedente.

Pues digaſe por regla de tres: Si la ſuma de los numeradores 27. dà 1050. reales; luego el numerador 12. darà 466. reales, y dos tercios para el primero. Otra vez: Si 27. dan 1050. luego el ſegundo numerador 9. darà 350. reales para el ſegundo. Otra vez: Si 27. dan 1050. reales; luego el tercer numerador 6. darà 233. reales, y un tercio para el tercero.

520 Queſtion 20. Entre quatro ſe han de repartir 396. reales, de modo, que el primero aya de tener la mitad, y mas 10. reales; el ſegundo tres quintos menos 20. reales; el tercero un tercio, y mas 8. reales el quarto un quarto menos 6. reales; preguntaſe quanto ha de aver cada uno. En eſta, y ſemejantes queſtiones, reſtenſe de la ſuma los numeros, que ſe han de tomar mas, y añadanſe los numeros que ſe han de tomar menos; y aſsi, porque el primero ha de tomar 10. mas, y el tercero 8. reſtenſe 18. de los 396. y quedan 378. Añadanſe à los 378. los 20. y 6. que toman menos el ſegundo, y quarto, y ſon 404.

Eſto

Esto supuesto, reduzganse los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, à un comun denominador, y seràn $\frac{60}{120}$ $\frac{72}{120}$ $\frac{40}{120}$, $\frac{30}{120}$ La suma de numeradores es 202. Digase aora por reglas de tres, comun en las compañias: Si la suma de los numeradores 202. dá 404. (que es el numero nacido de lo añadido, y quitado); luego cada numerador 60. 72. 40. y 30. darán 120. 144. 80. y 60. y tanto pertenece á cada uno.

202	404	60	120
		72	144
		40	80
		30	60

521 Question 21. Un Navio que llevava 26. personas apressó à otro, en el qual fueron hallados 7429. doblones, los quales por concierto se han de repartir en esta forma: que el Patron ha de aver dos porciones, ò partes y media; el Piloto, dos partes; el Escrivano, una parte, y dos tercios; los Marineros, que son 20. cada uno ha de tener una parte; los muchachos, que son tres, ha de aver cada uno un quarto; preguntase quanto pertenece à cada uno?

Porque los quebrados expressados en la reparticion son $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$; multipliquense los denominadores, y el producto 24. serà un numero, que suponiendo por una porcion; tendrà mitad, tercio, y quarto. Pues porque el Patron ha de tener dos partes, y media, tomese el 24. otras tantas veces, y seràn 60. El Piloto tiene dos partes; pues doblese el 24. y serán 48. El Escrivano tiene una parte, y dos tercios; pues juntando los dos tercios del 24. con el mismo 24. seràn 40. A cada marinero pertenece una parte; pues por ser 20. multipliquense el 24. por 20. y serán 480. Ultimamente, cada muchacho tiene un quarto; y por ser tres, tomese tres veces el quarto de 24. y seràn 18. De suerte, que suponiendo que el 24. es una porcion, pertenecen à cada uno la cantidad señalada en la presente tabla; pero como en la verdad el 24. no es la porcion verdadera, se formarà una regla de compañia, deste modo.

Patron.	60
Piloto.	48
Escrivano.	40
20. Marineros.	480
3. Muchachos.	18
	646

Sumense las cantidades, que por la suposicion tocan à cada uno, y serán 646. Digase aora por regla de tres: Si 646. dan 7429. doblones; luego 60. darán 690. doblones para el Patron; los 48. darán 552. doblones al Piloto; los 40. daràn 460. al Escrivano; los 480. daràn 5520. doblones por los marineros; lo qual es por ser 20. dividanse los 5520. por 20. y tocarà à cada uno 276. doblones; los 18. daràn 207. à los muchachos, que por ser tres se dividiràn en tres

tres partes, y caberà à cada uno 69. doblones. Con este artificio se resolveràn otras questiones de reparticiones, particularmente de las que llaman Eclesiasticas, y de Guerra.

Arrendamientos.

522 Los arrendamientos de Señorios, derechos, diezmos, &c. se suelen hacer por algunos años, sin poner dinero de presente, solo se dan fiadores, ò abonos; y repartiendo la cantidad en que se concertaron, ò trataron por los años del arrendamiento, se paga al fin de cada año una parte, ò de medio à medio año, ò por tercias, segun fuere el concierto; despues à lo ultimo se reparte la pèrdida, ò ganancia (sacados todos los gastos) entre los que arrendaron, á proporcion de la parte que tuvieron en dicho arrendamiento.

Quando la ganancia, ò pèrdida se ha de repartir igualmente, no ay dificultad, ni es menester otra regla mas que la del partir, dividiendola por el numero de los compañeros, que estuvieron en el arrendamiento; pero quando la reparticion ha de ser desigual, se guardarà el estilo de las reparticiones, ò compañias.

523 Question 22. Entre dos arrendaron ciertos diezmos por 10000. reales; huvo 1000. reales de gasto, y al fin del arrendamiento hallaron 10250. reales. El primero tuvo en el arrendamiento los dos tercios de la pèrdida, ò ganancia, y el segundo un quarto; preguntase quanto toca à cada uno?

Lo primero, para saber si ay ganancia, ò pèrdida, resten los 1000. reales de gastos de los 10250. reales que se hallaron al fin del arrendamiento, y quedaràn 9250. reales, los quales por ser menos que los 10000. en que fue concertado el arrendamiento, ay pèrdida de 750. reales Aora reduzganse los quebrados dos tercios, y un quarto, que representan las partes, á un comun denominador, y seràn 8. 12. avos, y 3. 12. avos. La suma de los numeradores es 11. Digase, pues, por regla de tres: Si 11. dàn 750. reales de pèrdida; luego el numerador 8. dará 545. reales, y 5. 11. avos que ha de pagar el primero. Otra vez: Si 11. dan 750. luego 3. daràn 204. reales, y 6. 11. avos, que ha de pagar el segundo.

524 Question 23. Tres arrendaron los frutos de una Señoria por cierto tiempo, y cantidad: el primero quiere de la ganancia, ò pèrdida à razon de 8. por ciento; el segundo á razon de 10. por ciento; el tercero à razon de 12. por ciento; ganaron mil reales, preguntase quanto toca à cada uno. Sumense los tres numeros 8. 10. y 12. Digase aora: Si 30. ganan 1000. quanto ganarán 8. quanto 10.

y

y quanto 12. Siguiendo la regla salen 266. reales, y dos tercios por el primero; 333. reales, y un tercio por el segundo; y 400. reales por el tercero.

525 Question 24. Entre quatro arrendaron ciertos diezmos. El primero quiere de 16. partes las 7. á. las quales llaman *Sesenas*. El segundo quiere 4. sesenas. El tercero quiere 4. sesenas, y media. El quarto quiere la media restante; ganaron 180. doblones, preguntase quanto tendrà cada uno. Digase por regla de tres: Si 16. ganan 180. doblones, què ganarán 7. què 4. què 4. y medio, y què medio? Siguiendo las reglas, salen al primero 78. doblones, y tres quartos; al segundo 45. doblones; al tercero 50. doblones, y cinco octavos; al quarto, 5. y cinco octavos.

Testamentos.

Las questiones de testamentos que suelen poner los Autores, casi en nada se diferencian de las reparticiones; y aunque las mas son ficciones, pues raro es el testamento ordenado segun ellas dicen, y en particular en este Reyno de Valencia; pero esso no obstante, para que nada falte en esta Arithmetica, trasladarè algunas de ellas.

526 Question 26. Pedro dexò en su testamento 10000. reales, los quales repartiò entre tres hijos; al primero dexò dos tercios; el segundo la metad; y al tercero dos quintos; preguntase quanto toca á cada uno? Reduzganse los quebrados á un comun denominador, y serán 20. 30. avos, 15. 30. avos, 12. 30. avos, cuyos numeradores sumados son 47. Digase aora por regla de tres: Si 47. dán 10000. reales, quanto darán los numeradores 20. 15. 12. Siguiendo la regla salen al primero 4255. reales, y 15. 47. avos; al segundo 3191. reales, y 23. 47. avos; y al tercero 2553. reales, y 9. 47. avos.

527 Question 27. Pedro dexò en su testamento 10000. reales, que repartiò entre dos hijos, una hija en esta forma: que al hijo mayor le dexa el tercio, y mas 100. reales; al hijo menor dos quintos; y à la hija el quarto, y mas 200. reales; pero antes de la reparticion se han de sacar 300. reales por el bien del alma; preguntase quanto toca à cada uno?

Restense primeramente de la hacienda los 300. reales del bien del alma, los 100. reales en que està mejorado el hijo mayor, y los 200. reales de la hija, y quedaràn 9400. reales. Hecho esto reduzganse los quebrados à un denominador, y serán 20. 60. avos, 24. 60. avos, 15. 60. avos: cuyos numeradores sumados son 59. Digase aora

por

por reglas de tres: Si 59. dan 9400. quanto darán los numeradores 20. 24. y 15. Siguiendo las reglas salen al hijo mayor 3186. reales, y 26. 59. avos; al menor 3823. reales, y 43. 59. avos; y à la hija 2389. reales, y 49. 59. avos. Añadiendo, pues, 100. reales á la parte del hijo mayor, serán 3286. reales, y 26. 59. avos; y añadiendo los 200. reales à la parte de la hija serán 2589. reales, y 49. 59. avos.

528 Question 28. Pedro teniendo ciertos hijos, dexò en su testamento cierta hacienda para repartir en partes iguales, en esta forma: que el primer hijo tuviesse 100. reales, y mas la sexta parte de lo restante de la hacienda; el segundo tuviesse 200. reales, y mas la sexta parte de lo restante; y assi prosiguiendo en dar á los demás hijos 100. reales mas à cada uno, y la sexta parte de lo que quedàre; y lo restante sea para el ultimo hijo; preguntase quantos son los hijos, quanta la hacienda, y quanto toca à cada uno.

Restese 1. de 6. porque dice la sexta parte, y quedaràn 5. y tantos hijos tenia. De suerte, que siempre que el numerador del quebrado es 1. como aqui, que el quebrado es $\frac{1}{6}$, supuesto que dice la sexta parte, se ha de restar el numerador del denominador. Aora multiplicando los 100. reales, que ha de tener el primer hijo, por el numero de los hijos 5. saldrán 500. reales, y tanto ha de tener cada hijo; y porque son 5. multiplicando 500. por 5. salen 2500. reales, y tanto era su hacienda.

529 Question 29. Pedro dexando su muger en cinta hizo testamento de 4200. reales, de suerte, que si paria hijo fuessen los dos tercios de la hacienda para el hijo, y el un tercio para la madre; pero si paria hija, los dos tercios fuessen de la madre, y el un tercio de la hija. Sucediò que pariò hijo, è hija, pregúntase como se ha de repartir la dicha hacienda?

Digo, que como consta de la ley: *Si ita scriptum, ff. de liberis, & posth.* el intento del testador fue dexar doblado á la madre que á la hija, y doblado al hijo que à la madre, assi busquense tres numeros, que continuamente uno sea doblado del otro, como son 1. 2. 4. cuya suma es 7. Dividase, pues, toda la hacienda en 7. partes, y la suma 600. serà la parte de la hija: su duplo 1200. serà la parte que pertenece à la madre; y el duplo desta parte 2400. será la herencia del hijo, segun la voluntad del testador. Lo mismo se puede hacer por regla de compañia, diciendo: Si 7. dan 4200. luego 1. 2. y 4. daràn 600. 1200. y 2400.

De suerte, que el Consulto Juliano en la ley citada quiere, que la madre sea como medida de las partes de la herencia del hijo, é

hija, y que la hacienda se divida en 7. partes iguales, de las quales se dèn una á la hija, dos á la madre, y quatro al hijo; porque la parte de la madre sea doblada de la de la hija, y la del hijo doblada de la de la madre; porque en caso de nacer hija, esta tenia una parte, y la madre dos; y en caso de nacer hijo tenia dos partes, y la madre una.

Pero si nacieran dos hijos, parece que la hacienda se avia de dividir en 5. partes, de las quales cada hijo avia de tener dos, y la madre una. Si nacieran dos hijas, se avria de dividir en 4. partes; cada hija tendria una, y la madre dos. Si nacieran un hijo, y dos hijas, dice Caramuel en su Mathematica trat. de Arith. que se avia de partir la hacienda en 7. partes, de las quales las 4. fuessen para el hijo, las dos para la madre, y media á cada hija. Pero otros Autores quieren, que en este caso se reparta la hacienda en 8. partes; las 4. sean para el hijo, las dos para la madre, y una para cada hija. Ultimamente, si nacieran una hija, y dos hijos, se repartiria en once partes; la una seria de la hija, las dos de la madre y 4. de cada hijo.

Todo esto està discurrido segun la ley citada; porque siempre la madre tendria doblado de la hija, y el hijo doblado de la madre: Pero si en esta materia pudieramos discurrir libremente, hariamos otro repartimiento, que no estaria fuera razon.

530 Question 30. Pedro teniendo tres hijos testò de 1740. reales, para que despues de sus dias se los repartiessen igualmente. Muerto el padre riñeron los hijos, y cada uno tomò lo que pudo; pero aviendo hecho paz convinieron, en que el hijo mayor diesse la mitad de los reales que avia tomado: el mediano diesse el tercio; y el menor contribuyesse con el quarto de lo que avia tomado; y sumando todas estas tres cantidades, se repartiò la suma en tres partes iguales entre los tres hermanos; y con esto, y lo que les quedava en su poder, tuvo cada uno el tercio de la hacienda de su padre; preguntase aora quanto tomò cada uno?

Para responder à esta pregunta se han de buscar tres numeros de tal condicion, que tomando la mitad del primero, el tercio del segundo, y el quarto del tercero, las restas sean iguales; como son 12. 9. 8. cuya suma es 29. Digase aora: Si 29. dan 1740. reales, luego 12. 9. y 8. daràn 720. por los reales que tomò el mayor; 540. por los reales que tomò el mediano; y 480. por los reales que tomò el menor.

531 Question 31. Pedro hizo testamento en esta forma: Si naciere hijo (tenia su muger en cinta) tenga toda la herencia: si nacie-

tieren dos hijos, tenga cada uno la mitad: si hijo, è hija, el hijo tenga las dos partes, y la hija sea heredera de la tercia parte. No sucediò ningun caso de los que previno el testador, sino que nacieron dos hijos, y una hija: preguntase como se ha de repartir la hacienda.

Esta question propone el Jurisconsulto Paulo en la ley *Clemens patronus* 81. *ff. de heredibus instituendis*. Y resuelve, que se hagan cinco partes de toda la hacienda: á cada hijo se daràn dos, y à la hija una; porque el testador quiso dexar doblado al hijo que à la hija.

Questiones missellaneas.

532 Question 32. Un Artillero tiene 45. libras de polvora de quatro as y as: esto es, de 4. partes de salitre: una de azufre, y otra de carbon: pregunta como sabrá la cantidad de cada especie de estas, que ay en las dichas 45. libras.

Porque la polvora es de 4. as y as, cuyas partes sumadas hacen 6. Diga por regla de compañia: Si la suma 6. de las partes dà 45. libras; luego las partes 4. 1. y 1. darán 30. libras de salitre, siete libras, y media de azufre, y otras siete libras, y media de carbon, y tanto salitre, azufre, y carbon ay en las 45. libras de polvora de 4. as y as.

Assi mismo, si tiene 40. libras de polvora de 6. as y as. Sumense las partes 6. 1. y 1. y digase: Si la suma 8. dá 40. libras; luego las partes del mixto 6. 1. y 1. darán 30. de salitre, 5. de azufre, y otras 5. de carbon.

533 Question 33. Pedro tiene tres generos de polvora, es á saber, de 4. as y as, de 5. as y as, y de 6. as y as; preguntase quanto tomarà de cada una, para que en todas aya porcion igual de salitre. Primeramente sumense las partes de la composicion; esto es, 4. 1. y 1. del primer genero de polvora; 5. 1. del segundo genero; y 6. 1. y 1. del tercer genero, y seràn 6. 7. y 8. Despues determinese la porcion del salitre que se desea, la qual supongo que son 30. onzas. Digase aora por regla de tres: Si 4. partes de salitre vienen del todo, ò suma 6. luego 30. onzas de salitre vendràn de 45. onzas. Otra vez: Si 5. partes de salitre vienen de 7. luego 30. onzas vendrán de 42. onzas. Otra vez: Si 6. partes de salitre vienen de 8. luego 30. onzas de salitre vendrán de 40. onzas de polvora.

Con que en 45. onzas de polvora de 4. as y as ay tanto salitre, como en 42. onzas de 5. as y as; y como en 40. onzas de 6. as y as. Y estos son los numeros que señalamos arriba (493) para igualar una polvora con otra.

Pero si quiere tomar polvora de cada un genero: de suerte que aya partes iguales de carbon, ò de azufre, los mismos numeros 6. 7. y 8. seràn las partes que ha de tomar. Y assi, tomando 6. onzas, libras, arrobas, &c. de polvora de 4. as y as; 7. onzas, libras, &c. de polvora de 5. as y as; 8. onzas, libras, &c. de 6. as y as, tendrán iguales partes de azufre, ò carbon; esto es, en los tres generos de polvora avrà una onza, libra, &c. de azufre, y otra de carbon.

534 Question 34. En el fondo de una cisterna ay tres caños desiguales; abierto solo el mayor, sale toda el agua en dos horas; abierto solo el mediano sale toda el agua en 3. horas; abierto solo el menor se vacia la cisterna en 8. horas; preguntase en quanto tiempo se vaciarà toda el agua, si desde el principio hasta el fin sale por todos los tres caños.

Busquese por regla de tres la parte de cisterna que vaciarà cada caño en una hora, deste modo: Si el caño mayor en 2. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciarà media. Otra vez: Si el caño mediano en 3. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciará un tercio. Otra vez: Si el caño menor en 8. horas vacia una cisterna; luego en una hora vaciarà un octavo.

Estas mismas partes de la cisterna, que cada caño vacia en una hora, se pueden conocer facilmente sin hacer regla de tres, poniendo el tiempo (quando es numero entero) en que cada caño vacia la cisterna por denominador de un quebrado, cuyo numerador es la unidad, como consta claramente de las operaciones antecedentes; porque como en cada regla de tres el segundo, y tercer termino son la unidad, la qual no aumenta la multiplicacion; assi, multiplicando segundo por tercer termino, el producto es 1. el qual partido por el primer termino, que es el numero de las horas, hace quebrado en la forma referida.

Hecho esto, reduzganse los quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{8}$, á un comun denominador, y serán 24. 48. avos, 16. 48. avos, 6. 48. avos, cuya suma 46. 48. avos señalarà las partes de la cisterna que vacian los tres caños en una hora. Digase aora: Si 46. dan 1. hora; luego 48. que es el denominador, darán una hora, y 1. 23. avos; y en tanto tiempo se vaciarà la cisterna.

Para saber la parte de agua que vaciarà cada caño, digase: Si en una hora vacia el caño mayor media cisterna; luego en una hora, y 1. 23. avos vaciarà 12. 23. ovos. Otra vez: Si en una hora vacia el caño mediano un tercio de cisterna; luego en una hora, y 1. 23. avos vaciarà 8. 23. avos. Otra vez: Si en una hora vacia el caño menor un octavo de cisterna; luego en una hora, y 1. 23. avos vaciará 3. 23. avos.

Está

Eſta queſtion ſe podia proponer de otro modo ſin mudar la ſuſtancia: Si tres Artifices, Segadores, Molinos, &c. hacen, ſiegan, muelen, &c. una cierta obra, ò cantidad; el primero en 2. dias, el ſegundo en 3. y el tercero en 8. preguntaſe los tres juntos en quanto tiempo la acabaràn? Obrando como antes, ſe hallará 1. dia, y 1. 23. avos, y el primero avrà concluido 12. 23. avos de la obra; el ſegundo 8. 23. avos, y el tercero 3. 23. avos.

535 Queſtion 35. Dos correos, ſalen á un miſmo tiempo, el uno de Madrid, y el otro de Valencia (cuya diſtancia es 50. leguas) el primero caminaria todas las 50. leguas en 5. dias, y el ſegundo en 3. dias; preguntaſe quando, y en que diſtancia ſe juntarán?

Digaſe por regla de compañia: Si 8. ſuma de los dias, dà 50. ſuma de las leguas: Luego los 3. dias del ſegundo, daràn 18. leguas, y tres quartos que avrá caminado el primero (es la regla permutada.) Otra vez: Si 8. dán 50. luego 5. dias del primero, darà 31. legua, y un quarto por el camino del ſegundo.

Aora para ſaber el tiempo, digaſe: Si el primero corre 50. leguas en 5. dias; luego para correr 18. leguas, y tres, quartos, avrà meneſter 1. dia, y tres octavos. Y el miſmo tiempo ſe hallarà por el camino del ſegundo, diciendo: Si el ſegundo corre 50. leguas en 3. dias; luego para correr 31. legua, y un quarto, avrà meneſter 1. dia, y tres octavos, y un tanto tiempo ſe juntaràn los dichos correos.

Lo miſmo es, ſi una Isla tiene 50. leguas de circunferencia, y ſalen dos Navios à un miſmo tiempo de un Puerto de dicha Isla por partes contrarias; el primero la circuye en 8. dias; el ſegundo en 3. preguntaſe en quanto tiempo, y en que diſtancia ſe encontraràn?

536 Queſtion. 36. Entre quatro Mercaderes compran cierta mercaderia: el primero contribuye con dos quintos del precio; el ſegundo con quatro novenos, el tercero con un ſeptimo, el quarto diò 300. reales. preguntaſe quanto vale la dicha mercaderia?

Reducidos los quebrados, ſon $\frac{126}{315}$. $\frac{140}{315}$. $\frac{45}{315}$. La ſuma 311. 315. avos es lo que dieron los tres primeros; luego el quarto diò 4. 315. avos, que es lo que falta de dicha ſuma, haſta un entero, lo qual ſupone por los 300. reales que diò el quarto: Pues ſi 4. que es el numerador del quebrado correſpondiente al quarto, ſupone por 300. reales que diò el quarto Mercader; luego 315. que es el denominador, ò todo el precio dará 23625. reales, y tanto vale la dicha mercaderia.

PARTE III.

DE LAS REGLAS DE ALIGACIONES, ò Mezclas.

738 ALIGACION es una mezcla de algunas especies, como de trigos, vinos, lanas, &c. Para que resulte otra especie media en perfeccion, ò valor. Como mezclando oro de 20. quilates con otro oro de 16. quilates; saldrà un mixto, ò especie media de oro mas perfecto, que 16. quilates, y menos que 20. Y como las especies dadas, ò que se han de ligar, se pueden mezclar de diferentes modos, tomando mas de una, que de otra, por esso la especie media puede tener diferentes grados de perfeccion, ò valor; pero dentro de los terminos de las especies que se han de mezclar; de suerte, que la especie media, no puede ser mas perfeta, que la especie mayor, ni menos, que la menor.

Esta regla de Aligacion, es en dos maneras, *Simple*, y *Compuesta*. En la Aligacion Simple, solas se mezclan dos especies, y concurren seis terminos, que son especie *Mayor*, *Menor*, y *Media*, que se declaran por sus precios, ò perfecciones, y las tres cantidades de la especie mayor, menor, y media. En la Aligacion, Compuesta ày mas de dos especies, y se pueden reducir à quatro clases de terminos, es à saber: *Especie media*, *Especies que se mezclan*, *Diferencias*, y *Cantidades de las especies*.

En todas las Aligaciones, es preciso poner los terminos en su devido lugar, pues deste modo se resolverán facilmente muchas questiones, que de otra manera serian dificultosas. Escrivanse las especies como se vè en la formula, la Mayor arriba, la Menor debaxo, y la Media al lado izquierdo: Las diferencias estarán á la derecha, y las cantidades mas ácia la derecha, correspondencia á las especies, y diferencias. En el exemplo siguiente, estarà todo manifiesto.

Un Platero tiene dos especies de oro de 20. y de 16. quilates, y queriendo hacer 24. onzas de oro de 17. quilates, desea saber quanto tomarà de cada especie. Primeramente escrivase la especie media,

lla, que ès oro de 17. quilates, y despues las otras especies que se han de Aligar, poniendo siempre la mayor arriba, y la menor debaxo; las diferencias destas especies á la media, se han

Espec. med.	Especies.		Diferencias.		Cantidades.
	20.		1.	——	6.
17.		✕			
	16.		3.	——	18.
			4		24.

de escrivir en cruz al lado de dichas especies, y las cantidades, al lado derecho de las diferencias; ultimamente tirando una linea por baxo, se escrivirán las sumas de las diferencias, y de las cantidades debaxo las mismas diferencias, y cantidades, como todo se vè en la formula. Si en la question falta alguna cosa destas, se dexará en blanco lo que faltáre.

ALIGACIONES SIMPLES.

Preceptos.

539 Primero: Escrivase la especie mayor arriba, la menor debaxo, y la media al lado izquierdo, como està dicho; despues restese la especie media de la mayor, y la diferencia, pongase al lado derecho de la menor; restese tambien la especie menor de la media, y la diferencia, escrivase al lado de la mayor; de suerte, que las diferencias estèn en cruz; sumense las diferencias, y si la suma se hace todo, las mismas diferencias seràn las partes de la mezcla.

540 Segundo: Si el mixto se desea en alguna cantidad determinada, se escrivirà debaxo la linea al lado derecho de la suma de las diferencias, y haciendo tantas reglas de tres como diferencias ay, lo que saliere, serán las cantidades. El primer lugar de la dicha regla de tres, tendrá la suma de las diferencias. El segundo, la cantidad del mixto señalada. El tercero, cada diferencia. Y el quarto, las partes de la cantidad. De suerte, que son proporcionales la suma de las diferencias con la cantidad del mixto, y las mismas diferencias con las partes de dicha cantidad.

541 Tercero: Quando ay alguna especie que no tiene valor, ò alomenos no se hace caso dèl, como quando se liga oro con cobre, vino con agua, &c. entonces pongase un zero por la especie menor, y se obrará del mismo modo.

542 Queſtion 1. Un Platero tiene oro de 20. y de 16. quilates, y quiere mezclarle de ſuerte, que ſalga oro de 17. quilates; preguntaſe quanto tomará de cada uno? Eſcriva los terminos como queda dicho: y ſi quiere el mixto en una quantidad indeterminada, la ſuma de las diferencias repreſenta el mixto, y las miſmas diferencias las partes del mixto, con que tomaràn una parte de oro de 20. quilates, y tres de oro de 16. quilates, y el mixto ſerá de 17. quilates. Pero ſi quiere cantidad determinada como 24. onzas de oro de 17. quilates, eſcrivalos debaxo la linea, y diga por regla de tres: Si la ſuma de las diferencias 4. dà 24. onzas; luego la diferencia 3. darán 18. onzas; y la diferencia 1. darà 6. onzas; con que para hacer 24. onzas de 17. quilates, avrá de tomar 18. onzas oro de 16. quilates, y 6. onzas de 20. quilates.

	20.	1.	6.
71.	⋈		
	16.	3.	18.
		4.	24.

Demonſtracion.

La diferencia 3. de la eſpecie media 17. à la mayor 20. preciſſamente nace de la mezcla que ay de la eſpecie menor en el mixto; porque ſi en el mixto no huviera alguna porcion de la eſpecie menor, el dicho mixto, ò eſpecie media, ſeria la miſma eſpecie mayor, y no avria diferencia alguna; luego la diferencia 3. de la eſpecia media à la mayor ſe ha de poner al lado de la eſpecie menor, porque nace della. Aſsi miſmo la diferencia 1. de la eſpecie menor 16. à la media 17. nace de la mezcla de la eſpecie mayor en el mixtò; luego ſe ha de eſcrivir al lado de la eſpecie mayor.

Con que la diferencia 3. de la eſpecie media á la mayor, repreſenta, ò por mejor decir, es la porcion de la eſpecie menor, que ay en el mixto; y la diferencia 1. de la eſpecie menor á la media, es la parte de la mayor, que ay en el miſmo mixto; luego ſon proporcionales, como la diferencia 3. á la diferencia 1. aſsi reciprocamente la porcion de la eſpecie menor que ay en el mixto, à la porcion de la eſpecie mayor que ay en el miſmo mixto; luego componiendo (314) como la ſuma 4. de las diferencias à cada diferencia, aſsi la ſuma de las partes de la eſpecie mayor, y menor que ay en el mixto, que es toda la maſa del mixto, à cada parte de la eſpecie mayor, y menor. Y alternando (306) como la ſuma de las diferencias, à la ſuma de las partes de la mezcla, aſsi las diferencias à las partes de la mezcla, ò cantidad, luego la ſuma de las diferencias, repreſenta al mixto, y cada diferencia es la parte de la mezcla.

Y

Y assi, queriendo alguna cantidad determinada del mixto, como 24. onzas, se dirà por regla de tres: Si la suma 4. de las diferencias que supone por el mixto, son 24. onzas, cada diferencia, quantas onzas seràn? Siguiendo la regla, se hallaràn las partes de la cantidad proporcionales à las diferencias.

Examen.

543 Multipliquense la cantidad del mixto 24. onzas por las diferencias 1. y 3. y sumando los productos 24. y 72. saldràn *96*. Multipliquese aora la suma 4. de las diferencias por las partes de la cantidad *6*. y 18. sumando los productos 24. y *72*. han de salir los mismos *96*. De suerte, que la suma de los productos de la cantidad por las diferencias, ha de ser igual á la suma de los productos de la suma de las diferencias por las partes de la cantidad.

La razon desto es manifiesta, porque como son proporcionales la suma de las diferencias 4. á la cantidad 24. assi una diferencia 3. à la parte de la cantidad 18. el producto 72. de los extremos, es igual al producto 72. de los medios: Assi mismo, como la misma suma 4. á la cantidad 24. assi la otra diferencia 1. á la otra parte de la cantidad *6*. luego el producto 24. de los extremos, es igual al producto 24. de los medios (298); luego las sumas de cada dos productos, son iguales, porque en las dos proporciones, el primero, y segundo terminos, son los mismos. Tambien multiplicando las diferencias, y cantidades en cruz, han de salir iguales productos; y assi multiplicando 3. por *6*. y 1. por 18. salen 18. Assi mismo, multiplicando la suma 4. de las diferencias por la especie media 17. ha de salir un producto 68. igual à la suma de los productos de las diferencias, por las especies que tienen al lado.

Corona de Archimedes.

544 Por esta regla se puede facilmente resolver aquel famosissimo Problema, que el vulgo llama *de la Corona de Archimedes*. El caso fuè este: Hieron Rey de Zaragoza, de Sicilia, aviendo prometido à los Dioses una Corona de oro purissimo, entregò á un platero oro de 24. quilates para fabricar dicha Corona; el oficial puso mezcla de plata; y el Rey temiendo el hurto, la entregò á Archimedes para averiguarlo sin deshacer la Corona. Archimedes usando de las reglas de la Hydrostatica, como comunmente se cree, tomò un pedazo de oro, y otro de plata, cada uno de igual peso con la Corona, la qual supongo que pesava 100. onzas, y llenando un vaso de agua, metiò la Corona dentro, y pesó la agua que expeliò,

que

que supongo fueron 81. onzas; bolviò à llenar el vaso, y metiendo el pedazo de oro, observò, que salieron 80. onzas. Otra vez llenò el vaso, y poniendo el pedazo de plata, salieron 90. onzas.

De donde conociò que avia mezcla, porque la plata es menos pesada que el oro, de suerte, que en un mismo peso de plata, y de oro, tiene mayor magnitud la plata que el oro, como se vè en un real de à ocho, y un doblon de à ocho, que pesando los dos casi lo mismo tiene mayor quantidad el real de à ocho, que el doblon; luego mas agua expeliria el real de à ocho, que el doblon; pues viendo que la Corona expelia mas agua que el pedazo de oro de igual peso, tuvo por cierto que avia mezcla.

Esto supuesto, para conocer quanta plata avia en dicha Corona, se formará una regla de aligacion por la agua expelida deste modo. Tomese la agua que expelió la Corona por la especie media, y la agua que expelieron el oro, y la plata por las especies menor, y mayor; y escriviendo las diferencias en cruz, y debaxo la suma 10.

90.	1.	10.	Plata.
81.	✕		
80.	9.	90.	Oro.
	10.	100.	

digase por regla de tres: Si la suma de las diferencias 10. dà 100. onzas de peso de toda la Corona, luego la diferencia 9. de oro, darà 90. onzas de oro; y la diferencia 1. de plata, darà 10. onzas de plata, y tanta mezcla avia.

Pero adviertanse dos cosas; la primera, que la corona no avia de tener mezcla de otro metal mas que de plata: Porque en una mezcla de tres, ò mas metales, no se puede saber la cantidad de cada metal, como lo demuestra el P. Jacobo Billy en su Algebra. Ni Archimides pudo conocer si la mezcla era de cobre, ò de plata, sino es que fuesse costumbre de aquellos Plateros no mezclar en el oro otro metal, sino plata, como lo insinua Mersenno en su Hydraulica prop. 51. La segunda, que avia de ser sólida, porque si dentro tuviesse alguna concavidad expeliria mas agua, como se vè en una bola vacia, la qual puesta en el agua, saca mayor porcion de agua, que la que corresponde à su peso, si fuera sólida.

545 Question 2. Cierta cantidad de oro de 17. quilates, tiene 18. onzas de oro de 16. quilates, y lo restante es de 20. quilates; preguntase quantas onzas de oro seràn? Dispuestos los termi-

20.	1.	
17.	✕	
16.	3.	18.
	4.	

nos,

nos, como queda dicho, dexando vacio el lugar donde faltan los que se buscan, y halladas las diferencias como antes, digase por regla de tres: Si la diferencia 3. dá 18. onzas; luego la suma 4. darà 24. onzas, que es toda la cantidad del mixto, y restando las 18. onzas de las 24. saldràn 6. onzas de 20. quilates.

546 Question 3. Si 6. onzas de oro de 20. quilates, se mezclan con 18. onzas de 16. quilates; de quantos quilates será la mezcla Escrivanse los terminos como antes, y restando la especie menor 16. de la mayor 20. saldràn 4. que es la suma de las diferencias, la qual se escrivirà en su lugar; de suerte que la resta de las especies, es la misma que la suma de las diferencias. Digase aora por regla de tres: Si la cantidad del mixto 24. dà la suma de las diferencias 4. luego la parte del mixto 18. darà la diferencia 3. de la especie mayor, y media; luego restando 3. de 20. quedaràn 17. por la especie media, y de tantos quilates son las 24. onzas de mixto. Tambien se podia decir: Si 24. dán 4. luego 6. darà 1. que es la diferencia de la especie menor, y media; y assi sumando 1. con 16. salen los mismos 17. de la especie media.

20.	.	6.
	✕	
16.	.	18.
	4.	24.

Adviertase, que en qualquier question dados dos terminos de las cantidades, se sabrà el tercero, y lo mismo es de las diferencias; y assi, si se dàn 6. onzas de oro de 20. quilates, y la suma 24. onzas, restando, se sabrá la otra cantidad 18. Si se dán 18. y 24. restando, saldràn 6. Si se conocen 18. y 6. sumando, saldràn 24. Lo mismo es en las diferencias, porque son proporcionales.

547 Question 4. Si mezclando 6. onzas de oro de 20. quilates con 18. onzas de oro de ciertos quilates, sale la mezcla de 17. quilates; preguntase de quantos quilates eran las dichas 18. onzas? O si 24. onzas de 17. quilates, tienen 6. onzas de 20. quilates, las restantes 18. onzas, de quantos quilates serán? Puestos en orden los terminos, digase: Si 18. dàn 3. de diferencia; luego 6. daràn 1. de diferencia de la especie menor à la media, y assi restado de la especie media 17. quedarà la menor 16. y de tantos quilates eran las 18. onzas.

	20.	1.	6.
17.		✕	
	.	3.	18.
		.	24.

De

De otro modo : Si 18. dán 3. luego 24. darán 4. suma de las diferencias, ò diferencia de las especies; pues restando 4. de la especie mayor 20. (ò sumando, si fuesse la menor) saldrá la especie 16. y de tantos quilates eran las 18. onzas.

548 Question 5. Si 6. onzas de oro de 20. quilates, se mezclan con 18. onzas de otro oro, y la diferencia de los quilates de la mezcla, y del oro de 18. onzas, es 1. preguntase de quantos quilates será la mezcla ò mixto, y las 18. onzas? Supongo que los 20. quilates, es la especie mayor: Digase pues: Si 6. dàn 1. que darán 18. Siguiendo la regla, salen 3. que es la diferencia de la especie dada 20. y de la media, luego restando 3. de 20. quedan 17. por la especie media, que son los quilates de la mezcla. Aora restando la diferencia 1. de los 17. quedarán 16. por la especie menor, ò quilates de las 18. onzas.

20.	1.	6.
	⤫	
		18.
		24.

De otro modo : Si 6. dàn 1. luego 24. suma de las cantidades, daràn 4. suma de las diferencias, ò diferencia de las especies; restense pues los 4. de 20. por ser esta la especie mayor como queda supuesto, que si fuera la menor, se avian de sumar, y quedáran 16. por la especie menor; sumando pues la diferencia 1. con 16. sale la especie media 17.

549 Question 6. Si 24. onzas de oro, son de 17. quilates, y ay 18. onzas de una especie, y 6. de otra, cuya diferencia de quilates es 4. preguntase de quantos quilates son las 18. y 6. onzas: Supongo que las 6. onzas son de la especie mayor, y las 18. de la menor? Dispuestos los terminos como està dicho, digase por regla de tres. Si 24. onzas, que es la suma de las cantidades, dán 4. suma de las diferencias, ò diferencia de los quilates; luego 18. daràn la diferencia 3. de la especie mayor, y media; y assi sumados con 17. daràn la especie mayor 20. que son los quilates de las 6. onzas, y restando 4. de 20. quedarà la especie menor 16. que son los quilates de las 18. onzas.

		6.
17.	⤫	
		18.
	4.	24.

Tambien, suponiendo que las 6. onzas, son de la especie mayor, se puede decir por regla de tres : Si 24. dán 4. luego 6. daràn 1. que es la diferencia de la especie menor à la media, restando pues 1. de 17. especie media, quedarà la especie menor 16. y de tantos quilates seràn las 18. onzas.

En

En eſtas dos queſtiones, ſi no ſe determina la eſpecie de las cantidades; eſto es, ſi ſon de la mayor, y menor, puede ſuponerlo el Arithmetico á ſu arbitrio, y entonces tendrá la pregunta dos reſpueſtas.

450 Queſtion *7*. Si 24. onzas de oro mixto tienen *6*. de 20. quilates; las otras 18. onzas, y la mezcla 24. de quantos quilates ſeràn? Eſta queſtion tiene muchas ſoluciones, y puede el Arithmetico determinar à ſu guſto los quilates de las 18. onzas, los quales ſupongo que ſean 1*6*. Luego ya ſe tiene la eſpecie menor; y aſsi por la queſtion 3. ſe ſabrá de quantos quilates es la mezcla. Tambien ſe podian determinar los quilates de la mezcla, y por la queſtion 4. hallar los quilates de las 18. onzas.

551 Queſtion 8. Si 24. onzas de oro de 17. quilates ſe componen de oro de dos eſpecies, las 18. onzas de una eſpecie, y las *6*. de otra; preguntaſe de quantos quilates es cada eſpecie? Tambien tiene muchas reſpueſtas, pues puedo determinar la una eſpecie á mi guſto; y aſsi ſupongo, que las *6*. onzas ſean de 20. quilates: Luego por la queſtion 4. hallarè 1*6*. quilates, que es la eſpecie menor. Si hiciera ſupoſicion que las 18. onzas ſon de 15. quilates, ordenados los terminos, digaſe: Sí *6*. dan 1. de diferencia; luego 18. daràn 3. Luego porque ſe buſca la eſpecie mayor añado 3. á la eſpecie media 17. y ſaldràn 20. quilates. Tambien podia ſumar las diferencias, y añadir la ſuma 4. à la eſpecie menor 1*6*. y ſaldria la miſma eſpecie mayor 20.

	.	1	*6*.
17.	⋈		
6	.		18.
			24.

Eſtas 8. queſtiones, y otras dos, que ſe comprehenden en ellas, pone el Padre Zaragozà en ſu *Arithm. lib. 1. cap.* 19. y dice, que en ellas ſe encierran todas las de eſta materia. Veamoslo, y juntamente reduzgamos à mayor claridad algunas queſtiones que traen los Autores.

552 Queſtion *9*. Un Platero tenia 30. onzas de oro, cuyos quilates no ſabia; pero poniendole al fuego, y ſacandole dèl, hallò 28. onzas de 21. quilates, y tres ſeptimos; pideſe de quantos quilates ſerian las 30. onzas. Aqui ſe vè claramente, que en el fuego menguaron dos onzas, las quales eran de liga, que ſe ſupone que no tiene valor. Eſcrivanſe, pues, en el lugar de las cantidades las 28. y las 2. de liga, y debaxo la ſuma 30. onzas

21 $\frac{3}{7}$	.		28
	⋈		
0	.		2.
		21. $\frac{3}{7}$	30

y

y porque las 28. onzas eran de 21. quilates, y tres ſeptimos, y las 2. onzas de ningun quilate, eſcrivanſe los 21. quilates, y tres ſeptimos por eſpecie mayor, correſpondiendo à las 28. onzas; y un zero por eſpecie menor, correſpondiendo à las 2. onzas; y pues la diferencia de las eſpecies es igual á la ſuma de las diferencias, reſteſe el zero de 21. y tres ſeptimos, y quedaràn los miſmos 21. y tres ſeptimos por ſuma de las diferencias, que ſe ha de eſcrivir en ſu lugar.

Eſto ſupueſto ſe vé claramente, que eſta queſtion es la miſma que la tercera. Digaſe, pues, por regla de tres: Si 30. dan 21. y tres ſeptimos; luego 28. daràn la diferencia 20. la qual ſe ſumarà con la eſpecie menor zero, por ſer diferencia deſta à la media, y ſaldràn los quilates 20. del mixto.

553 Queſtion 10. Un Platero puſo en el criſol 30. onzas de oro de 20. quilates, y deſpues hallò ſolas 28. onzas; pidaſe de quantos quilates ſon. Eſta queſtion, aunque queda reſuelta arriba 485), pero por regla de aligaciones ſe bolverà à reſolver. En el fuego fueron conſumidas 2. onzas de liga; luego las partes de la cantidad ſon 28. y 2. pues eſcrivanſe en ſu lugar, y debaxo la ſuma 30. y porque las 2. onzas de liga no tienen valor, pongaſe un zero por eſpecie menor, correſpondiendo á las dos onzas; y la eſpecie media 20. que ſon los quilates de las 30. onzas ſe pondrà en ſu lugar; y tambien la diferencia 20. al lado de las 28. onzas.

	.	20	28
20	✕		
0		.	2
			30

Eſto ſupueſto eſtá manifieſto, que eſta duda es la miſma que la queſtion 4. Pues diciendo por regla de tres: Si 28. dan 20. luego 2. daràn 1. y tres ſeptimos de diferencia de la eſpecie mayor à la media; y aſsi, ſumados con la eſpecie media 20. ſaldràn 21. y tres quartos por eſpecie mayor, que ſon los quilates de las 28. onzas.

554 Queſtion 11. Un Platero puſo al fuego ciertas onzas de oro de 14. quilates, y aviendole ſacado hallò 12. onzas de 20. quilates; pideſe quantas eran las onzas que puſo al fuego. En eſta queſtion ſe conocen los quilates del mixto, que es la eſpecie media, mas una parte de la cantidad, y las eſpecies, porque la mayor ſon 20. quilates, y la menor zero quilates, pues es la eſpecie de las onzas de la liga. Y aſsi,

	20	14	12
14		✕	
	0	6	
		20	

diſ-

dispuestos los terminos conocidos, como se vé, es esta la question 2. pues, sumando las diferencias digase: Si 14. dàn 12. la suma de las diferencias 20. darà 17. y un septimo, y tantas onzas puso al fuego: Si resto 12. de 17. y un septimo quedaràn 5. y un septimo, por las onzas de la liga.

555 Question 12. Un Platero quiere mezclar 33. onzas de oro de 20. quilates con 17. onzas de cobre, preguntase de quantos quilates será la mezcla. Aqui estàn conocidas las dos partes de la cantidad, y sus quilates, pues la una es de 20. quilates, y la otra, que es el cobre, es de ningun quilate; lo que se busca es la especie media, la qual se hallará por la question 3. de 13. quilates, y un quinto.

20 . 33
. X
0 . 17
———————
20 50

556 Question 13. Un Platero tiene 20. onzas de oro de 18. quilates, de las quales quiere sacar 6. onzas que sean de 24. quilates; preguntase las 14. onzas restantes de quantos quilates seràn? En esta question estàn dadas las dos partes de la cantidad, y una especie; mas la cantidad 20. ò mixto, y su especie media; buscase la especie correspondiente à la otra parte de la cantidad 14. la qual se sabrà por la question 4. que es 15. y tres septimos, y de tantos quilates son las 14. onzas.

24 . 6
18 X
. 6
———————
. 20

557 Question 14. Un Labrador tiene 80 cantaros de vino de 8. sueldos el cantaro, y quiere mezclar vino de à 12. sueldos el cantaro, para hacer la mezcla de 9. sueldos; preguntase quanto vino añadirà? Aqui estàn dadas las tres especies, y por consiguiente las diferencias, y una parte de la cantidad; buscase la otra, la qual se hallarà por la regla de la question 2. que es 26 y dos tercios, y tantos cantaros de vino de 12. sueldos ha de añadir, para que la mezcla salga de 9. sueldos.

9 12 1 ;
X
8 3 80
———————

558 Question 15. Un Platero comprò 6. marcos de plata dorada por 800. reales; el oro le comprò à razon de 1200. reales el marco; y la plata à razon de 80. reales el marco, preguntase quanto oro

oro, y plata avia. Para ordenar los terminos es preciſo ſaber quanto vale un marco de la mezcla, lo qual ſe conocerà partiendo los 800. reales que coſtaron los 6. marcos, por los miſmos 6. marcos, y ſaldrán 133. reales, y dos tercios, que ſerà la eſpecie media. La eſpecie mayor es el valor del marco de oro 1200. reales; y la menor los 80. reales del marco de la plata.

Hecho eſto, y halladas las diferencias, digaſe por regla de tres: Si 1120. ſuma de las diferencias, dan 6. marcos de mezcla; luego la diferencia 53. y dos tercios darà 161. 560. avos de marco de oro; y la diferencia 1066. y un tercio darà 5. marcos, y 399. 560. avos de marco de plata. Y eſta es la regla de la queſtion primera; pero con la advertencia, que primeramente ſe ha de ſaber el valor de un marco de la mezcla.

	1200		$53\frac{1}{3}$	$0\frac{161}{560}$
$133\frac{1}{3}$		X		
	80		$1066\frac{2}{3}$	$5\frac{399}{560}$
			1120	6

559 Queſtion 16. Un Labrador tiene 24. cahices de trigo, mezclado de dos eſpecies, cuyo cahiz vale 60. reales; ignora los cahices, y el valor de cada eſpecie; pero bien ſabe que ay doblado trigo del de baxo precio, que del de alto, y que la diferencia de los precios de cada eſpecie es 30. preguntaſe quanto trigo ay de cada eſpecie, y quanto es ſu valor?

En eſta queſtion ſolos eſtàn dados la cantidad, y ſu valor, que es la eſpecie media 60. reales; mas la proporcion de las partes de la cantidad, que es dupla, como 2. à 1. y la diferencia 30. de los precios de las partes de la mezcla, que como eſtà dicho, es la ſuma de las diferencias, y por eſſo ſe aſcrive en ſu lugar; pues para reſolverla neceſsita de preparacion. Y aſsi, porque las partes de la mezcla eſtán en razon dupla, como de 2. à 1. dividaſe la cantidad 24. en la miſma razon ſumando 2. y 1. diciendo por regla de tres: Si 3. dàn 1. luego 24. daràn 8. Otra vez: Si 3. dán 2. luego 24. daràn 16. Con que las partes de la mezcla ſon 8. y 16. aſsi avia en los 24. cahices del mixto 16. cahices de trigo de mas baxo precio, y 8. del de mas alto.

	.		.	.
60		X		
			.	.
			30	24

Y pues las diferencias ſon proporcionales con las partes del mixto,

mixto, ò cantidad, tambien han de estàr en dupla proporcion; y assi, digase por regla de tres: Si 24. dan 30. de la suma de las diferencias; luego 8. daràn 10. y 16. daràn 20. que son las diferencias. Aora sumando la diferencia 20. con la especie media 60. saldràn 80. reales por el valor de los 8. cahices; y restando la diferencia 10. de los mismos 60. reales, quedarán 50. por el valor de los 16. cahices, como se vè aqui todo figurado.

	80	10	8
60		X	
	50	20	16
		30	24

Esta duda, sin su devida preparacion, no se puede resolver por ninguna de las 8. primeras questiones.

560 Question 17. Ciertas onzas de oro de 16. quilates se componen de oro de 22. quilates, y de otro oro de menos quilates ay 24. onzas; la suma de las onzas del mixto, ò cantidad, y de la diferencia de las especies mayor, y menor (que es la suma de las diferencias), es 45. pidese quanto oro ay de 22. quilates, y las 24. onzas de quantos quilates son.

En esta question están dados los terminos que se vèn en la formula, y mas la suma 45. del mixto, y diferencia de los extremos, que como està dicho, es la misma suma de las diferencias. Sumese la diferencia 6. con las 24. onzas que tiene al lado; luego por regla de tres: Si la suma 30. viene de 24. la suma dada 45. de quantos vendrà? Siguiendo la regla salen 36. y de tantas onzas es el mixto. Restando, pues, las 24. onzas de las 36. quedan 12. onzas por el oro de 22. quilates. Aora digase: Si 24. dan 6. de diferencia; luego 12. darán 3. por la otra diferencia; la qual por ser de la especie menor à la media, restese de dicha media 16. y quedarà la especie menor 13. y de tantos quilates son las 24. onzas.

	22	.	.
62		X	
	.	6	24
		.	.

La razon desto es manifiesta, porque la suma de las diferencias 9. el mixto 36. tiene la misma razon que una diferencia 6. à la parte del mixto correspondiente 24. como està dicho: Luego alternando como 9. à 6. assi, 36. à 24. (306); y pues la suma 45. de los antecedentes 9. y 36. à la suma 30. de los consequentes 6. y 24. es como el antecedente 9. al consequente 6. (318); esto es, como 45. à 30. assi 9. à 6. y como 45. à 30. assi el otro antecedente 36. à su consequente 24. Luego invirtiendo como 30. à 45. assi, 24. à 36. (307), y alternando como 30. à 24. assi,

45. à 36. que es la regla de tres que hemos resuelto. Lo restante de la question por sì es manifiesto, y queda explicado arriba.

Esta question, ni otras muchas, que à su semejanza podrá inventar el Arithmetico, tampoco està comprehendida en las 8. primeras.

561 Question 18. Pedro tiene polvora de 6. as y as, y de 4 as y as; preguntase para hacer 42. libras de polvora de 5. as y as, quanto tomará de cada una. Escrivanse las especies en forma de quebrado, poniendo por numerador al salitre de cada composicion, y por denominador à la suma de todas las partes de la composicion; y assi, en la polvora de 6. as y as, el numerador serà 6. y el denominador 8. que es la suma de 6. 1. y 1. Hecho esto,

	$\frac{6}{8}$		$\frac{1}{21}$	24
$\frac{5}{7}$		X		
	$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{28}$	18
			$\frac{1}{12}$	42

siguiendo la regla, y abreviando los quebrados para mayor facilidad, salen 24. libras de polvora de 6. as y as, y 19. libras de polvora de 4. as y as; y tanto salitre ay en las 24. libras de 6. as y as, y en las 18. de 4. as y as, como en las 42. de 5. as y as; que en lo que iguala las violencias de las polvoras, segun opinion de los Artilleros.

¶ Y advierto, que por seguir un mismo tenor, y combinar mejor todas estas questiones, he puesto exemplos en el oro; pero lo mismo es en la plata, suponiendo, que assi como el oro puro, y sin liga, se dice que es de 24. quilates; el mismo modo, la plata pura, de copela, ò cendrada, se

				Marc.	Onzas.	Quart.
	281		11	4.	7.	1. $\frac{23}{29}$
263		X				
	252		18	8.	0.	2. $\frac{6}{79}$
			29	13.		

dice de 12. dineros, y cada dinero 24. granos. Si tiene una parte de las 12. de liga, es de 11. dineros; si tiene 2. es de 10. dineros, &c. Como si un Platero tiene plata de 10. dineros, y 12. granos de ley, y de 11. dineros, y 17. granos para saber 13. marcos de plata de 10. dineros, y 23. granos, què cantidad pondrá de cada una, lo hará deste modo: Reduzga los dineros à granos, multiplicando por 24. y añadiendo los granos de cada ley; y assi la de 10. dineros, y 12. granos tendrá 252. granos, la de 11. dineros, y 17. granos tendrà 281. granos, y la especie media de 10. dineros, y 23. granos, tendrá 263. granos. Esto supuesto, hará la aligacion por la question 1. Y lo mismo en todas las demás questiones.

ALI-

ALIGACIONES COMPUESTAS.

En las aligaciones compuestas los terminos se escriven del mismo modo que en las simples. Pero las partes de la mezcla no estàn necessariamente determinadas, como en las aligaciones simples; pues se puede tomar mas de una especie que de la otra, y compensar la qualidad de una especie con la quantidad de la otra, como luego verèmos. Se pueden hacer de dos modos. El primero, por muchas aligaciones simples; y el segundo, por una sola compuesta.

Modo primero.

Preceptos.

562 *Primero.* Haganse alomenos tantas aligaciones simples, quantas fueren menester, para que se liguen todas las especies de dos en dos con la comedia, aunque una misma especie se ligue dos, ò mas veces.

563 *Segundo.* Dividase la quantidad del mixto en tantas partes arbitrarias: esto es, del modo que se quisieren, quantas fueren las aligaciones.

564 *Tercero.* Si alguna especie se ha ligado muchas veces, sumense las partes de la mezcla que salieren en cada ligacion, para tener la parte de mezcla correspondiente á la tal especie. En los exemplos estará todo manifiesto.

565 Question 19. Un Mercader tiene Ambar, que vale á 20. libras la onza: Almizcle, cuya onza vale 12. libras; y Algalia, cuya onza vale 8. libras, quiere mezclar todas estas tres olores, de suerte, que la onza del mixto valga 15. libras; pregunta quanto se tomará de cada especie.

Aqui se han de hacer dos aligaciones; y pues son tres las especies dadas, necessariamente la una se ha de ligar dos veces; y assi divido la onza que se desea del mixto en dos qualquier partes, en un quarto, y en tres quartos. Aligo aora el Ambar, y Almizcle con la especie media 15. escriviendo las diferencias 3. y 5. en cruz, y diciendo por regla de tres: Si la suma de las diferencias 8. dan un quarto (que es la una parte del mixto), luego 5. dará

	20	3	$\frac{3}{32}$
15	X		
	12	5	$\frac{5}{32}$
		8	$\frac{1}{4}$

rà 5. 32. avos de onza de Almizcle ; y 3. darà 3. 32. avos de onza de Ambar.

Hago otra aligacion del Ambar, y Algalia, con la eſpecie media 15. eſcriviendo las diferencias en cruz, y diciendo por regla de tres: Si la ſuma de las diferencias 12. dan $\frac{3}{4}$ de onza del mixto (que es la otra parte); luego la diferencia 7. dará 21. 48. avos de onza de Ambar; y la diferencia 5. dará 15. 48. avos de onza de Algalia. Y porque el Ambar ſe ha aligado dos veces, ſumenſe las cantidades que han ſalido en las dos aligaciones, que ſon 3. 32. avos, y 21. 48. avos, ò 14. 32. avos de onza, y ſerán 17. 32. avos. Con que para hacer una onza del mixto, ſe han de tomar 17. 32. avos de onza de Ambar, 5. 32. avos de onza de Almizcle ; y 15. 48. avos, ò 10. 32. avos de onza de Algalia.

	20		7	$\frac{21}{48}$
15		X		
	8		5	$\frac{15}{48}$
			12	$\frac{3}{4}$

Podia aver dividido la onza que ſe deſea del mixto en qualquiera otras dos partes, como en dos ſextos, y quatro ſextos, y haciendo primero la aligacion del Ambar, y Almizcle, reſpeto de los dos ſextos, y deſpues del Ambar, y Algalia, reſpeto de los quatro ſextos, ſaldrán (reducidos los quebrados) 37. 72. avos de onza de Ambar, 5. 18. avos de onza de Algalia ; y 5. 24. avos de onza de Almizcle.

566 Aſsimiſmo, ſi el mixto ſe deſea en alguna otra cantidad, como en 20. onzas, le dividirè en dos partes arbitrarias 8. y 12. Y haciendo la aligacion del Ambar, y Almizcle, reſpeto de las 8. onzas, ſaldràn 3. onzas de Ambar, y 5. de Almizcle. Haciendo otra vez la aligacion del Ambar, y Algalia, reſpeto de las 12. onzas, ſaldràn 7. onzas de Ambar, y 5. de Algalia ; y como el Ambar ſe ha ligado dos veces, ſumando las 3. onzas de la una aligacion, y las 7. de la otra, ſaldrán 10. onzas del Ambar, 5. onzas del Almizcle ; y 5. de la Algalia, que ſon las partes que ſe han de tomar de cada eſpecie, para hacer las 20. onzas del mixto.

	20		3	3
15		X		
	12		5	5
			8	8

	20		7	7
15		X		
	8		5	5
			12	12

Podia tambien ligar el Ambar, y Almizcle, reſpeto de las 12.

onzas

onzas del mixto; y el Ambar; y Algalia respeto de las 8. onzas, y entonces saldrian 9. onzas, y un sexto de Ambar; 7. onzas y media de Almìzcle; y 3. onzas y un tercio de Algalia; con que la question tiene otra respuesta. Podia tambien aver dividido las 20. onzas del mixto en otras partes como en 4. y en 16. y entonces tendria la question otras dos respuestas.

Finalmente, como qualquier numero se podia dividir en infinitas partes, usando de quebrado quando importa, y respeto de cada parte, se pueden hacer alomenos dos Aligaciones (quando ay solas tres especies, porque si las especies son mas, tambien se pueden hacer mas Aligaciones) se podrán hacer infinitas Aligaciones; y la question tener infinitas respuestas: Y assi tres terminos se pueden aligar infinitamente, y mucho mejor si ay mas terminos.

Demonstracion.

Cada Aligacion Simple està yá demonstrada arriba (542). Aora solo falta probar, que dividiendo la cantidad del mixto en tantas partes arbitrarias, quantas han de ser las Aligaciones, saldràn las verdaderas partes del mixto, que son las cantidades de las especies que se han de poner en la mezcla, para que salga del valor señalado, lo qual pruevo assi; y porque la demonstracion no sea en numeros abstractos, y no esté implicada en quebrado, me valgo del exemplo immediate propuesto (565), que es en numeros enteros.

Las 20. onzas del mixto, se han dividido en 8. y 12. onzas; las 8. constan de Ambar, y Almizcle, de suerte, que cada onza de las 8. vale 15. libras; y las 12. onzas restantes, se componen de Ambar, y Algalia, de suerte, que cada onza, vale tambien 15. libras; y assi ay dos masas, ò mezclas iguales en perfeccion; esto es, que la onza de cada una, vale lo mismo; luego juntando las dos masas, ò mezclas, saldrán 20. onzas compuestas de Ambar, Almizcle, y Algalia, cuya onza valdrà 15. libras, porque juntando dos, ò mas mixtos de igual perfeccion, nace un todo del mismo valor, que cada mezcla de por sì, como juntando una porcion de oro de 20. quilates, con otra tambien de 20. quilates, saldrà oro de 20. quilates, pues que no ay causa por la qual se aumente, ò disminuya la perfeccion. Y assi juntando las 8. onzas de Ambar, y Almizcle, cuyo valor son 15. con las 12. de Ambar, y Algalia, cuyo valor son tambien 15. libras, saldrán 20. onzas tambien de 15. libras de valor.

Modo segundo.

Preceptos.

567 *Primero*: Escritas las especies como está dicho, liguense todas de dos en dos con la especie media, aunque una misma especie se ligue dos, ò mas veces, de suerte, que las especies que se ligan de dos en dos, no han de ser mayores, ni menores que la media, sino una mayor, y otra menor.

568 *Segundo*: Las diferencias de cada especie á la media, escrivanse en cruz; es, la diferencia de la especie menor á la media, pongase al lado de la mayor; y la diferencia de la especie mayor à la media, escrivase al lado de la menor.

569 *Tercero*: Sumense las diferencias, pero con esta advertencia, que si al lado de una especie huviere dos, ò mas diferencias, al tiempo de sumarlos, no se ha de hacer cuenta que son unidades, decenas, &c. sino unidades Simples; esto es, no se han de sumar atendiendo al lugar de la numeracion.

570 *Quarto*: Instituyanse tantas reglas de tres, quantas diferencias huviere, en las quales la suma dellas, tendrá el primer lugar; el segundo será de la quantidad del mixto; en el tercero estarà cada diferencia, tomada como está dicho; y en el quarto, las partes de la mezcla. Aora lo practicaremos todo.

571 Question 20. Un Platero tiene oro de 24. 20. 18. 16. y 15. quilates, quiere mezclarle, y hacer 60. onzas de oro de 19. quilates; preguntase quanto tomarà de cada especie? Escrivanse las especies como se vè, y ligando los 15. y 24. quilates con los 19. pongase la diferencia 4. de 15. à 19. al lado de las 24. y las diferencias 5. de 19. à 24. al lado de los 15. Liguense del mismo modo los 16. y 20. quilates, escriviendo las diferencias 3. y 1. encontradas. Liguense ultimamente los 18. y 24. porque como los 18. quedan solos, por fuerza, se han de ligar con otra especie ya ligada, y la diferencia 1. de 18. á 19. escrivase enfrente de los 24. y al lado de la diferencia 4. la otra diferencia 5. escrivase al lado del 18.

Especies.	Diferencias.			
24.	4.	1.	15.	15/19.
20.	3.		9.	9/19.
19.				
18.	5.		15.	15/19.
16.	1.		3.	3/19.
15.	5.		15.	15/19.
	19.		60.	

He-

Hecho esto, sumense las diferencias 1. 4. 3. 5. 1. 5. tomando las dos 4. y 1. que estàn en una linea como unidades; esto es, como quatro, y uno, no como quarenta y uno: Y digase por regla de tres: Si 19. suma de las diferencias, dà 60. onzas; luego la diferencia 4. y 1. que es 5. darà 15. onzas, y 15. 19. avos de oro de 24. quilates; luego la diferencia, 3. darà 9. onzas, y 9. 19. avos de oro de 20. quilates, y assi de las demás.

24.	4.	3.	1.	14.	$\frac{2}{17}$.
20.	4.	3.	1.	14.	$\frac{2}{17}$.
19.					
18.	5.	1.		10.	$\frac{10}{17}$.
16.	5.	1.		10.	$\frac{10}{17}$.
15.	5.	1.		10.	$\frac{10}{17}$.
	34.			60.	

Si se quieren hacer todas las Aligaciones possibles, liguense todas las especies quantas veces se puedan, ligando siempre la mayor, y menor con la media; como ligando los 15. y 24. quilates, son las diferencias 4. y 5. que se han de escrivir encontradas; esto es, la diferencia 4. del 15. à 19. pongase al lado del 24. y la diferencia 5. del 19. al 24. escrivase al lado del 15. Liguense tambien el 15. con el 20. escriviendo las diferencias 4. y 1. en cruz; esto es, la diferencia 4. del 15. al 19. al lado del 20. y la diferencia 1. del 19. al 20. al lado del 15.

Liguense los 16. y 24. quilates, escriviendo las diferencias 3. y 5. encontradas; liguense del mismo modo el 16. y 20. escriviendo las diferencias 3. y 1. en cruz. Assi mismo se ligaràn el 18. con el 24. y otra vez el mismo 18. con el 20. Sumando pues las diferencias como está dicho, serà la suma 34. Digase aora: Si 34. dàn 60. onzas, luego 8. (que es la suma de las diferencias 4. 3. 1. que están al lado de los 24. quilates) daràn 14. onzas, y 2. 17. avos de oro 24. quilates.

Otra vez: Si 34. dàn 60. luego 8. (que es la suma de las diferencias 4. 3. 1. que están al lado de los 20. quilates) darán 14. onzas, y 2. 17. avos de oro de 20. quilates. Otra vez: Si 34. dán 60. luego 9. (que es la suma de las diferencias 5. 1. que estàn al lado de los 18. quilates) daràn 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 18. quilates. Otra vez: Si 34. dán. 60. luego 6. (que es la suma de las diferencias 5. y 1. que estàn al lado de los 16. quilates) daràn 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 16. quilates. Y assi mismo se hallaràn 10. onzas, y 10. 17. avos de oro de 15. quilates.

Con que tomando 14. onzas, y 2. 17. avos de oro de 24. quilates,

mas 14. anzas y 2. 17. avos de oro de 20. quilates; mas 10. onzas y 10. 17. avos de oro de 18. quilates; mas 10. onzas y 10. 17. avos de oro de 16. quilates; mas 10. onzas y 10. 27. avos de oro de 15. quilates, y mezclandolas, saldràn 60. onzas de oro de 19. quilates; de suerte, que aunque en esta resolucion las partes de la mezcla ayan salido diferentes de la antecedente, pero la suma, ò mezcla, siempre es la misma, recompensando la diversidad con tomar mas de una especie, que de otra.

Demonstracion.

Es la misma, que la del modo antecedente; porque en este modo de aligacion, se ligan las especies de dos en dos, que es hacer muchas Aligaciones; como en la operacion primera de la question immediate propuesta, ligando solos los 15. y 24. quilates; esto es, usando de las diferencias 4. y 5. sin atender á la otra deferencia 1. que està al lado de los 24. quilates, saldrian 12. onzas y 12. 19. avos de oro de 24. quilates, y 15. onzas y 15. 19. avos de oro de 15. quilates, las quales sumadas, hacen 28. onzas y 8. 19. avos de oro de 19. quilates, como està demonstrado en las Aligaciones Simples.

Asi mismo, ligando los 16. y 20. quilates, salen 9. onzas y 9. 19. avos de oro de 20. quilates, y 3. onzas y 3. 19. avos de oro de 19. quilates, cuya suma 12. onzas y 12. 19. avos, es de oro de 19. quilates. Del mismo modo ligando los 19. y 24. quilates solos; esto es, atendiendo solamente á la diferencia 1. que està al lado de los 24. quilates, saldrian 3. onzas y 3. 19. avos de oro de 24. quilates, y 15. onzas y 15. 19. avos de oro de 18. quilates, las quales juntas, hacen 18. onzas y 18. 19. avos de oro de 19. quilates; como todo està ya demonstado en las Aligaciones Simples.

Con que ligando las especies deste modo, saldràn diferentes mixtos todos de una misma perfeccion, pero compuestos de diferentes especies, como 28. onzas y 8. 19. avos de oro de 19. quilates, mixto de 24. y 15. quilates; mas 12. onzas y 12. 19. avos de oro de los mismos 19. quilates, compuesto de 16. y 20. quilates, mas 18. onzas y 18. 19. avos de oro, tambien de 19. quilates, mixto de 18. y 24. quilates. Y como estos tres mixtos, son de una misma especie, sumandolos, saldrá el mixto total de la misma especie de 19. quilates.

Examen.

572 La prueva de las operaciones de Aligacion Compuesta es tambien la misma, que la de Aligacion Simple (543) multiplican-

tando la cantidad del mixto 60. por cada diferencia tomada como està dicho, saldràn los productos 300. 180. 300. 60. 300. cuya suma es 1140. Multiplicando por otra parte la suma de las diferencias 19. por cada parte de la cantidad, saldràn los productos 300. 180. 300. 60. 300. cuya suma ha de ser igual à la otra suma 1140. como en efecto lo es.

573 Question 21. Pedro tiene tres generos de vino, uno de 15. sueldos el cantaro, otro de 10. y otro de 7. quiere mezclarlos, y añadir agua para hacer 80. cantaros que valgan 560. sueldos; preguntase quanto tomarà de cada uno? En esta question, y sus semejantes, lo primero se ha de saber quanto vale uno de los 80. cantaros que desea, partiendo los 560. sueldos por 80. y vendràn 7. sueldos, pues tanto vale el vino del mixto. Donde se ha de advertir, que si este quociente 7. fuere mayor que la especie mas alta, ò menor que la mas baxa; esto es, si estuviere fuera de los dos extremos, la question será imposible.

Hecho esto, disponganse los terminos como està dicho, poniendo un zero por la agua que ha de mezclar, y ligando las especies de dos en dos, de suerte, que ninguna diferencia aya zero, lo qual puede suceder siempre que ay una especie igual á la media (esto advierto, para que aya parte de cada especie en el mixto; porque si alguna diferencia fuesse zero, la especie de su lado, no entraria en la composicion del mixto:) Y asi se ligaràn los 15. y 0. poniendo las diferencias 7. y 8. en cruz; liguense los 10. y 0. poniendo tambien las diferencia 7. y 3. en cruz (este 3. ha de estár al lado de la diferencia 8. como està dicho) liguense ultimamente el 10. y el 7. escriviendo las diferencias 0. y 3. en cruz.

	15.	7.		20.	
	10.	7.	0.	20.	
7.					
	7.	3.		8.	$\frac{4}{7}$.
	0.	8.	3.	31.	$\frac{3}{7}$.
		28.		80.	

Ahora digase por regla de tres: Si 28. suma de las diferencias, dàn 80. cantaros, luego las diferencias 7. 7. 3. 11. daràn 20. cantaros de vino de 15. sueldos; 20. cantaros de vino de 10. sueldos; 8. cantaros y quatro septimos de vino de 7. sueldos, y 31. cantaros, y tres septimos de agua: Y tantos ha de tomar de cada especie.

Aqui es preciso advertir, que quando entre las especies que se han de mezclar, ay alguna de igual valor, ò perfeccion, que la especie media, si esta tal es una de las extremas; esto es, la ma-

yor,

yor, ò la menor, la question es imposible; como si de tres especies de vino de 15. 10. y 7. sueldos, se quiere hacer un mixto de 7. sueldos, serà imposible, porque si la especie menor, es de igual valor que la media, luego añadiendo por poco que sea, de las otras especies mas perfetas, saldrà un mixto de mayor valor, y perfeccion, que la especie menor, y por consiguiente mas perfeta que la especie media. Assi mismo, mezclando vino de 15. 10. y 7. sueldos para hacer vino de 15. sueldos, se pretende un imposible, porque si la especie mayor, vale lo mismo que el mixto; luego añadiendo algo de las otras especies mas imperfetas, saldrá el mixto de menos valor que 15. sueldos.

574 Question 22. Pedro quiere comprar 10. onzas de varias especies por 10. sueldos, en las quales ay canela á 4. sueldos la onza, clavos á 3. sueldos la onza, y pimienta à 8. dineros la onza; preguntase quanto tomarà de cada una? Primeramente se partiràn las 10. onzas que quieren comprar por los 10. sueldos de todas, y saldrá un sueldo por el valor de una onza del mixto. Y porque en esta question el precio de la pimienta, es dineros, resuelvanse los precios de las otras especies en dineros, comprehendiendo tambien el un sueldo de la media; con que la onza del mixto, valdrà 12. dineros; la de la canela 48. dineros; la de los clavos 36. dineros; y la de la pimienta 8. dineros.

Hecho esto liguense las especies por qualquiera de los dos modos antecedentes, y siguiendo la regla, saldràn 10. 17. avos de onza de canela; 10. 17. avos de onza de clavos, y 8. onzas, y 14. 17. avos de pimienta, y tanto ha de tomar de cada especie.

	48.	4.			$\frac{10}{17}$.
12.	36.	4.			$\frac{10}{17}$.
	8.	36.	24.	8.	$\frac{14}{17}$.
		68.		10.	

575 Question 23. Un Platero tiene 12. onzas de oro de 24. quilates; mas 4. onzas de oro de 20. quilates; mas 2. onzas de cobre; quiere mezclarlo todo, y desea seber de quantos quilates saldrá el mixto. En esta question, dadas las especies, y las partes de la cantidad, se busca la especie media. Escrivanse las especies, y cantidades como se vè, y multiplicando cada especie por su cantidad, saldràn los productos 288. 80. y 0. cuya suma 368. se partirà por la suma 18.

Especies.	Cantidades.	Productos.
24.	12.	288.
20.	4.	80.
0.	2.	0.
20. $\frac{4}{9}$.	18.	368.

de

de las cantidades, y el quociente 20. y quatro novenos, serà la especie media, ò los quilates de la mezcla que se desean saber.

Advierto aqui, que si esta question se examina por las antecedentes; esto es, escriviendo la especie media en su lugar, sacando las diferencias, y buscando las cantidades, como si no estuvieran conocidas, no siempre se hallaràn las mismas cantidades, aunque siempre todas juntas, haràn la misma suma 18. porque como qualquier question de Aligacion Compuesta, puede tener infinitas respuestas, no es facil, que en la primera solucion se hallen las referidas cantidades.

576 Question 24. Un Platero tiene 56. onzas de oro de 16. quilates compuesto de quatro especies, de las quales solas conoce las tres, que son 12. onzas de oro de 22. quilates: 4. onzas de 20. quilates; y 16. onzas de 15. quilates, pidense los quilates de la especie no conocida.

Escrivanse las tres especies, y cantidades conocidas como antes, tirese una linea, y debaxo las especies, ponganse los 16. quilates de la especie media, ò de las 56. onzas, que tambien se escriviràn debaxo las cantidades; multipliquese cada especie por su cantidad, y tirando otra linea, escrivase la suma 32. de las tres primeras cantidades debaxo ellas mismas, y assi mismo se escrivirà la suma 584. de los tres primeros productos 264. 80. 240. debaxo tambien de los mismos productos.

22.	12.	264.
20.	4.	80.
15.	16.	240.
16.	56.	896.
	32.	584.
13.	24.	312.

Restense aora la suma 32. de los 56. y quedaràn 24. onzas. Restese assi mismo el producto 584. del producto 896. y quedaràn 312. los quales partidos por 24. daràn 13. con que la quarta especie son 24. onzas de oro de 13. quilates.

577 Question 25. Un congio, que es un vaso cubico de medio piè geometrico, lleno de miel, pesa 180. onzas; de agua, 120. onzas; de aceyte, 108. onzas, como consta por la 2. parte de los Proemiales; preguntase: Si se llenasse destos tres licores juntos, quanto se pondria de cada uno, para que pesasse 130. onzas? Siguiendo

	180.	22.	10.	31. $\frac{68}{132}$.
130.	120.	50.		49. $\frac{32}{132}$.
	108.	50.		49. $\frac{32}{132}$.
		132.		130.

do las reglas de Aligacion como se vè en la formula, saldrán 31. onzas, y 68. 132. avos de miel, 49. onzas y 32. 132. de agua; y 49. onzas y 32. 132. avos de aceyte.

Lo mismo es en las otras especies, y aunque no se aya de llenar el congio, sino hacer otro qualquier cuerpo; como si un cañon de artilleria calza una bala de plomo de 1361. onzas y un quarto, otra de cobre de 1065. onzas, y otra de estaño comun de 877. onzas y media, para saber la quantidad de cada metal, que se ha de mezclar para hacer una bala para el mismo cañon, que pese 1000. onzas, se obrarà del mismo modo, que en la question antecedente.

578 Question 26. En cierta capilla ay una lampara de plata, que pesa 100. onzas, la qual se ha de vender, y hacer otra del mismo tamaño mezclada de cobre, laton, y estaño puro, preguntase quanto se mezclarà de cada especie? Para resolver esta question, y sus semejantes, primeramente se ha de saber quanto pesaria cada lampara de solo cobre, laton, ò estaño puro, lo qual se conocerà por la proporcion de los metales, como se hizo arriba (489) diciendo por regla de tres: Si 1127. onzas y media de plata (que es el numero de la tabla de los Procmiales) son iguales en la magnitud, 1065. onzas de cobre; luego las 100. onzas de la lampara de plata, seràn iguales á 94. onzas y 206. 451. avos, y tanto pesaria la lampara de cobre siendo del mismo tamaño, que la de plata.

Otra vez: Si 1127. onzas y media de plata, son iguales en el tamaño à 1012. onzas y media de laton, luego 100. onzas de la lampara, seràn iguales à 89. onzas y 361. 451. avos, que es el peso de la lampara de laton de la misma magnitud, que la de plata. Ultimamente: Si 1127. onzas y media de plata, son iguales en la grandeza à 862. onzas y media de estaño puro; luego las 100. onzas de la lampara de plata, seràn iguales à 76. onzas y 224. 451. avos, que es el peso de la lampara de estaño puro del mismo tamaño, que la de plata.

Hecho esto, liguense los pesos de las lamparas de cada especie, y porque el peso del mixto no se señala, le puede el Arithmetico determinar á su gusto; pero con tal condicion, que sea medio entre los pesos de las especies dadas, y assi supongo, que la lampara mixta, ha de pesar 80. onzas: Sigo aora la regla de la question antecedente, y hallarè las cantidades, ò partes de la mezcla, que deseava.

579 Question 27. Un Polvorista tiene 10. libras de polvora de 6. as, y as; 12. libras de 5. as, y as; 20. de 4. as, y as, las quales quie-

quiere mezclar, y desea saber de que genero de polvora saldrà el mixto.

Esta question es la misma que la 23. (575) solo con la diferencia, que aqui las especies se han de escrivir en forma de quebrado; como en la question 18. (581). Multiplicando, pues, cada especie por su cantidad, sumense los productos, cuya suma (abreviando el quebrado) se partirà por la suma 42. de las cantidades, y el quociente 1235. 1764. avos, será el quebrado de la polvora mixta, cuyo numerador denota el salitre, y el denominador toda la composicion de la polvora.

Especies.	Cantidades.	Productos.
$\frac{6}{8}$	10.	$\frac{60}{8}$
$\frac{5}{7}$	12.	$\frac{60}{7}$
$\frac{4}{6}$	20.	$\frac{80}{6}$
$\frac{1235}{1704}$	42.	$\frac{1235}{47}$

Y assi, restando el salitre 1235. de la composicion de la polvora 1764. quedaràn 529. por la suma del carbon, y azufre. Dividase en dos partes iguales; la una 264. y media, será la porcion del carbon; y la otra el azufre. Partase el salitre 1235. por la porcion del carbon, y saldràn 4. y 354. 529. avos, y de tanto salitre as y as es la polvora mixta.

PARTE IV.

DE LAS REGLAS DE FALSAS POSICIONES.

580 REGLA de *falsa posicion*, ò *suposicion*, llaman comunmente los Arithmeticos à una regla de tres, fundada en uno, ò dos numeros supuestos, los quales procediendo segun el tenor de la question no la satisfacen, pero por la regla de tres se alcanza la verdad. Como si se pide un numero, que añadiendole su mitad haga 12. como por suposicion el 6. cuya mitad es 3. la qual añadida al mismo 6. hace 9. Y pues avia de hacer 12. es cierto que la suposicion no satisface à la pregunta. Y assi digo por regla de tres: Si 9. provienen de 6. luego 12. vendràn de 8. que es el numero que se busca, cuya mitad 4. añadida al mismo 8. hace 12.

Esta

Esta regla, que como dice, comunmente llaman de falsa posicion, no està fundada en numero falso, porque en la realidad no ay tal numero, pues todos son verdaderos numeros, solo puede ser falso el acto de entendimiento que atribuye à un numero lo que no tiene, como quando uno dice *Pedro es Arbol*, entonces ni Pedro, ni el Arbol son cosas falsas, sino el acto de entendimiento, que atribuye à Pedro el ser Arbol. Ni quando un Pintor, siguiendo la proporcion, de una imagen pequeña, copia una grande, se dice, que la imagen pequeña es falsa, sino que ha servido de exemplar. Lo mismo digo desta nuestra regla, por lo qual no se què motivo han tenido los Arithmeticos para añadir aquella palabra *falsa*, bastava decir *Regla de posicion*. Pero vamos al caso, que hemos de hablar conforme todos hablan.

La regla de falsa posicion es en dos modos: la una *Simple*, en la qual solo se supone un numero; y la otra es *Compuesta*, que necessita de dos suposiciones. Qualquier question de suposicion simple se puede resolver por la compuesta, pero no al contrario. Y assi parece que bastaria dar solamente la regla de posicion compuesta, pues en ella se encierra la simple; pero como por la simple se resuelven muchas questiones mas facilmente que por la compuesta, por esso explicarèmos la una, y otra. Pero advierto, que estas reglas no son generales; como algunos piensan, de suerte, que les parece, que teniendo la pregunta alguna semejanza, ò apariencia de falsa posicion, ya se ha de poder resolver por esta regla; siendo assi, que ay innumerables questiones destas, que solo se pueden resolver por la Algebra, sin que les alcance la industria, y sutileza destas reglas.

Y para que el Arithmetico no se desvele en pretender impossibles, tenga esta advertencia general para entrambas posiciones, mientras que damos otras, que quando el numero que se busca ha de multiplicarse por sì mismo, ò por su parte, ò una parte suya por la otra comparte, ò se ha de sacar alguna raìz, entonces la question necessita de Algebra, y por ninguna de las posiciones se puede resolver.

POSICION SIMPLE.

581 Tomese un qualquier numero (el que pareciere mas à proposito) suponiendo que es el que se busca, y assi se llamarà *Suposicion*, ò *Hypothesis*, en el qual se procederà obrando segun el tenor de la question; esto es, sumando, restando, &c. conforme lo expressa la pregunta. Y si el numero que saliere satisface à la question, es cierto que la suposicion es el mismo numero deseado;

do; pero si no, se ha de buscar por regla de tres, en cuyo primer lugar estarà el numero, que obrando segun el tenor de la pregunta, procediò de la suposicion. En segundo lugar estarà la suposicion. Y en el tercero el numero dado en la question. Pues resolviendo la regla el quarto numero, serà el deseado.

Quando la pregunta procede por partes de un numero incognito, para facilitar la operacion reduzganse los quebrados à un comun denominador (154), y tomando el denominador nuevo, ò comun por suposicion, tendrá las partes deseadas, y se obrará como antes.

Pero porque todas las questiones no se pueden resolver por simple posicion, será necessario atender á esta regla; que quando el numero hallado, segun el tenor de la pregunta, tiene à la suposicion la misma razon que el numero dado en la question, àl que se busca, entonces la pregunta se puede resolver por una simple posicion; pero no se podrà resolver, si no guardan la dicha proporcion.

Y porque no siempre se puede claramente conocer si guardan la dicha proporcion, ò no, se entenderá à esta señal mas manifiesto: Siempre que procediendo, segun el tenor de la question, se ha de sumar, ò restar algun numero dado en la misma question, es cierto que por simple posicion no se puede resolver la pregunta, sin reducirla primero.

582 Question 1. Uno, preguntando à otro quantos años tenia, respondiò, que si à sus años añadia los dos tercios, serian 100. Preguntase aora quantos años tendria? Tomese un qualquier numero por suposicion, que tenga tercio, el qual puede ser el denominador 3. del quebrado señalado dos tercios; añadiendo, pues, los dos tercios del 3. al mismo 3. esto es, el numerador del quebrado al denominador, son 5. y pues avian de ser 100. es cierto que la suposicion, ò numero 3. no es el que se busca. Digase, pues, por regla de tres: Si 5. que es el numero hallado, provienen de la suposicion 3. luego 100. que es el numero dado en la question, vendrán de 60. y tantos años tenia.

Demonstracion.

El numero 5. que resulta de aver procedido en la suposicion 3. segun el tenor de la question, es semejante al numero dado 100. porque tiene las mismas partes proporcionales; esto es, assi como los dos tercios 2. de la suposicion 3. se han añadido al mismo 3. y han hecho 5. del mismo modo los dos tercios 40. del numero que se busca 60. se han añadido al mismo 60. y han hecho 100. con que 5. y 100. son numeros semejantes, cuyas partes 2. y 40. tambien son semejantes, assi como las supo-

posiciones 3. y 60. que son las compartes de los numeros 5. y 100. Luego son proporcionales como 5. à 3. assi 100. à 60. Luego por regla de tres se conoce el numero que se busca.

583 Question 2. Ay un Caliz de oro con su patena de lo mismo, cuyo piè pesa dos tercios de todo el oro; la copa pesa un quarto, tambien de todo el oro, la patena pesa 10. onzas; preguntase quanto pesa todo. Tomese un qualquier numero por suposicion, que tenga tercio, y quarto, el qual se hallará facilmente, multiplicando los denominadores 3. y 4. de los quebrados, y serà 12. cuyos dos tercios, que suponen por el peso del piè, son 8. y el quarto, que supone por el peso de la copa es 3. que sumados hacen 11. restense de 12. y queda 1. que supone por el peso de la patena; y pues èsta pesa 10. onzas, es claro que el numero 12. tomado por suposicion, no satisface à la pregunta. Digase, pues, por regla de tres: Si 1. vienen de 12. luego las 10. onzas de la patena vendràn de 120. y tantas onzas avia de oro en todo el Caliz, y Patena.

Mas facilmente se puede hacer lo mismo. Sumense los quebrados, y seràn 11. 12. avos, restese el numerador 11. que supone por el Caliz sin la Patena (pues son las partes señaladas que constituyen el peso del Caliz solo) del denominador 12. que supone por el Caliz, y Patena, y en la resta 1. hagase la misma regla de tres. Pero advierto en esta, y sus semejantes, que si el numerador de la suma de los quebrados es mayor que el denominador, la question es imposible; porque entonces la suma de las dos partes del Caliz solo, pesaria mas que el mismo Caliz solo, lo qual es imposible, que es lo mismo pue decir, que quando la suma de las partes dadas en la question es mayor que la unidad, y se ha de restar del numero en ella expressado, es imposible la question; como si se pide un numero, del qual restado sus dos tercios, y tres quartos queden 10. si supongo que son 12. restando los dos tercios 8. y los tres quartos 9. de 12. no se puede.

585 Question 3. Cierto Mercader no pudiendo pagar con dinero los derechos de ciertas ropas, pagò los dos octavos con tafetan, los quatro novenos con lienzo, los dos septimos con rasos, y por lo que faltava à cumplimiento de todos los derechos diò 10. varas de terciopelo à 30. reales la vara; preguntase quanto importavan los derechos. Esta question es como la passada. La suma de los quebrados abreviada es 247. 252. avos, restando el numerador del denominador quedan 5. y pues avian de quedar 300. (que es el valor de las 10. varas de terciopelo), digase por regla de tres: Si 5. vienen

del

del denominador 252. que es la suposicion; luego 300. reales vendràn de 15120. reales, tanto importaron los derechos.

585 Question 4. Uno pregunta à otro quantos años tenia, el qual respondiò que no lo sabia; pero que si à los años que tenia añadian su quinto, y dozavo, y de la suma quitavan el septimo, quedarian 54. Preguntase quantos eran los años? Reducidos los quebrados un quinto, y un dozavo á un comun denominador (154), serán 12. 60. avos; y 5. 60. avos; y tomando el comun denominador 60. por suposicion, tendrà quinto, y dozavo, que son los mismos numeradores 12. y 5. añadanse à la suposicion 60. y seràn 77. quitese el septimo, y quedarán 66. avian de quedar 54. luego la suposicion no satisface à la duda; y assi, por regla de tres, se hallarà la solucion: Si 66. vienen de 60. luego 54. años vendrán de 49. años, y un onzeavo, y tantos años tenia.

586 Question 5. Entre tres Mercaderes deven 600. doblones; el primero deve doblado que el segundo, y el tercero tresdoblado (*) que el segundo; preguntase quanto deve cada uno? Porque el primero deve doblado que el segundo, comienzo la operacion por el segundo, suponiendo, que deve 10. doblones: luego el primero deverà 20. y el tercero 30. La suma de las tres partidas es 60. al qual avia de ser 600. pues digo por regla de tres: Si 60. vienen de la suposicion 10. luego 600. doblones vendràn de 100. doblones que devia el segundo; los quales doblados son 200. que es la deuda del primero; y tresdoblados son 300. que es la deuda del tercero.

587 Question 6. De un Exercito mataron la tercera parte, tomaron prisioneros la quarta parte, huyeron 10000. Preguntase de quantos Soldados constava el Exercito, quantos murieron, y quantos fueron los prisioneros? Tomese por suposicion qualquier numero que tenga las partes señaladas en la pregunta, y para hallarle con facilidad reduzganse los quebrados un tercio, y un quarto á un comun denominador, como se ha hecho en otras questiones, los quales son quatro dozavos, tres dozavos; pues el denominador comun 12. tendrà las partes señaladas en la pregunta, las quales son los mismos numeradores 4. y 3. que es el quarto, y tercio. Aora sumense los numeradores, ò partes tercia, y quarta, y seràn 7. que suponen por la suma de los muertos, y prisioneros, y restese el 7. de 12. y quedaràn 5. que suponen por los huidos. Y assi, en esta suposicion los muertos fueron 4. los prisioneros 3. y los huidos 5. Y pues los huidos avian de ser 10000. digase por regla de tres: Si 5. vienen de la suposicion 12. luego 10000. vendràn de 24000. y de tantos Solda-

X dos

(*) En lugar de decir "tresdoblado", digase "triplo" para mejor decir.

dos constava el Exercito, cuyo tercio 8000. es de los muertos, y el quarto 6000. de los prisioneros.

588 Question 7. Si el numero de los soldados que ay en una Fortaleza se aumentàra su tercio, y se añadieran 100. serian entre todos 3000. preguntase quantos Soldados ay en dicha Fortaleza? Esta question, y sus semejantes no se puede resolver por una simple posicion sin reducir primero los terminos; porque procediendo segun el tenor de la question, se ha de sumar el numero 100. que està dado en la misma pregunta. El modo de reducirla es este: Porque el numero 100. se ha de sumar, segun el tenor de la pregunta, restese de los 3000. y quedaràn 2900. y si se huviera de restar, entonces se sumaria con los mismos 3000.

Reducida ya la question, serà del tenor siguiente: Si el numero de los Soldados se aumentàra su tercio, serian 2900. preguntase quantos son? Aora tomase un numero que tenga tercio, como es el 3. cuyo tercio 1. añadido al mismo 3. hace 4. Digo, pues, por regla de tres: Si 4. vienen de 3. luego 2900. vendràn de 2175. que es el numero de los Soldados. La prueva es, que se añada su tercio 725. y haràn 2900. y añadiendo 100. seràn 3000.

La razon porque procediendo segun el tenor de la question, si se ha de sumar, ò restar un qualquier numero dado en la misma pregunta, no se puede resolver por una simple posicion sin reducirla, como queda advertido arriba, es manifiesta; porque procediendo en la suposicion, segun el tenor de la pregunta, se vàn buscando numeros proporcionales à los que dice la pregunta; de suerte, que el numero hallado, segun el tenor de la pregunta tenga la misma razon al numero dado en la misma pregunta, que la suposicion al numero que se busca, que es alternar la proporcion que señalamos arriba (581). Y como añadiendo, ó restando numeros iguales à los terminos de qualquier razon de desigualdad se muda la dicha razon ( ), esta es la causa porque sumando, ò restando algun numero dado en la pregunta no se puede resolver por simple posicion, pues que no salen numeros proporcionales, como avian de salir. Pero haciendo la reduccion, se puede resolver por esta regla de posicion simple, que està ya quitado el impedimento.

589 Question 8. Un Mercader comprò ciertas varas de tafetàn por ciertos reales, y aviendole preguntado el numero de las varas, y reales, respondiò, que si del numero de las varas quitassen sus dos septimos, y añadiessen 4. quedaria 60. pero si al numero de reales añadiesse sus tres quintos, y un octavo, menos 40. harian 1340. reales; preguntase quantas eran las varas, y reales?

Para

Para responder à la pregunta de las varas resto primero los 4. que dice que se añadan de los 60. y quedarán 56. y la question serà la misma que buscar un numero que restandoles sus dos septimos sea la resta 56. Tomo, pues, el denominador 7. por suposicion, y quitandole sus dos septimos, que es el numerador, quedaràn 5. y porque avian de quedar 56. digo por regla de tres: Si 5. vienen de 7. luego 56. vendràn de 78. y dos quintos, que es el numero de las varas; del qual si se restan sus dos septimos, que son 22. y dos quintos, quedaràn 56. y añadiendo 4. son 60.

Aora para conocer el numero de los reales, porque la pregunta dice menos 40. (que es lo mismo que restar 40.) añadanse à los 1340. reales, y seràn 1380. y la question serà la misma que buscar un numero, que añadiendole sus tres quintos, y un octavo, sean 1380. Reducidos, pues, los quebrados à un comun denominador, seràn 24. 40. avos, y 5. 40. avos; y tomando el comun denominador 40. por suposicion, añadanse sus tres quintos, y octavo; esto es, 24. y 5. que son los mismos numeradores, y seràn 69. Digase aora por regla de tres: Si 69. vienen de 40. luego 1380. vendrán de 800. y tantos fueron los reales del empleo; pues añadiendo 480. que son los tres quintos, y 100. que es el octavo, hacen 1380. y quitando 40. quedan 1340. que es el numero dado en la question.

590 Question 9. Quatro Mercaderes ganaron en una compañia tal cantidad de reales, que de todos ellos cupo al primero tres septimos, al segundo tres octavos, al tercero un sexto, y al quarto 700. reales; pidese quantos eran todos los reales. Reducidos los quebrados à 144. 336. avos, 126. 336. avos, 56. 336. avos, tomese el denominador comun 336. por suposicion, cuyos tres septimos, tres octavos, y un sexto son los mismos numeradores, cuya suma resto de la dicha suposicion 336. y quedan 10. Y porque avian de quedar 700. para el ultimo Mercader, digo por regla de tres: Si 10. vienen de 336. luego 700. vendrán de 23520. y tantos reales ganaron los quatro Mercaderes.

591 Question 10. A un maestro preguntaron quantos discipulos tenia, el qual respondiò, que si al numero de sus discipulos se añadian otro tanto, y mitad, tercio, y quarto del mismo numero, y uno mas, serian 112. preguntase quantos discipulos tenia. Primeramente restese 1. de 112. porque dice *mas*, que es sumar, y quedarán 111. Aora reducidos los quebrados á un comun denominador, serán 12. 24. avos, 8. 24. avos, 6. 24. avos, y tomando el 24. por suposicion, doblese primero, y despues añadanse su mitad 12. su tercio

cio 8. y su quarto 6. que son los mismos numeradores, y serán 74. Y pues avian de ser 111. digase por regla de tres: Si 74. vienen de 24. luego 111. vendràn de 36. y tantos discipulos tenia; pues si les doblamos seràn 72. y añadiendo su mitad 18. su tercio 12. y su quarto 9. y mas 1. seràn 112.

592 Question 11. Un Labrador queriendo hacer moler 500. barchillas de trigo, fue á un Molino donde avia 5. muelas, la primera de las quales en cada una hora muele 7. barchillas; la segunda 5. la tercera 4. la quarta 3. la quinta 1. Desease saber en quanto tiempo se molerà todo el trigo, si á todas las muelas se les dà que moler à un tiempo, y quanto molerà cada una.

Supongo que todo el trigo se molerà en 4. horas. Multipliquese la suposicion 4. por el numero de las barchillas que muele cada muela, y saldrà las barchillas, que molerà cada una en las 4. horas; y assi, la muela primera en las dichas 4. horas molerà 28. barchillas; la segunda molerà 20. barchillas; la tercera 16. la quarta 12. y la quinta 4. sumense todas, y seràn 80. Pues porque avian de ser 500. es cierto que la suposicion 4. no satisface à la pregunta; y assi digo por regla de tres: Si 80. vienen de 4. horas, luego 500. vendràn de 25. horas, y en tanto tiempo moleràn todas las cinco muelas las 500. barchillas de trigo.

Para hallar las barchillas que molerá cada muela, multipliquense las 25. horas halladas por las barchillas que muele cada muela en una hora, y se hallarà, que la primer muela molerà 175. barchillas; la segunda 125. la tercera 100. la quarta 75. la quinta 25. y tantas barchillas se han de dàr para moler à cada muela.

593 Question 12. Pedro se puso á jugar tres veces; en la primera tresdoblò el dinero, de suerte, que hallò tres veces mas dinero que el que tenia quando se puso à jugar; en la segunda hallò cinco veces mas que quando comenzò el juego; en la tercera hallò quatro veces mas, y aviendo contado el dinero, tenia 40. reales; preguntase con quanto dinero se puso à jugar?

En esta question se busca un numero, que multiplicado por 3. por 5. y por 4. sea el producto 40. Supongo, pues, que el numero que se busca, es 10. el qual multiplicando por 3. hace 30. y este multiplicado por 5. produce 150. y ultimamente este multiplicado por 4. hace 600. Pero porque en la question se dice, que despues de los tres juegos tenia 40. reales, es cierto, que la suposicion tomada, no satisface à la pregunta. Pues digase por regla de tres: Si 600. vienen de 10. luego 40. vendràn de dos tercios de real, y con tanto dinero

se

se puso la primera vez á jugar. Y asi, porque multiplicando dos tercios por tres, salen 2. los quales multiplicados por 5. son 10. y ultimamente multiplicados por 4. salen los 40. reales que tenia despues de los tres juegos. (+)

594 Question 13. Preguntaron á Pedro quantos reales tenia, el qual no queriendo responder claramente, dixo, que tenia tres partidas, la primera era la mitad de la suma de las otras dos, la segunda era el tercio de la suma de las otras dos, y la tercera era de 189. reales; preguntase aora quantos reales avia en la primera, y segunda partida?

Si atentamente consideramos esta pregunta, verèmos, que la primera partida, era el tercio de la suma de todas tres, por ser mitad de la suma de las dos; asi mismo, la segunda partida, es el quarto de todas tres, porque es un tercio de las otras dos: Y asi se ha de buscar un numero, que quitandole el tercio, y un quarto, queden 189. Reducidos, pues, los quebrados à un comun denominador, seràn 4. dozavos, y 3. dozavos, y tomando el 12. por suposicion restense los denominadores 4. y 3. del mismo 12. y quedaràn 5. digase aora por regla de tres: Si 5. vienen de 12. luego 189. vendràn de 453. y tres quintos por la suma de las tres partidas, de la qual se tomaràn el tercio, y quarto, y saldrá la primer partida 151. y un quinto, la segunda 113. y dos ~~tercios~~ quintos, y la tercera, serà 189.

595 Question 14. Pedro se jugò el un tercio de su dinero, diò de limosna el un quarto de lo que le quedava; hallòse despues con 10. reales; preguntase quanto tenia antes? Reducidos los quebrados à un comun denominador, seràn 4. dozavos, y 3. dozavos. Aora tomo el comun denominador 12. por suposicion, y quitandole su tercio, que es 4. quedan 8. cuyo quarto es 2. restados del mismo 8. quedan 6. Digo pues: Si 6. vienen de 12. luego 10. vendràn de 20. y tantos reales tenia al principio; lo qual es asi, porque quitando el tercio de 20. de los mismos 20. quedan 13. y un tercio, cuyo quarto 3. y un tercio, restado de los mismos 13. y un tercio, quedan 10.

596 Question 15. Pidese que este numero 200. se reparta en tres partes, de suerte, que la primera sea doblada de la segunda, y esta tresdoblada de la tercera. En semejantes preguntas, es conveniente comenzar por la menor, suponiendo que sea 1. Supongo pues, que la parte tercera es 1. la segunda serà 3. y la primera 6. sumando 1. 3. 6. son 10. y porque avian de ser 200. digo: Si 10. vienen de

.1. luego 200. vendràn de 20. que serà la parte tercera, tresdoblados, seràn 60. por la parte segunda, y estos doblados, seràn 120. por la parte primera, y todos juntos son 200.

Posicion Compuesta.

597 Esta regla de suposicion compuesta, ò de dos falsas suposiciones, es mucho mas universal que la antecedente; porque como està dicho, todas las questiones que se pueden resolver por una simple posicion, se pueden tambien por dos, y à mas dellas, otras muchas que no tienen lugar en la simple posicion, aunque muchissimas necessitan de Algebra, ò arte mayor. Pero antes que passemos á explicar la regla, es necessario advertir, que los Arithmeticos aqui suelen usar de dos señales: El uno es este ✳ que significa *Mas, Suma, ò Excesso*: En otro es este — que denota *Menos, Resta, ò Defecto.*

598 Esto supuesto, assi se ha de ordenar esta regla: Tomese un qualquier numero por suposicion (aquel que pareciere mas conveniente) suponiendo que es el què se busca, y procediendo en èl segun el tenor de la question, ò satisface á ella, ò no: Si satisface, està yá conocido el numero que se busca, el qual es la misma suposicion; pero si no satisface, ò falta, ò excede; si falta, escrivase el defecto al lado derecho de la suposicion con el señal —. Si excede, escrivase el excesso al dicho lado con èl señal ✳.

Tomese otro qualquier numero por suposicion, el qual se escrivirá debaxo la suposicion primera, y procediendo en èl, segun el tenor de la question, ò satisface à ella, ò no. Si satisface esta suposicion, es el numero que se busca, y no es menester passar adelante la operacion; pero si no satisface, escrivase, el defecto, ò excesso al lado de la suposicion con el señal ✳ ò — como està dicho antes.

Aqui es menester advertir, que al sobredicho excesso, ò defecto, llaman los Arithmeticos *Error.* Y si en las dos suposiciones ay un mismo señal; esto es, si en entrambas ay defectos, ò excessos, los errores son semejantes, pero si ay diferentes señales; esto es, si en una suposicion ay excesso, y en la otra defecto, ò al contrario, son los errores desemejantes.

599 Esto supuesto, ò los errores son iguales, ò desiguales; si iguales (lo qual solamente puede suceder quando son desemejantes) se hallará el numero que se busca facilmente, sumando las suposiciones, y tomando la mitad de la suma: Pero si son desiguales, se hallará por regla de tres, en cuyo primer lugar estarà la diferencia

de

se

de los errores, si son semejantes, ò la suma de los mismos quando son desemejantes; en segundo lugar, se pondrá la diferencia de las suposiciones; en el tercero estará uno de los dos errores qualquier que sea. Y el numero que saliere por la regla de tres, se sumará con la suposicion, cuyo error se ha tomado en tercer lugar, si tiene el señal — y se restará si tiene el señal ✳; y la suma, ò resta, será el numero que se busca.

Esta regla replicada de otro modo, es la que traen algunos Autores, la qual es del tenor siguiente: Multipliquese la diferencia de las suposiciones por qualquiera de los errores: el producto dividase por la diferencia de los errores si son semejantes, ò por la suma, si desemejantes, y añadiendo el quociente à la suposicion que está al lado del error multiplicado, quando el dicho error es por defecto, ò restando el dicho quociente de la misma suposicion, quando el error es por excesso, la suma, ò resta dará la verdad.

Para facilitar la operacion, será conveniente tomar numeros pequeños por suposiciones, y que solo se diferencien en una unidad, porque quando la diferencia de las suposiciones es 1. se resuelve la regla de tres con sola division, como estará manifiesto à quien atentamente lo considerare. Pero sobre todo se han de tomar tales suposiciones, que sin quebrados puedan proceder, segun el tenor de la question para evitar el cansancio.

600 Y para que el Arithmetico no se canse en querer resolver muchas questiones que no tienen lugar en esta regla, sepa, que por ella solamente se pueden resolver las questiones, en las quales la diferencia, ò suma de los errores (segun se dixo antes) tiene la misma razon à la diferencia de las suposiciones, que un qualquier error al defecto, ò excesso de su suposicion. Y porque esto no siempre está claro, advierta, à mas de lo que está dicho arriba (580) que siempre que de dos suposiciones salen mas de dos errores (como en esta question: Buscar un numero, que dividido por 2. 3. 4. 5. 6. reste siempre 1. y dividido por 7. quede zero) no se puede resolver la question por esta regla. Tampoco se podrá resolver, quando siendo los dos errores por defecto, el error de la suposicion mayor, es menor que el de la suposicion menor, ò quando siendo por excesso, el error de la suposicion mayor, es mayor, que el de la menor. Ultimamente, si procediendo en dos suposiciones, segun el tenor de la question, no se halla la verdad, tampoco se hallará por qualquiera otras suposiciones.

601 Question 16. Tres Mercaderes han ganado 400. rea-

les, pero claramente no ſe ſabe quanto ha ganado cada uno; ſolo ſe tiene noticia, que la ganancia del ſegundo, excede à la ganancia del primero en 12. reales, y la ganancia del tercero excede à la del ſegundo en 16. reales; preguntaſe quanto ganò cada uno.

Supongo que la ganancia del primero es 100. y porque el ſegundo ganò 12. mas, añadoles, y ſerá 112. la ganancia del ſegundo. Y pues el tercero ganò 16. mas, añadoles, y ſerá 128. la ganancia del tercero. Sumo las tres ganancias, y ſon 340. los quales avian de ſer 400. luego faltan 60. Eſcrivo pues la ſupoſicion 100. y à ſu lado el defecto 60. con el ſeñal —. Toma otra ſupoſicion, haciendo cuenta, que el primero ganò 140. luego el ſegundo ganaria 152. y el tercero 168. las quales ſumadas, ſon 460. y pues avian de ſer 400. excede en 60. Eſcrivo la ſupoſicion 140. y al lado el error 60. con el ſeñal ✻.

100 — 60.
140 ✻ 60.

Eſto ſupueſto, porque los errores ſon iguales, no tengo que gaſtar tiempo en paſſar adelante la operacion, ſino es ſumar las ſupoſiciones 100. y 140. y de la ſuma 240. tomar la mitad 120. y eſte es el numero que ſe buſca; porque ſiendo los errores iguales, el numero que ſe buſca neceſſariamente, ha de eſtar entre medio de las ſupoſiciones, porque diſtando los errores igualmente del medio, tambien han de diſtar las ſupoſiciones.

602 Hagamos otras ſupoſiciones, y primeramente ſupongo, que la ganancia del primero es 1. añadiendo 12. ſerá 13. la ganancia del ſegundo; y añadiendo 16. ſerán 29. la ganancia del tercero, ſumando las tres ganancias ſalen 43. reales, haſta 400. que avian de ſalir, ván 357. que es el error por defecto; eſcrivo pues la ſupoſicion 1. y à ſu lado el error 357. con el ſeñal —. Otra vez ſupongo, que la ganancia del primero es 2. luego la del ſegundo ſerá 14. y la del tercero 30. la ſuma de las tres es 46. avian de ſer 400. luego ſe ha errado de 354. Eſcrivo la ſupoſicion 2. y à ſu lado el error 354. con el ſeñal — porque es por defecto.

1 — 357.
2 — 354.
____
1 — 3.

Hecho eſto, porque los errores ſon ſemejantes, reſtoles para hallar la diferencia, que es 3. la qual eſcrivo debaxo los errores, eſcrivo tambien la diferencia de las ſupoſiciones, la qual es 1. Aora ſigo la regla, diciendo: Si 3. diferencia de los errores, vienen de 1. diferencia de las ſupoſiciones; luego un error 357. vendrà de 119. y pues el error que ſe ha tomado, tiene el ſeñal — ſumeſe el nume-

ro

ro 119. con la ſupoſicion 1. cuyo es el error, y ſaldrá él numero 120. que es el que ſe buſca.

Aviendo tomado la ſegunda ſupoſicion diferente de la primera en ſola una unidad, ſe evita la regla de tres, porque el ſegundo termino, es unidad, que no aumenta la multiplicacion, y aſsi baſta partir el error 357. por la diferencia de los errores 3. y ſaldrá el miſmo numero 119.

Demonſtracion.

603 Antes de entrar à la demonſtracion, es neceſſario advertir la doctrina ſiguiente, originada de los Theoremas 29. 30. 31. 32. y 33. de la Theorica de las razones. Es à ſaber, que los errores de las poſiciones, ſon proporcionales à los errores de los numeros que ſalen procediendo, ſegun el tenor de la queſtion; como en el exemplo propueſto las ſupoſiciones ſon 1. y 2. cuyos errores, ò diferencias, haſta el numero verdadero 120. ſon 119. y 118. los numeros que han procedido de dichas ſupoſiciones, ſegun el tenor de la queſtion, ſon 43. y 46. cuyos errores haſta el numero 400. que avia de ſalir procediendo en el numero verdadero 120. ſegun el tenor de la pregunta, ſon 357. y 354. Digo pues, que eſtos quatro numeros 119. 118. 357. y 354. ſon proporcionales; eſto es, como 119. à 118. aſsi 357. à 354.

Porque procediendo ſegun el tenor de la queſtion, ſolamente ſe pueden hacer quatro operaciones, que ſon ſumar, reſtar, multiplicar, y partir; eſto es, las ſupoſiciones, ſe han de ſumar con otro numero, reſtar, &c. Sumando, pues, ò reſtando las diferencias, ſon las miſmas (375). Multiplicando, y dividiendo, ſon las dichas diferencias proporcionales. (376) Luego ſiempre ſon proporcionales con razon de igualdad, ò de deſigualdad.

Eſto ſupueſto, paſſemos à la demonſtracion, y para declararla mejor, ſupongo que el numero que ſe buſca, eſtà conocido, y es 120. y aſsi los errores de las ſupoſiciones ſon 119. y 118. como ſumando cada error deſtos con ſu ſupoſicion, conſtituya al numero 120. ſeràn eſtos quatro numeros 2. 1. 119. 118. arithmeticamente proporcionales; eſto es, ſerà la diferencia de las ſupoſiciones 2. y 1. igual à la diferencia de los errores 119. y 118. (375). Y pues los errores 119. y 118. de las ſupoſiciones, ſon proporcionales à los errores 357. 354. (603) ſeràn como 119. à la diferencia 1. de 119. à 118. aſsi 357. à la diferencia 3. de 357. á 354. Y convirtiendo como 1. à 119. aſsi 3. à 357. y alternando como 1. à 3. aſsi 119. à 357. Aora invirtiendo como 3. à 1. aſsi 357. á 119. que es la regla que hemos dado.

Ha-

604 Hagamos otras suposiciones. Supongo pues, que la ganancia del primero es 124. reales, añadiendo 12. serà 136. la ganancia del segundo, y añadiendo 16. serà 152. la ganancia del tercero; sumando las tres ganancias, salen 412. reales, porque avian de salir 400. reales, serà el error 12. por excesso; y assi escrivo la suposicion 124. y á su lado el error 12. con el señal ✳.

Otra vez supongo, que la ganancia del primero es 123. (una unidad menos para escusar la regla de tres) y siguiendo el tenor de la question, sale la suma de las ganancias 409. y pues avia de ser 400. excede en 9. y assi escrivo la suposicion 123. y à su lado el error 9. con el señal ✳.

124	✳	12
123	✳	9
1		3

Hecho esto, resto el error menor del mayor, porque son semejantes, y resto tambien las suposiciones. Digo aora: Si la diferencia de los errores 3. dà la diferencia de las suposiciones 1. luego un error 12. dará 4. el qual restado de la suposicion correspondiente al error 12. porque tiene el señal ✳ darà el numero 120. que es el que se busca.

Demonstracion.

605 Supuesto conocido el numero que se busca 120. los errores de las suposiciones 124. y 123. son 4. y 3. y porque restando, el numero 120. de las suposiciones, quedan los errores 4. y 3. supuesto que estos son por excesso, ò tienen el señal ✳, avrà la misma diferencia de la suposicion 124. à 123. que del error 4. á 3. (375) y como los errores de las suposiciones, son proporcionales á los errores de los numeros que salen, procediendo segun el tenor de la question; esto es, como 4. à 3. assi 12. à 9. (603) serà convirtiendo, como el error 4. à la diferencia 1. de los errores 4. y 3. assi el error 12. à la diferencia 3. de 12. y 9. y alternando como 4. à 12. assi 1. á 3. invirtiendo como 12. à 4. assi 3. à 1. que es lo mismo, que como 3. á 1. assi 12. à 4. que es lo que avemos hecho en la operacion immediate antecedente.

606 Hagamos otras suposiciones, y sea la primera 100. la ganancia del primero, añadiendo 12. serà 112. la ganancia del segundo añadiendo 16. serà 128. la ganancia del tercero, sumando las tres ganancias, salen 340. y porque avian de salir 400. serà el error 60. por defecto, y assi escrivo la suposicion 100. y á su lado 60. con el señal —. Otra vez supongo, que la ganancia del primero, es 200. procediendo segun el tenor de la question, salen 640. y porque avian de salir 400. serà el error 240. por excesso, y assi escrivo la su-

100	—	60
200	✳	240
100		300

posicion 200. y à su lado el error 240. con el señal ✳.

Esto supuesto, sumo los dos errores, pues son desemejantes, y resto las suposiciones. Digo aora: Si la suma de los errores 300. dà la diferencia de las suposiciones 100. luego el error 606. darà el error de las suposiciones 20. el qual añadido à la suposicion 100. correspondiente al error 60. porque tiene el señal — darà el numero 120. que se busca. O usando del error 240. digo: Si 300. dán 100. luego 240. daràn 80. los quales restados de la suposicion 200. correspondiente al error 240. porque tiene el señal ✳ darà el mismo numero 120.

Demonstracion.

607 Supongo tambien, que el numero que se busca 120. està conocido, y assi los errores de las suposiciones, seràn 20. y 80. la diferencia de las suposiciones es 100. la qual sumada con la suposicion menor 100. hace á la mayor 200. que es igual à la suma de 120. y del error 80. luego la suma de la diferencia de las suposiciones, y de la suposicion menor, es igual à la suma de 120. y de 80. El numero pues 120. es igual à la suma de la posicion menor 100. y de su error 20. luego la suma de la suposicion menor, y diferencia de suposiciones, que es 200. es igual à la suposicion menor 100. y à los dos errores 20. y 80. y quitando de cada parte la suposicion menor 100. quedarà la diferencia de las suposiciones, igual à la suma de los errores 20. y 80. de las mismas suposiciones.

Y porque los errores de las posiciones 20. y 80. son proporcionales à los errores 60. y 240. que han procedido, obrando, segun el tenor de la question, seràn componiendo; como la suma de 60. y 240. á un error 240. assi la suma de los errores 20. y 80. que como está dicho, es la misma diferencia de las suposiciones, à un error 80. de las suposiciones que es la regla que hemos dado.

En esta question he puesto todos los quatro casos, que pueden suceder, tomando diferentes suposiciones, cada uno con su demonstracion, para que el Arithmetico no tenga que desear: Aora solo falta que demuestre, porque el numero que sale de la regla de tres que es un error de las posiciones, se ha de sumar con la posicion, cuyo es el error que tomò en la regla de tres, quando tiene el señal — y restar quando và acompañado con el señal ✳ lo qual pruevo assi.

El numero que sale por regla de tres, es el error, ò diferencia de la suposicion al numero que satisface à la pregunta, y quando está el señal — la suposicion es menor que dicho numero que satisface á la pregun-

gunta ; luego ſe ha de añadir el dicho error à la ſupoſicion. Y como quando eſtà el ſeñal ✱ la ſupoſicion ſe ha tomado mayor , es cierto que ſe ha de reſtar el dicho error.

De otro modo.

608 Multipliquenſe en cruz las ſupoſiciones por los errores, y partiendo la diferencia de los productos por la diferencia de los errores , quando ſon ſemejantes ; ò dividiendo la ſuma de los productos por la ſuma de los errores , quando ſon deſemejantes , el quociente darà la verdad.

Sea la miſma queſtion , y ſupoſiciones del ſegundo caſo (602) como aqui ſe vè en el exemplo : Multiplico en cruz la ſupoſicion 1. por el error 354. y la ſupoſicion 2. por el otro error 357. los productos ſon 354. y 714. que eſcrivo al lado ; y pues los errores ſon ſemejantes , reſto el menor producto del mayor , y tambien el menor error del mayor para hallar la diferencia de los productos 360. y la de los errores 3. divido la diferencia 360. por 3. y el quociente 120. es el numero que ſe buſca.

1.——357.		714.
✕		
2.——354.		354.
	3.	360.

Sean otra vez las miſmas ſupoſiciones del tercer caſo (604) como aqui ſe vè. Multiplicando en cruz las ſupoſiciones por los errores , ſalen productos 1476. 1116. y pues los errores ſon ſemejantes , divido la diferencia 360. de los productos por la diferencia 3. de los errores , y ſaldrà el miſmo numero 120.

124.	✱	12.	1476.
	✕		
123.	✱	9.	1116.
		3.	360.

Otra vez ſean las miſmas ſupoſiciones del caſo quarto (606) como eſtà figurado. Multiplicando las ſupoſiciones por los errores en cruz , ſalen los productos 12000. y 24000. y pues los errores ſon deſemejantes, partaſe la ſuma 36000. de los productos por la ſuma 300. de los errores , y el quociente 120. ſerà el numero que ſe buſca.

100.——60.		12000.
✕		
200. ✱ 240.		24000.
	300.	36000.

No

No pongo la demonſtracion deſtas reglas, por no canſar al Arithmetico con ſu prolixidad, y porque con mediana aplicacion puede ſacarla ſi huviere percebido lo que haſta aora eſtá dicho. A mas, que para mi intento baſta aver demonſtrado un modo de obrar.

609 Queſtion 17. Un Exercito conſta de Eſpañoles, Italianos, y Alemanes; los Eſpañoles ſon 10000. los Italianos ſon la tercera parte de los Epañoles, y Alemanes juntos; los Alemanes ſon la mitad de los Eſpañoles, è Italianos juntos; preguntaſe quantos ſon los Italianos, y Alemanes.

Tomo por ſupoſicion un numero grande, como 90000. el qual ſupongo que es el numero de los Italianos, y treſdoblandole harà el numero 270000. de los Eſpañoles, y Alemanes juntos; porque los Italianos ſon el tercio deſtos juntos, y ſiendo los Eſpañoles 10000. ſeràn los Alemanes 260000. y porque eſtos ſon la mitad de los Eſpañoles, è Italianos, doblando los 260000. ſeràn los Eſpañoles, è Italianos 520000. los quales avian de ſer 100000. porque los Eſpañoles, como ſe dice en la pregunta, ſon 10000. y los Italianos por la ſupoſicion ſon 90000. que juntos ſon 100000. Luego ſe ha errado por exceſſo en 420000. Eſcrivo la ſupoſicion 90000. y á ſu lado el error 420000. con el ſigno ✱.

Supongo otra vez, que los Italianos ſon 8000. Luego los Eſpañoles, y Alemanes ſerán 24000. Y ſiendo los Eſpañoles 10000. ſeràn los Alemanes 14000. los quales doblados hacen 28000. que es el numero de los Eſpañoles, è Italianos. Los Eſpañoles, pues, en la realidad ſon 10000. y los Italianos ſon 8000. por la ſupoſicion, los quales juntos hacen el numero de 18000. Luego el numero 28000. que ſale de la ſupoſicion, excede al 18000. que avia de ſalir en 10000. y aſsi eſcrivo la ſupoſicion 8000. y à ſu lado el error 10000. con el ſeñal ✱.

90000.	✱	420000.
8000.	✱	10000.
82000.		410000.

Reſto aora los errores, y las ſupoſiciones para hallar las diferencias 410000. y 82000. pues que los errores ſon ſemejantes, y digo por regla de tres: Si la diferencia 410000. de los errores, dà la diferencia 82000. de las ſupoſiciones; luego el error 10000. dará el error de las ſupoſiciones 2000. el qual reſtado de la ſupoſicion 8000. porque tiene el ſigno ✱ dá el numero 6000. de los Italianos. Y pues eſte es la tercera parte de los Eſpañoles, y Alemanes, ſerà el numero de eſtos juntos 18000. y ſiendo los Eſpañoles 10000. ſerán los Alemanes

nes 8000. Con que todo el Exercito constava de 24000. Soldados, de los quales los 10000. eran Españoles, los 6000. Italianos, y los 8000. Alemanes.

610 Question 18. Son tres Mercaderes, cuyas haciendas no se saben claramente; pero consta de que el primero tiene doblado que el segundo, y mas 4. doblones. El tercero tiene tanto como los dos y mas 6. doblones, todos juntos tienen 6000. doblones; preguntase quanto tiene cada uno.

Supongo que la hacienda del segundo es 10. luego la del primero serà 24. que es doblado 10. y añadido el 4. La del tercero serà 40. que es la suma del primero, y segundo, y mas 6. Los tres juntos hacen 74. y porque avian de hacer 6000. se ha errado por defecto en 5926. Con que escrivo la suposicion 10. y à su lado el error 5926. con el señal —. Otra vez. Supongo que la hacienda del segundo es 1000. Luego la del primero serà 2004. y la del tercero serà 3010. Sumando las tres haciendas saldràn 6014. que excede al numero 6000. que avia de salir, en 14. Escrivo, pues, la suposicion 1000. y à su lado el error 14. con el señal ✻.

10.	—	5926.
1000.	✻	14.
990.		5940.

Y pues los errores son desemejantes, los tengo de sumar, y haràn 5940. Resto despues las suposiciones para tener la diferencia 990. Aora digo: Si la suma de los errores 5940. dà la diferencia 990. luego el error 74. darà el error de las suposiciones 2. y un tercio; el qual restado de la suposicion 1000. porque su error, que se ha tomado en la regla de tres, tiene el señal ✻, darà el numero que se busca 997. y dos tercios, que es la ganancia del segundo; la qual, doblada, y añadido 4. serà 1999. y un tercio la ganancia del primero; y sumando los dos mas 6. serà 3003. la ganancia del tercero; y todas juntas hacen 6000. como dice la pregunta.

611 Question 19. Un Maestro tiene tantos discipulos, que si cada uno le pagase 50. reales, le faltarian 300. para comprar la casa en que habita; pero si le diera cada uno 60. reales, le sobrarian 400. reales, pagado el precio de la misma; preguntase quantos discipulos tiene el maestro, y quanto es el valor de dicha casa.

Lo que se busca en esta pregunta es un numero, que multiplicado por 50. produzga otro numero, que añadiendole 300. haga la misma suma que hiciera el tal numero multiplicado por 60. y restando 400. del producto. Esta misma question mas facilmente està resuel-

fuelta (237), aunque en otra especie. Supongo, pues, que el numero de los discipulos es 300. el qual multiplicado por 50. hace 15000. y añadiendo 300. salen 15300. que es lo que constaria la casa, teniendo 300. discipulos, y pagando cada uno 50. reales veamos aora si pagando cada uno 60. reales sobraràn 400. reales. Multipliquemos, pues, el mismo numero de los discipulos 300. por 60. y salen 18000. que son 2700. mas del antecedente precio de la casa, y pues avian de sobrar 400. restense de los 2700. quedarà el error 2300. por excesso; y assi escrivase la suposicion 300. y à su lado el error 2300. con el signo ✱.

Otra vez Supongo que los discipulos son 100. multiplicolos por 50. y al producto 5000. añadiendo 300. sale el valor de la casa 5300. teniendo 100. discipulos, y pagando cada uno 50. reales. Veamos aora si pagando cada uno de los 100. discipulos 60. reales, sobran 400. reales del mismo precio. Multipliquemos, pues, 100. por 60. y restando el valor 5300. de la casa, del producto, que sale 6000. quedan 700. y pues avian de quedar 400. luego hemos excedido en 300. y assi escrivo la suposicion 100. y à su lado el error 300. con el señal ✱.

300.	✱	2300.
100.	✱	300.
200.		2000.

Hecho esto, porque los errores son semejantes, resto el menor del mayor, y assi mismo, resto una suposicion de otra, para hallar las diferencias 2000. y 200. Digo aora por regla de tres: Si la diferencia de los errores 2000. dà la diferencia de las suposiciones 200. luego el error 300. darà el error de las suposiciones 30. el qual restado de la suposicion 100. porque tiene el signo ✱, quedaràn 70. que es el numero de los discipulos; el qual, multiplicado por 50. reales, y añadiendo 300. hacen 3800. reales, que es el valor de la casa.

612. Question 20. Entre dos personas se avian de partir igualmente 100. reales; pero aviendose movido cierta contienda, cada uno tomò lo que pudo. Despues de compuesta la riña el primero restituyò un tercio de lo que avia tomado, y el segundo restituyò un quinto tambien de lo que avia tomado, con esto quedaron iguales, teniendo cada uno 50. reales; preguntase quanto tomò cada uno?

Supongo que el primero tomasse 30. reales, y por consiguiente el segundo los restantes 70. El tercio de los 30. son 10. los quales restituyendolos al segundo, le restarian 20. reales. El quinto de 70. son 14. los quales dandoselos al primero (que aora tiene 20.) tendrà 34. y porque avia de tener 50. se ha faltado en 16. Escrivo, pues, la suposicion 30. y à su lado el error 16. con el señal —.

Otra

Otra vez, Supongo que el primero tomaſſe *60.* reales, y por conſiguiente el ſegundo los reſtantes 40. El tercio del primero ſon 20. los quales reſtituìdos al ſegundo le quedan 40. El quinto del ſegundo ſon 8. los quales reſtituìdos al primero tiene 48. y porque avia de tener 50. ſe ha faltado en 2. Eſcrivo, pues, la ſupoſicion 60. y à ſu lado el error 2. con el ſeñal —.

30.	—	16.
60.	—	2.
30.		14.

Aora porque los errores ſon ſemejantes, reſto el menor del mayor, y hallo la diferencia 14. Digo, pues: Si la diferencia de los errores 14. dá la diferencia de las ſupoſiciones 30. luego el error 2. darà el error de las ſupoſiciones 4. y dos ſeptimos; el qual añadido à la ſupoſicion 60. porque tiene el ſeñal —, ſalen 64. reales, y dos ſeptimos, que tomò el primero; y por conſiguiente, el ſegundo tomaria 35. reales, y cinco ſeptimos, como ſe puede probar.

613 Queſtion 21. En cierta Igleſia ay dos Calices de oro, y una Patena tambien de oro, de valor de 15000. reales, la qual pueſta ſobre el primer Caliz vale treſdoblado mas que el ſegundo; y pueſta ſobre el ſegundo, ſe hace valer tanto quanto vale el primero; preguntaſe quanto vale cada Caliz?

Aquì ſe buſcan dos numeros, de los quales el primero ſumado con 15000. ſea treſdoblado del ſegundo; y eſte, ſumado con los miſmos 15000. ſea igual al primero. Supongo, pues, que el primer Caliz vale 3000. reales, y añadiendole la Patena que vale 15000. ſerà el valor del Caliz, y Patena 18000. reales; y pues eſte valor deve ſer treſdoblado que el del ſegundo Caliz, valdrà eſte 6000. reales, que es el tercio de 18000. al qual añadiendo la Patena, que vale 15000. reales, valdrá el ſegundo Caliz, con la Patena, 21000. reales. Y porque el valor 3000. del primero avia ſer igual á èſte, ſe falta en 18000. y aſsi eſcrivo la ſupoſicion 3000. y à ſu lado el error 18000. con el ſeñal —.

3000.	—	18000.
9000.	—	14000.
6000.		4000.

Otra vez. Supongo que el primer Caliz vale 9000. reales, al qual añadiendo 1500. de la Patena, valdrá con la Patena 14000. reales; y por conſiguiente, valdrá el ſegundo Caliz 8000. reales, y añadiendole la Patena valdrà 23000. reales. Y porque el valor del primero 9000. avia de ſer igual à èſte, ſe ha faltado en 14000. por lo qual eſcrive la ſupoſicion 9000. y al lado el error 14000. con el ſeñal —.

Aora

Xora resto los errores, porque son semejantes, y digo: Si la diferencia de los errores 4000. de la diferencia de las suposiciones 6000. luego el error 14000. darà el error de las disposiciones 21000. el qual añadido à la suposicion 9000. darà el valor del Caliz primero 30000. reales; y por consiguiente, el segundo valdrà 15000. reales.

Resolvamos esta misma question por el otro modo. Escritas las mismas suposiciones, y errores (en estos no se diferencian los dos modos) multipliquese en cruz cada suposicion por el error contrario; y porque los errores son semejantes, restense los errores, y los productos, y partiendo la diferencia de los productos por la diferencia de los errores, saldrà el mismo numero 30000.

3000 ——	18000	162000000
✕		
9000 ——	14000	42000000
	4000	120000000

614 Question 22. Un Platero comprò tantas perlas, que si al numero dellas añadieran su mitad tercio, y quarto, y mas, 22. serian todas 100. preguntase quantas perlas comprò.

Tomese un numero por suposicion, que tenga metad, tercio, y quarto, el qual se sabrá multiplicando los denominadores, y será 24. Supongase, pues, que comprò 24. perlas, cuya mitad son 12. el tercio 8. y el quarto 6. las quales partes añadidas al 24. y mas 22. son 72. y pues avian de ser 100. se ha faltado en 28. Escrivase la suposicion 24. y à su lado el error 28. con el señal —. Supongo otra vez, que ha comprado 48. perlas, cuya mitad es 24. el tercio 16. y el quarto 12. Sumando todo, y mas 22. son 122. y porque avian de ser 100. se ha excedido en 22. y assi se escrivirá la suposicion 48. y à su lado el error 22. con el señal ✳.

24 ——		28
48	✳	22
24		50

Aora porque los errores son desemejantes, sumense, y por regla de tres: Si la suma de los errores 50. dá la diferencia de las suposiciones 24. Luego el error 22. dará el error de las suposiciones 10. y 14. 25. avos; el qual restado de la suposicion 48. porque el error tomado en la regla de tres tiene el señal ✳, dará el numero de las perlas 37. y 11. 25. avos, que comprò.

615 Question 23. Dos tienen cierta suma de reales. Si el segundo dá al primero 12. tendrá el primero seis doblado mas què el segundo; pero si el primero dá 15. reales al segundo, tendrá el segundo diez veces mas que el primero; pretendese saber quantos reales tendrá cada uno.

Para que esta question, y sus semejantes se resuelvan sin entrar quebrados, será conveniente comenzar por el segundo, suponiendo que tiene 20. reales, de los quales dando al primero 12. tendrá el primero seis veces mas que lo que le queda al segundo, que es 8. y assi el primero ha de tener 48. que es 6. veces 8. Luego antes que recibiera los 12. del segundo, tendria el primero 36. Y si de estos 36. se le dan al segundo 15. tendrá el segundo 35. y al primero le quedarán 21. Multiplicando, pues, el 21. por 10. serán 210. à los quales avia de ser igual el 35. porque lo que tiene el segundo, ha de ser diez doblado de lo que tiene el primero: Luego se ha excedido en 175. que es el error por excesso.

Supongo otra vez, que el segundo tiene 40. reales, de los quales dando al primero 12. tendrá el primero seis veces mas de lo que le queda al segundo, que es 28. y assi el primero tendrá 168. Luego el primero tendria 156. antes que recibiera los 12. del segundo. Y si estos 156. se le dan al segundo 15. tendrá 55. y al primero le quedarán 141. Multiplicando, pues, el 141. por 10. salen 1410. à los quales avia de ser igual el numero 55. del segundo, supuesto que lo que tiene el segundo ha de ser diezdoblado de lo que tiene el primero: Luego se ha excedido en 1355. por excesso.

20	✱	175
40	✱	1355
20		1180

Aora porque los errores son semejantes, resto el mayor del menor, y digo: Si la diferencia de los errores 1180. de la diferencia de las suposiciones 20. luego el error 175. dará el error de las suposiciones 2. y 57. 59. avos, el qual restado de la suposicion 20. porque tiene el señal ✱, quedarán 17. y 2. 59. avos, y tantos reales tenia el segundo.

616 Question 24. En el fondo de una cisterna ay tres caños desiguales; por el mayor sale toda el agua en 2. horas; por el mediano en 3. y por el menor en 6. preguntase por todos los tres caños juntos en quantas horas se vaciaria la cisterna.

Supongo que toda el agua saliesse en 4. horas; digo aora por regla de tres: Si el caño mayor vacia en 2. horas una cisterna, en 4. horas quantas cisternas vaciará? Siguiendo la regla salen 2. cisternas. Otra vez: Si el caño mediano vacia en 3. horas una cisterna; luego en 4. horas vaciará una cisterna, y un tercio. Otra vez: Si el caño menor en 6. horas vacia una cisterna, luego en 4. horas vaciará dos tercios de cisterna. Y assi, todos los tres caños abiertos en 4. horas vaciarian 4. cisternas, que es la suma de los tres numeros que han salido por las

reglas

reglas de tres. Y pues solo pretendemos saber en quantas horas se vacìa una cisterna, hemos excedido en 3.

Otra vez: Supongo, que en media hora sale toda el agua. Digo aora: Si el caño mayor en 2. horas vacìa una cisterna: luego en media hora vaciará un quarto de cisterna. Otra vez: Si el caño mediano en 3. horas vacía una cisterna; luego en media hora vaciará un sexto de cisterna. Otra vez: Si el caño menor en 6. horas vacìa una cisterna; luego en media hora vaciará un dozavo de cisterna: Y assi todos los tres vaciarán media cisterna en media hora; y pues queremos que vacìe una cisterna; luego hemos faltado en media cisterna.

4	✳	3
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
$3\frac{1}{2}$		$3\frac{1}{2}$

Digamos, pues, por regla de tres: Si la suma de los errores 3. y medio, porque son desemejantes, dá la diferencia de las suposiciones 3. y media; luego el error 3. dará el error de las suposiciones 3. qual restado de la suposicion 4. cuyo es el error tomado en la regla de tres, porque tiene el señal ✳, quedarà que todos los tres caños vaciarán la cisterna en una hora.

Lo mismo hallarèmos por el segundo modo. Multiplicando las suposiciones por los errores en cruz, salen los productos 2. y 1. y medio, cuya suma es 3. y medio, porque los errores son desemejantes, la qual dividida por la suma de los errores 3. y medio, dará 1. que es la hora misma de antes.

4	✳	3	$1\frac{1}{2}$
	✕		
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	2
		$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$

617 Question 25. Una cisterna tiene un caño en la boca, por el qual se llena en 12. horas; pero en el fundo tiene otro, por el qual se vacìa en 18. horas; preguntase si por el caño de arriba continuamente entrasse el agua, y por el del fondo saliesse siempre, en quantas horas se llenaria.

Suponiendo que se vacìa en 20. horas, digo assi: Si en 18. horas se vacìa una cisterna; luego en 20. horas se vaciará una cisterna, y un noveno. Luego es necessario que en las 20. se llenen 2. cisternas, y un noveno, para que vaciandose en el mismo tiempo una cisterna, y un noveno, quede una cisterna llena. Digo otra vez por regla de tres: Si en 12. horas se llena una cisterna, en 20. horas quantas se llenarán? Siguiendo la regla salen una cisterna, y dos tercios; pero porque en las mismas 20. horas se avian de llenar dos cister-

20		$\frac{4}{9}$
40	✳	$\frac{1}{9}$
20		$\frac{5}{9}$

nas,

nas, y un noveno, hemos faltado à la verdad en este numero qu[illegible] novenos, que es la resta de 1. y dos tercios, à 2. y un noveno.

Supongo otra vez, que se vacia en 40. horas. Digo, pues: Si en 18. horas se vacìa una cisterna; luego en 40. horas se vaciarán dos cisternas, y dos novenos; y assi es necessario que en las 40. horas se ayan de llenar 3. cisternas, y dos novenos, para que vaciandose las dos, y dos novenos en 40. horas, quede una cisterna llena. Aora digo: Si en 12. horas se llena una cisterna; luego en 40. horas se llenaràn 3. cisternas, y un tercio. Y pues en las mismas 40. horas se avian de llenar 3. cisternas, y dos novenos; luego se ha excedido en un noveno; y assi escrivo la suposicion 40. y à su lado el error un noveno, con el señal ✱.

Esto supuesto, sumense los errores, pues son desemejantes, y restando las suposiciones, digase: Si la suma de los errores cinco no[illegible] dá la diferencia de las suposiciones 20. luego el error un noveno [illegible] el error 4. de la suposicion, el qual restado de la suposicion 40. porque tiene el señal ✱, quedaràn 36. y en tantas horas se llenará la cisterna.

20 ——	$\frac{4}{9}$	$\frac{160}{9}$
40 ✱	$\frac{1}{9}$	$\frac{20}{9}$
20	$\frac{5}{9}$	$\frac{180}{9}$

Por el segundo modo. Multipliquense las suposiciones por los errores en cruz, y sumando los errores por una parte, y los errores por otra, pues que son desemejantes, dividase la suma de los productos por la suma de los errores, y saldràn las mismas 36. horas.



LIBRO

LIBRO III.

DE LA ANALYTICA DE LOS NUMEROS.

ANALYTICA, es una parte de la Arithmetica practica, que trata de la resolucion de las potestades en sus raìces; ò de la extraccion de las raìces de las mismas potestades, que todo es uno, y contiene dos partes; la primera trata de la extraccion de dichas raìces; y la segunda de la invencion de diferentes medios proporcionales.

PARTE I.

DE LA EXTRACCION DE LAS RAICES.

EXPLICANSE LOS TERMINOS DE LAS POTESTADES, y raìces.

618 POtestad, ò *Potencia* de un numero, es el producto del mismo numero, multiplicado por sì mismo una, ò muchas veces. *Raiz*, ò *lado*, es el numero, que multiplicandose por sì mismo una, ò muchas veces, produce la potestad. Como el 9. es potestad del 3. porque multiplicando el 3. por 3. produce 9. y el dicho 3. es la raìz; assi mismo el 5. es raìz del 125. porque multiplicando 5. por 5. y el producto 25. otra vez por 5.

ſalen 125. Aſsimiſmo el 81. es poteſtad, y ſu raiz es 9. porque 9. veces 9. ſon 81. Del miſmo modo el quebrado quatro novenos, es poteſtad de dos tercios. Diceſe *Poteſtad*, porque es todo quanto puede la raìz, ò lado, multiplicandoſe por sì miſma; y aſsi es la potencia de la raìz.

619 La Poteſtad, es en dos maneras: *Simple y Compueſta*. La Poteſtad Simple, es el produɛto de un numero entero, ò quebrado por sì miſmo, como eſtá dicho ſimplemente, y ſin afeccion, ò circunſtancia alguna: Como 64. que es produɛto de 8. por 8. Item 81. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y del produɛto 9. por 3. y otra vez del produɛto 27. por 3. Item 9. 25. avos que es el produɛto de tres quintos por sí miſmo.

La Poteſtad compueſta, es la que tiene alguna circunſtancia, ò afeccion; como 18. que es poteſtad compueſta de dos poteſtades 9. cuya raìz es 3. Item 20. que es poteſtad compueſta de la miſma raìz; eſto es, de 16. y de ſu raìz 4. Item 12. que es la reſta de la raiz 4. de ſu poteſtad 16. y otras muchas que dexo, porque mi intento, ſolo es tratar de las Poteſtades Simples; reſervando las otras para el arte mayor.

620 La Poteſtad Simple, ſe divide en *Quadrado*; *Cubo*; *Quadrado quadrado*: *Quadrado Cubo*: *Cubo Cubo*: *Quadrado quatrado Cubo*, *&c*. Y aſsi miſmo la raìz ſe divide en *Quadrada*: *Cubica*: *Quadrado, quadrada*, *&c*. como ſe vé en la ſiguiente tabla, la qual tiene tres Colunas. La primera, es de los exponentes, que ſeñalan el orden de las poteſtades, y raìces. La ſegunda contiene las poteſtades, ſuponiendo, que la raìz es 2. La tercera enſeña los nombres de dichas poteſtades de dos modos; el uno por extenſo; y el otro abreviando con ſolas las iniciales del nõbre de cada poteſtad.

Exponentes.	Poteſtades.	Nombres de las Poteſtades.	
0	1		
1	2	Raìz.	R.
2	4	Quadrado.	Q.
3	8	Cubo.	C.
4	16	Quad. quad.	Q. Q.
5	32	Quad. Cubo.	Q. C.
6	64	Cubo cubo.	C. C.
7	128	Quad. quad. cubo.	Q. Q. C.
8	256	Quad. quad. quad. quad.	Q. Q. Q. Q.
9	512	Cubo cubo cubo.	C. C. C.
10	1024	Quad. quad. Cubo cubo.	Q. Q. C. C.

El

621 El *Quadrado*, es un numero producido de la multiplicacion de otro por sì mismo una vez sola; como 4. que procede de la multiplicacion de 2. por 2. Item 9. que procede de la multiplicacion de 3. por 3. Mas 25. que proviene de la multiplicacion de 5. por 5. La *raiz quadrada*, es aquel numero, que multiplicandose una vez sola, produce al quadrado como el 2. respeto del 4. Item el 3. respeto del 9. Item el 5. respeto del 25.

622 *Cubo*, es un numero que nace de la multiplicacion de la raiz por sì misma, y deste producto otra vez por la misma raiz; como el 8. que proviene de la multiplicacion de 2. por 2. y del producto 4. por la misma raiz 2. Item 27. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y otra vez del producto 9. por la misma raiz 3. Con que la raiz multiplicando à su quadrado produce el Cubo. *Raiz cubica*, es el numero, que multiplicandose dos veces, produce al Cubo; como el 2. respeto del 8. y el 3. respeto del 27.

623 *Quadrado quadrado*, es un numero producido de la multiplicacion de la raiz por sì misma, del producto otra vez por la misma raiz, y otra vez deste producto por la misma raiz; como el 16. que proviene de la multiplicacion de 2. por 2. y del producto 4. por 2. y del producto 8. por 2. Item 81. que proviene de la multiplicacion de 3. por 3. y del producto 9. por 3. y otra vez del producto 27. por 3. con que la raiz multiplicando à su cubo, produce al Quadrado quadrado. *Raiz Quadrado quadrada* es la que multiplicandose tres veces, produce al Quadrado quadrado, como el 2. respeto del 16. y el 3. respeto del 81. Y assi de las demàs potestades.

624 De suerte, que la primera potestad que es el Quadrado, produce de una multiplicacion de la raiz; la segunda, que es el cubo, procede de dos multiplicaciones; la tercera, que es el Quadrado quadrado, de tres; la quarta, de quatro, &c. Que es lo mismo, que decir, que en el quadrado se toma dos veces la raiz deste modo 2. 2. (que es lo que denota el exponente 2. y por esso la raiz quadrada, se llaman Raiz segunda, ò R. 2.) y se multiplica, con que ay sola una multiplicacion. En el cubo se pone tres veces la raiz deste modo 2. 2. 2. y multiplicandola continuamente, se forma dos multiplicaciones; su exponente es 3. por otras tantas veces que se escrive la raiz, y por esso la raiz cubica, se dice raiz tercera, ò R. 3. En el Quadrado quadrado, se toma la raiz quatro veces, assi 2. 2. 2. 2. (que es lo que significa su exponente 4. y por esso la raiz Quadrado quadrada, se dice raiz quarta, ò R. 4.) y multiplicandola continuamente, ay tres multiplicaciones. Y assi de las demás.

625 De las dos primeras Potestades *Quadrado*, y *Cubo*, toman las demás el nombre, repitiendole tantas veces, como lo denotan las partes del exponente: Y assi porque el exponente 4. se compone de dos exponentes 2. que es del quadrado, será la potestad correspondiente al dicho exponente 4. *Quadrado Cubo*; porque sumando el exponente 2. del quadrado, con el exponente 3. del cubo, hacen 5. Del mismo modo la potestad, cuyo exponente es 6. se llama Cubo cubo, porque el exponente 6. consta de dos veces el 3. que es exponente del cubo. La potestad del exponente 7. es Quadrado quadrado cubo: ò Cubo quadrado quadrado; porque sumando el exponente 3. del cubo, con el exponente 4. del Quadrado quadrado, hace 7. Y assi de las demàs.

Algunos Autores dán diferentes nombres à las potestades, porque no atiendan à la suma de los exponentes, sino à la multiplicacion; y assi à la potestad, cuyo exponente es 6. la llaman Quadrado Cubo, porque multiplicando el exponente 2. del quadrado por el exponente 3. del cubo, sale el exponente 6. Los antiguos tambien usaron de otros nombres, y caracteres, para explicar las Potestades que aora solo sirven de confusion. A la Raiz llamaron *Cosa*, y por esso à la Algebra dieron nombre de *Regla de la cosa*; al Quadrado, *Censo*; al Quadrado quadrado, *Censo de censo*; al Quadrado Cubo, *Surdesolido*, *Surdesolido*, ò *Primo relato*, &c. Estas noticias bastan para que no cause novedad el hallar diferentes nombres en algunos Autores.

626 Si lo que hasta aqui hemos dicho, se considera atentamente, estará manifiesto; lo primero, que un mismo numero puede ser raiz de muchas potestades, como el 2. es raiz del Quadrado 4. del Cubo 8. del Quadrado quadrado 16. &c. pero toma el nombre de la potestad á quien se compàra; y assi respeto del Quadrado, se llama *Raiz quadrada*; respeto de Cubo, *Raiz cubica*, &c.

Lo segundo, que una misma potestad, tiene diferentes raìces; como el 16. que tiene al 4. y al 2. por raìces, porque juntamente es quadrado, y Quadrado quadrado; en quanto es quadrado, tiene al 4. por raìz quadrada, y en quanto es Quadrado quadrado, tiene por raìz Quadrado quadrada al 2. Assimismo el 64. en quanto es Cubo cubo, tiene al 2. por raìz Cubo cubica; en quanto Cubo, tiene al 4. por raìz cubica; y en quanto quadrado, tiene al 8. por raìz quadrada.

627 Las Potestades, unas son *racionales*, y otras *irracionales*. Las racionales, son las que tienen verdadera raìz, que se expli-

ca,

m, y declara con algun numero entero quebrado, ò con ambos juntos; como 16. cuya raìz quadrada es 4. Item quatro novenos, cuya raìz quadrada es dos tercios. Item 6. y un quarto, cuya raìz quadrada es 2. y medio; y lo mismo se ha de entender de las otras potestades. Las potestades irracionales son aquellas, cuya raìz no se puede explicar por numeros; porque no ay numero alguno, ni entero, ni quebrado, que la expresse, y declare; y por esso la dicha raìz de las potestades irracionales se llama *Sorda*, porque no pudiendose declarar, tampoco se puede oìr; como el 32. que no tiene raìz quadrada en numeros; ni el 12. tiene raìz cubica; y otras innumerables.

Para la cabal inteligencia de esto es menester advertir, que assi como la potestad racional es el producto de un numero multiplicado por sì mismo una, ò muchas veces; del mismo modo la potestad irracional se supone, que es el producto de una raìz multiplicada por sì misma una, ò muchas veces; y assi pudo tomar qualquier numero por qualquier potestad; esto es, por quadrado, cubo, &c. y entonces puede suceder, que segun una potestad tenga raìz, y segun otra no; como el 27. si le tomo por quadrado será irracional, porque no tiene raìz quadrada que se pueda explicar por numeros; pero si le tomo por cubo tendrà raìz cubica que es 3. y assi serà racional.

628. De lo dicho se infiere, que sacar raìz de una potestad no es otra cosa, que buscar un numero, que multiplicado por sì mismo una, ò muchas veces, haga la dicha potestad, si es racional; ò la potestad proxime menor, si es irracional; como sacar raìz quadradada de la potestad 64. es buscar el 8. el qual multiplicado por sì mismo hace justamente 64. Pero sacar raìz quadrada de la potestad irracional 32. es buscar un numero, que multiplicado por sí mismo, constituya el quadrado racional proximo menor que el dicho 32. la qual es 5. y un quebrado que no se puede señalar; porque como se puede aproximar infinitamente, no es possible, señalar el ultimo. En el discurso de este libro tratarèmos de esto mas largamente, aora expliquemos otros terminos.

Del numero plano, y Sólido.

629 *Numero plano* es el producto de la multiplicacion de dos numeros, como el 12. que proviene de la multiplicacion de 4. por 3. y estos numeros se llaman lados del dicho plano, tomando el nombre de la quantidad continua; porque un rectangulo, que es figura plana, se forma del movimiento de un lado en el otro, que es lo mismo que la multiplicacion. Assimismo, el 36. es numero plano,

cuyos

cuyos lados ſon 4. y 9. porque 4. veces 9. ſon 36. Un miſmo plano puede tener diferentes lados, porque puede provenir de la multiplicacion de diferentes numeros; como el 36. es producto de 18. por 2. Item, de 12. por 3. Item, de 9. por 4. Item, de 6. por 6. y entonces es quadrado; pero unos lados no pueden hacer diferentes planos.

630 El numero plano ſe puede dividir en infinitos generos de planos; es à ſaber, en triangular, quadrangular, pentagono, &c. tomando las unidades del numero como puntos; aſsi como en la quantidad continua, la figura plana ſe divide en triangulo, quadrangulo, &c. Y aſsi, el numero 3. es triangular, porque ſus unidades ſe pueden diſponer en forma de triangulo. El numero 6. es tambien triangular. Item, el 10. como todo ſe vé en las figuras.

El numero 12. es quadrangular, porque ſus unidades, tomadas como puntos, ſe pueden diſponer en forma de quadrangulo, y ſus lados ſeràn 4. y 3. Item, el 9. es quadrangular, y porque ſus lados 3. y 3. ſon iguales, ſerà tambien quadrado. Y lo miſmo ſe entiende reſpectivamente en los otros numeros Planos, Pentagono, Hexagono, Circular, &c. que por no ſer eſto de mucha importancia, no proſigo en ſu explicacion.

631 *Numero ſólido* es el producto de la multiplicacion continua de tres numeros unos por otros, los quales ſe llaman lados, como el 24. que proviene de la multiplicacion de los lados 2. 3. 4. porque dos veces 3. ſon 6. y 6. veces 4. ſon 24. Aſsi miſmo, el 32. es numero ſólido, porque proviene de la multiplicacion de los lados 2. 2. 8. Tambien el 27. es ſólido, porque nace de la multiplicacion de los lados 3. 3. 3. los quales por ſer iguales, ſea el dicho 27. ſólido cubico. Un miſmo ſólido puede tener diferentes lados, como ſe dixo en el numero plano, porque puede provenir de la multiplicacion de tres diferentes lados; como el 48. que es el producto de 2. 4. 6. y de 2. 3. 8.

El numero ſólido ſe forma à ſemejanza de las figuras ſólidas, tomando las unidades como puntos; y aſsi ſe puede dividir en diferentes figuras: Como *Columar*, que nace de la multiplicacion de qual-

qualquier numero plano por un qualquier numero, como el triangular 6. multiplicado por 4. hace al colunar 24. Item, *Pyramidal*, que es el tercio del colunar, como 8. y otros que dexo por no ser de mi intento, los quales podrá ver el curioso en las Arithmeticas de Jordano, y del Abad Maurolyco.

632 Advierto aqui dos cosas: La primera, que un mismo numero plano puede ser sólido, y al contrario; como el 24. el qual en quanto proviene de la multiplicacion de 4. por 6. es plano; y en quanto nace de la multiplicacion de 2. 3. 4. es sólido; que es lo mismo que hemos dicho de las potestades, que una misma se puede considerar como à diferentes; esto es, como à quadrado, cubo, &c.

La segunda, que aunque el numero plano, y sólido se divida en diferentes planos, y sólidos, como queda dicho: pero en las difiniciones del numero plano, y sólido (629. y 631.), solo hemos difinido con Euc. difin. 16. y 17. al plano, y sólido quadrangular, y rectangulo; esto es, al producto de dos, ò tres numeros, porque de estos solos hemos de tratar con Euclides, dexando los otros por no conducir mucho para la inteligencia de las Mathematicas, y trato comun, que es nuestro principal intento. Y assi, siempre que adelante nombrarèmos numero plano, ò sólido, entendèremos de los quadrangulares rectangulos.

De los Planos, y Sólidos semejantes.

633 Numeros planos, ò sólidos semejantes son aquellos que tienen los lados proporcionales; y assi, el 6. y el 24. son planos semejantes; porque sus lados 2. 3. — 4. 6. son proporcionales; esto es, como 2. à 3. assi 4. à 6. y como 2. à 4. assi 3. à 6. Assimismo, el 24. y el 192. son sólidos semejantes, porque sus lados 2. 3. 4. y 4. 6. 8. son proporcionales. Esta es la difin. 21. lib. 7. de Eucl.

Pero adviertase, que para que los numeros planos, ò sólidos sean semejantes, no es necessario que todos sus lados (algunos numeros planos, ò sólidos pueden tener muchos lados, como queda advertido) sean proporcionales, sino que basta que tengan algunos; y assi, los planos 15. y 60. son semejantes, aunque tomemos sus lados 3. 5. y 5. 12. porque aunque estos no sean proporcionales, pero lo son estos otros 3. 5. y 6. 10.

Todo lo que hasta aqui hemos dicho se ha de entender tanto en los numeros enteros, como en los quebrados, ò enteros, y quebrados. Mas todo numero plano, ò sólido necessariamente ha de ser compuesto, y no puede ser primo; porque como proviene de la multiplicacion de dos, ò mas numeros, es preciso que tenga alguna medida à mas de la unidad.

CA-

CAPITULO PRIMERO.

DE LA THEORICA DE LAS POTESTADES, y Raìces en general.

THEOREMA I.

LOS NUMEROS PLANOS TIENEN ENTRE SI LA RAZON compuesta de los lados.

634 SEan dos numeros planos AB. CD. semejantes, ò desemejantes, cuyos lados sean A. y B. C. y D. Digo, que la razon de AB. à CD. es compuesta de las razones de A. à C. y de B. à D. de suerte, que los lados de un plano sean antecedentes, y los del otro consequentes; y que multiplicando el denominador 1. y un tercio de la razon de A. à C. por el denominador tres octavos de la razon de B. à D. saldrà el denominador $\frac{1}{2}$ de la razon del plano AB. al plano CD. (290), que es la razon compuesta.

AB.	BC.	CD.
24.	18.	48.

A.	B.	C.	D.
4.	6.	3.	16.

Multipliquense B. por C. ò al contrario C. por B. que todo es uno, y saldrá el numero BC. Y pues el numero B. multiplicando á A. y C. produce los productos AB. y BC. tendrán estos la misma razon que A. à C. (71). Assi mismo, porque C. multiplicando à B. y à D. produce los numeros BC. CD. tendràn estos la misma razon que B. à D. Con que AB. es à BC. como A à C. y BC. es à CD. como B. à D. y assi AB. BC. CD. son proporcionales en la razon de los lados: Luego la razon de AB. à CD. se compone de las razones de AB. à BC. y de BC. á CD. (290), que son las mismas que las de los lados. Esta es la prop. 5. del 3. de Euc.

635 Si los numeros planos fueren semejantes, como 12. y 48. cuyos lados son 3. 4. y 6. 8. La razon del 12. al 48. serà duplicada de la razon de los lados 3. à 6. de 4. á 8. porque como el 12. al 24. (que es el producto de 4. por 6.) tiene la misma razon que 3. à 6. y el 24. al 48. tiene la misma razon que 4. à 8. como queda probado: Luego siendo la razon de 3. à 6. la misma que la de 4. à 8. por ser lados proporcionales, serà la razon de 12. à 24. la misma,

AB.	BC.	CD.
12.	24.	48.

A.	B.	C.	D.
3.	4.	6.	8.

que

que la de 24. à 48. y los tres numeros 12. 24. 48. serán continuamente proporcionales; y asi, la razon del 12. al 48. será duplicada de la razon de 12. à 24. (292), que es la misma que la de los lados, y el numero 24. será medio proporcional entre los planos semejantes; y al contrario si entre dos numeros ay un medio proporcional, seràn planos semejantes. Esta es la prop. 18. del 8. de Euclides.

Consectarios.

636 Los numeros quadrados como 9. y 36. tienen la razon duplicada de sus raìces 3. y 6. porque los quadrados sòn planos semejantes, y las raìces lados proporcionales. Mas entre dos numeros quadrados necessariamente ha de aver un medio proporcional, que aqui es el 18. de suerte, que son continuamente proporcionales 9. 18. 36. como consta claramente, aplicando la demonstracion del parrafo antecedente à los numeros del exemplo propuesto; y esta es la prop. 11. del 8. de Eucl.

9.	18.		36.
3.	3.	6.	6.

637 Si de tres numeros 9. 18. 36. continuamente proporcionales, el primero 9. fuere quadrado, tambien lo serà el ultimo 36. porque siendo continuamente proporcionales, avrá un medio 18. entre ellos; y asi el 9. y el 36. serán planos semejantes (635). Y como á un quadrado no ay otro plano semejante sino otro quadrado, si el primer 9. es quadrado, tambien serà quadrado el tercero 36. que es su semejante. Es la prop. 22. del 8. de Eucl.

638 Los planos semejantes tienen la misma razon que los quadrados; esto es, que ay dos planos semejantes como 6. y 54. avrà otros dos numeros quadrados como 4. y 36. que tengan la misma razon; porque siendo 6. y 54. numeros planos semejantes, entre ellos avrà un numero 18. medio proporcional (635). Hallense, pues, tres numeros minimos en la razon de 6. 18. 54. (370), los quales serà 4. 12. 36. cuyos extremos 4. y 36. son numeros quadrados (371): Luego por igualdad de razon (317) como 6. à 54. asi el quadrado 4. al quadrado 36. Y esta es la prop. 26. del 8. de Eucl.

4.	12.		36.
6.	18.		54.
2.	3.	6.	9.

* * *

THEO-

THEOREMA II.

LOS NUMEROS SOLIDOS TIENEN ENTRE SI LA RAZON compuesta de sus lados.

639 SEan dos numeros sólidos ABE. CDF. semejantes, ò no semejantes, cuyos lados sean A. B. E. y C. D. F. Digo, que tienen la razon compuesta de las razones de A. à C. de B. à D. y de E. à F. Porque si el producto de B. y E. (aqui es 12.) se multiplica por A. y por C. saldràn los productos ABE. BEC. en la misma razon de A. à C. (71. y 312.) Tambien porque los productos ABE. BEC. tienen entre sì la razon de los numeros significados por las letras A. y B. que son comunes, ò no se hallan en ambos productos (305).

ABE.	BEC.	ECD.	CDF.
24.	36.	48.	60.

A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	3.	4.	3.	4.	5.

Assi mismo, si el producto de E. por C. (que aqui es 12.) se multiplica por B. y D. producida los productos BEC. ECD. los quales tienen la misma razon que B. à D. que son los lados no comunes (305). Ultimamente, si el producto de C. y D. se multiplica por E. y F. saldràn los productos ECD. CDF. en la misma razon de E. à F. que son los lados no comunes. Con que los numeros ABE. BEC. ECD. CDF. tienen la misma razon que los lados A. à C. Item, B. à D. Item, E. à F. La razon, pues, de ABE. à CDF. se compone de las razones de los numeros intermedios (290), que son las mismas, que las de los lados. Luego los numeros sólidos tienen la razon compuesta de sus lados.

640 Si los numeros sólidos son semejantes, como 24. y 192. cuyos lados son 2. 3. 4. y 4. 6. 8. la razon de los sólidos será triplicada de la de los lados homologos 2. 4. ò 3. 6. ò 4. 8. Porque, como queda demonstrado, la razon de ABE. à BEC. es la misma que la de A. à C. La razon de BEC. à ECD. es la misma que la de B. à D. Y la razon de ECD. à CDF. es la misma que la de E. à F. Pues como las razones de A. à C. de B. à D. y de E. à F. sean iguales, por ser los sólidos semejantes, y los lados proporcionales, seràn los quatro numeros ABE. BEC. ECD. CDF. continuamente

ABE.	BEC.	ECD.	CDF.
24.	48.	96.	192.

A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	3.	4.	4.	6.	8.

te proporcionales; y assi, la razon de ABE. à CDF. serà subdupla de la de ABE. BEC. (292) que es la misma que la de A. à C. Y los numeros BEC. ECD. seràn medios proporcionales entre los sólidos semejantes. Esta es la proposicion 18. del libro 8. de Euclides.

641 Al contrario. Si entre dos numeros ay dos medios proporcionales, los tales numeros son sólidos semejantes. Sean los dos numeros ABE. CDF. entre los quales ay dos medios proporcionales BEC. ECD. Busquense tres numeros G. H. K. continuamente proporcionales, y minimos en la razon de ABE. à BEC. (370), y seràn G. y K. planos semejantes, pues que entre ellos ay un medio proporcional H. (635), y tambien quadrados (638). Sean A. B. lados de G. y C. D. lados de K. Y. ... los numeros G. H. K. son ... en la razon de ABE. BEC. ECD. los midiràn por algun numero, que supongo que es E. (373). Por la misma razon, los mismos ... K. midirán à BEC. ECD. CDF. por un numero que supongo es: ... Luego E. multiplicando à G. H. K. producirá ABE. BEC. ECD. y ... multiplicando à los mismos G. H. K. producirà à BEC. ECD. CDF. Pues como G. sea de el producto de sus lados. A. y B. Luego E. multiplicando à G. producirà ABE. numero sólido, y sus lados son A. B. E. Assi mismo, F. multiplicando à K. producirá al sólido CDF. cuyos lados son C. D. F. Multiplicando, pues, H. por E. y F. se producen los medios BEC. ECD. que tienen la misma proporcion que E. à F. (71) que es la misma que G. à H. ò que la de A. à C. ò B. à D. por ser lados proporcionales de los planos semejantes G. y H. Luego los lados A. B. E. son proporcionales à los lados, C. D. E. y assi, los sólidos engendrados de dichos lados, serán semejantes. Esta es la prop. 21. del lib. 8. de Eucl.

ABE	BEC	ECD.	CDF.
8.	12.	18.	27.

G.	H.	K.
4.	6.	9.

A.	B.	E.	C.	D.	F.
2.	2.	2.	3.	3.	3.

Consectarios.

642 Los numeros cubicos como 8. y 27. tienen la razon triplicada de sus raices 2. y 3. Porque los numeros cubicos son sólidos semejantes, y las raices lados proporcionales: Luego tienen la razon triplicada de las raices, ò lados (64), y entre ellos avrà dos medios proporcionales, que es la prop. 12. del 8. de Eucl.

643 Si de quatro numeros continuamente proporcionales, como 8. 12. 18. 27. el primero 8. fuere cubico, tambien lo serà el ultimo 27.

Por-

Porque siendo continuamente proporcionales, avrà dos medios: Luego los extremos 8. y 27. son sólidos semejantes (641). Y como à un cubo no aya otro sólido semejante sino otro cubo; si el primero 8. es cubo, tambien el ultimo 27. Es la prop. 23. del 8. de Eucl.

644 Los numeros sólidos semejantes tienen entre sì la misma razon que un cubo à otro; esto es, que si ay dos sólidos semejantes como 10. y 80. avrá necessariamente dos cubos como 1. y 8. que tengan la misma razon. Porque como 10. y 80. son sólidos semejantes, avrà entre ellos dos medios proporcionales 20. y 40. (641); y assi serà continuamente proporcionales 10. 20. 40. 80. Hallènse quatro numeros proporcionales minimos (370), que son 1. 2. 4. 8. de los quales el primero, y ultimo son cubos (371): Luego los sólidos semejantes son como los cubos. Es la prop. 27. del 8. de Eucl.

10.	20.	40.	80.
1.	2.	4.	8.

THEOREMA III.

LOS NUMEROS QUADRADOS TIENEN ENTRE SI razon duplicada de sus raìces; los cubos triplicada; los quadrado quadrados, quadruplicada, &c.

645 ESte Theorema, en quanto à los quadrados, y cubos, està yà demonstrado arriba (636. y 642.) Aora lo demonstraremos universalmente, comprehendiendo todas las Potestades. Es à saber, que los quadrados tienen entre sì la razon duplicada de sus raìces; los cubos, triplicada; los quadrado quadrados, quadruplicada; los cubo cubos, quintuplicada, y assi prosiguiendo infinitamente.

A.	B.			
2.	3.			
AA.	AB.	BB.		
4.	6.	9.		
AAA.	AAB.	ABB.	BBB.	
8.	12.	18.	27.	
AAAA.	AAAB.	AABB.	ABBB.	BBBB.
16.	24.	36.	54.	81.

Sean, pues, dos raìces A. y B. las quales multiplicadas por sì mismas producen los quadrados AA. BB. entre los quales ay un medio proporcional AB. porque AA. à BB. tiene la razon de A. à B. (305). Assi mismo, AB. à BB. tiene la

la razon de A. à B. Luego teniendo AA. à BB. la razõn duplicada de AA. à AB. (292) tendrá la razon duplicada de la razon de las raíces A. à B.

Las mismas raíces A. B. multiplicando á los quadrados AA. y BB. produciràn los cubos AAA. y BBB. como consta por la generacion de las potestades; y multiplicando las dichas raíces al medio AB. produciràn à los numeros AAB. y ABB. los quales son medios proporcionales; porque AAA. à AAB. tienen la razon de A. á B. (305). Asimismo AAB. Item ABB. á BBB. tienen la razon de A. à B. Luego AAA. AAB. ABB. BBB. son continuamente proporcionales en la razon de las raíces A. à B. y assi, los cubos AAA. y BBB. que son los extremos, tienen la razon triplicada de las raíces (292), que como està dicho, es la misma que la de AAA. à AAB.

Mas las mismas raìces A. y B. multiplicando á sus cubos AAA. y BBB. producen los quadrado quadrados AAAA. y BBBB. como consta por la formacion de las potestades; y las mismas raìces, multiplicando à los medios AAB. AB. ABB. forman à AAAB. AABB. ABBB. que son medios proporcionales entre los quadrado quadrados referidos, pues que todos guardan la razon de las raíces A. à B. (305): Luego AAAA. AAAB. AABB. ABBB. BBBB. son continuamente proporcionales en la razon de las raíces A. à B. Luego los extremos, que son los quadrado quadrados, tienen la razon quadruplicada de AAAB. à AAAB. (292) que es la misma que la de A. à B.

Por la misma razon los cubo cubos tendràn la razon quintuplicada de las raìces; los quadrado quadrado cubos, quintuplicada; y assí de los demàs segun fuere su exponente. De suerte, que las potestades, cuyo exponente es 2. tienen entre sì la razon duplicada de sus raìces; las potestades, cuyo exponente es 3. triplicada; las que tienen el exponente 4. quadruplicada, &c.

Consectarios.

646 Entre los quadrados ay un medio proporcional; entre los cubos, dos; entre los quadrado quadrados, tres; entre los cubo cubos, quatro; y assi de los demás, uno menos siempre que el exponente. De suerte, entre las potestades que tienen 2. por exponente, cae un medio proporcional, entre las que tienen al exponente 3. ay dos medios proporcionales; entre las que tienen 4. por exponente, ay tres mèdios, &c.

647 Las raìces tienen la razon subduplicada de los quadrados; subtriplicada de los cubos; subquadruplicada de los quadrado quadrados, &c. Porque teniendo las potestades la razon duplicada, triplicada, &c. de las raíces, tendrán las mismas raices la razon subduplicada, subtriplicada, &c. de las potestades (292).

648 Si ay tres numeros continuamente proporcionales, si el primero es

 qua-

quadrado, tambien lo será el tercero. Si son quatro los numeros continuamente proporcionales, y el primero fuere cubo, tambien lo será el quarto. Si son cinco, y el primero fuere quadrado quadrado, tambien lo serà el quinto; y asi de las demás.

THEOREMA IV.

EN QUALQUIER SERIE DE NUMEROS CONTINUAMENTE proporcionales, que comienza de la unidad, el tercero quinto, septimo, y assi alternativamente, son quadrados; el quarto, septimo, y assi entredexando dos, son cubos; el quinto, nono, y assi entredexando tres, son quadrado quadrados., y assi de las demàs potestades.

649 LO primero domonstrarè, que el numero segundo, que aqui es el 2. es raiz de todos los demás; y asi, el tercero 4. serà quadrado, el quarto 8. cubo; el quinto 16. quadrado quadrado, &c. Porque como 1. 2. 4. son continuamente proporcionales, tantas veces entrarà el 1. en el 2. quantas el 2. en el 4. Luego como el 1. mide el 2. por el mismo 2. esto es, dos veces, tambien el 2. medirá al 4. dos veces, que es tantas veces como unidades tiene en 2. y asi serà lo mismo que multiplicandose asi mismo; con que el 2. es raiz quadrada respeto del 4.

Asimismo, como 1. 2. 4. 8. son continuamente proporcionales, tantas veces entrarà el 1. en el 2. quantas el 4. en el 8. Luego como el 1. entra en el 2. tantas veces como tiene unidades; esto es, dos veces, tambien el 4. entrará dos veces en el 8. y asi, el 2. multiplicando al 4. produce al 8. y por consiguiente es cubo, como consta por la generacion de las potestades, y su raiz es el 2.

Del mismo modo, el 8. entra en el 16. tantas veces, como 1. en 2. y asi, el 2. multiplicando al 8. produce al quadrado quadrado 16. cuya raiz es el mismo 2. Y de este modo se demonstrarà, que el 32. es cubo cubo, y que su raiz es el 2. Mas, que el 64. es quadrado quadrado cubo, cuya raiz es el mismo 2. y asi de las demás petestades.

1.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1.	2.	4.	8.	16.	256.	512.	1024.	2048.		

650 Esto supuesto digo lo primero, que contando de tres en tres numeros inclusivè desde la unidad arriba, todos son quadrados; porque el tercero 4. yà queda probado que es quadrado: Luego tambien lo serà el quinto 16. porque 4. 8. 16. son continuamente proporcionales; y siendo el 4. numero quadrado, tambien lo serà el 16. (637). Asimismo 16. 32. 64. son continuamente proporcionales por la suposicion: Luego si 16. es quadrado, tambien lo será el 64. y asi de los demàs.

Lo

Lo segundo, que contando de quatro en quatro numeros desde la unidad arriba inclusivè, todos son cubos; que el quarto 8. lo sea, consta por la demonstracion antecedente; que el septimo lo sea, es manifiesto; porque 8. 16. 32. 64. son continuamente proporcionales por la suposicion: Luego si el 8. es cubo, tambien lo serà el 64. (643), y assi de los demás.

Lo tercero, que contando de cinco en cinco numeros desde la unidad arriba inclusivè, todos son quadrado quadrados. Que el quinto lo sea, ya queda probado; pero que el decimo sea quadrado quadrado, consta; porque el 16. 32. 64. 128. 256. 512. son continuamente proporcionales por la suposicion: Luego si el 16. es quadrado quadrado, tambien lo serà el 512. Y de este modo se probarà el Theorema en todas las demàs potestades. Esta proposicion es la 8. del 9. de Euclides, pero mas universal.

THEOREMA V.

SI DOS POTESTADES SEMEJANTES SE MULTIPLICAN, ò dividen unas por otras, los productos, ò quocientes seràn potestades del mismo genero, cuyas raices seràn los productos, ò quocientes de las raices de las potestades multiplicantes, ò dividentes.

Exposicion.

651 SI dos quadrados como 4. y 36. se multiplican entre sí, el producto 144. serà numero quadrado, cuya raíz 12. es el producto de la raíz 2. de un quadrado por la raìz 6. del otro. Y si el quadrado 36. se divide por el quadrado 4. el quociente 9. serà tambien numero quadrado, cuya raíz es el quociente 3. de la division de la raìz 6. del quadrado 36. por la raìz 2. del quadrado 4. Assi mismo, si dos cubos como 8. y 64. se multiplican entre sí, el producto 512. serà tambien cubo, cuya raìz cubica 8. es el producto de la raìz 2. del cubo 8. por la raìz 4. del cubo 64. Y si el 64. se parte por el 8. el quociente 8. serà numero cubico, cuya raìz 2. es el quociente de la raìz 4. por la raìz 2. Y lo mismo proporcionalmente digo de todas las otras potestades.

Demonstracion.

Sean los quadrados multiplicantes AA. y BB. cuyas raices son A. y B. y el producto AABB. Digo lo primero, que este producto es numero quadrado. Multipliquese AA. à sí mismo, y producirà el quadrado AAAA. Y pues AA. multiplicando à sì mismo, y al quadrado BB. produce los numeros AAAA. y AABB. tendràn estos la misma razon de AA. à BB.

	1	
A		B
3		6
AA	AB	BB
9	18	36
AAA		AABB
81		324

à BB. (71). Y como AA. BB. son quadrados por la suposicion, avrà entre ellos un medio proporcional AB. (635): Luego entre AAAA. y AABB. avrà otro medio proporcional, por la 8. del 8. de Eucl. Luego siendo AAAA. quadrado, lo serà tambien AABB. (637).

Digo lo segundo, que la raíz quadrada del quadrado AABB. es el producto AB. de las raíces A. y B. porque el producto AB. à una raíz B. tiene la misma razon, que la otra raíz A. à la unidad (57). Por lo mismo, el producto AABB. al quadrado BB. tiene la misma razon, que el otro quadrado multiplicante AA. à la unidad. La razon, pues, de AABB. à BB. es duplicada de la razon de sus raíces; esto es, de la raíz de AABB. à la raíz. B. por ser numeros quadrados (636). Assi mismo, la razon del quadrado AA. à la unidad quadrada, es duplicada de la raíz A. à la raíz de la unidad quadrada, que es 1. Luego la raíz de AABB. à la raíz B. tiene la misma razon; que la raíz A. à la unidad, porque entrambas tienen la razon subduplicada de sus quadrados, y las subduplicadas de iguales son iguales. Pues como AB. à B. tenga la misma razon que A. à la unidad, seràn las razones de la raíz de AABB. à B. y la de AB à B. iguales: Luego AB. y la raíz de AABB. son iguales. Y assi, la raíz del producto de dos quadrados, es él producto de sus raíces.

La misma demonstracion se ha de aplicar à todas las otras potestades, solo mudando lo que aqui se ha dicho, que los quadrados tienen entre sí la razon duplicada de sus raíces, y estas subduplicadas de los quadrados en razon triplicada, quadruplicada, &c. y en razon subtriplicada, subquadruplicada, &c. Y para que esté manifiesta, bolverè à repetirla en los cubos.

Sean dos cubos AAA. BBB. cuyas raíces son A. y B. Multipliquese el uno por el otro. Digo lo primero, que el producto AAABBB. es tambien numero cubico; porque multiplicandose AAA. à sí mismo, producirà el numero AAAAAA. (el qual es cubo, porque multiplicandose un cubo à sí mismo, sale cubo cubo, que es dos veces cubo por multiplicacion, como consta por la generacion de las potestades): Luego AAAAAA. y AAABBB. tendràn la razon de AAA. y BBB. (71). Y como AAA. y BBB. son cubos por la suposicion, avrà entre ellos dos medios proporcionales (642); y por consiguiente entre AAAAAA. y AAABBB. avrà tambien otros dos medios proporcionales, por la 8. del 8. de Eucl. y seràn qua-

	1		
A.	2.	3.	B.
AAA.	8.	216.	BBB.
AAAAAA.	64.	1728.	AAABBB.
	AB.		
	6.		

quatro numeros continuamente proporcionales; y assi, siendo el primero AAAAAA. cubo, tambien lo serà el ultimo AAABBB. (643).

Digo lo segundo, que la raìz cubica del cubo AAABBB. es el producto AB. de las raìces A. B. Porque el producto AB. à una raìz B. tiene la misma razon, que la otra raìz A. à la unidad (37); y tambien el producto AAABBB. (que como està dicho es cubo) al cubo BBB. tiene la misma razon, que el otro cubo multiplicante AAA. à la unidad. La razon, pues, de AAABBB. á BBB. es triplicada de sus raìces (642). Assi mismo, la razon del cubo AAA. á la unidad cubica, es triplicada de sus raìces; esto es, de la raìz A. à la raìz de la unidad cubica, que es 1. Luego la raìz cubica de AAABBB. á la raìz B. tiene la misma razon que la raìz. A. la unidad; porque las dos tienen la razon subtriplicada de sus potestades, y las razones subtriplicadas de iguales son iguales (293). Pues como AB. á B. tenga la misma razon que A. à la unidad, seràn las razones de la raìz de AAABBB. à B. y la de AB. à B. iguales: Luego AB. y la raìz de AAABBB. son iguales. Y assi, la raìz cubica del producto de dos cubos, es el producto de sus raìces.

La segunda parte del Theorema, que dividiendo una potestad por otra semejante el quociente tambien es potestad semejante, y su raìz es el quociente de la division, se infiere de lo que hemos demonstrado; porque como multiplicando una potestad por otra su semejante sale una potestad semejante, cuya raìz es el producto de las raìces de las potestades multiplicantes: Luego dividiendo el producto por una de estas potestades multiplicantes, saldrà la otra potestad semejante; y dividiendo la raìz del producto por una de las raìces de las potestades multiplicantes, saldrà la raìz de la otra potestad. Esto se funda, en que la division deshace lo que la multiplicacion hace.

THEOREMA VI.

EN QUALQUIER SERIE DE NUMEROS CONTINUAMENte proporcionales, que comienza de la unidad, del mismo genero de petestad que es el segundo, seràn todos los demàs.

652 SEa qualquier série de numeros continuamente proporcionales, que comienza de la unidad A.B.C.D.E. (en la qual se comprehenden quatro diferentes séries). Digo, que si el segundo termino B. es quadrado, todos los demás seràn quadrados, como en la primera; si es cubo, como en la segunda, todos seràn cubos, si quadrado quadrado, como en la tercera, todos los demàs serà quadrado quadrados, &c.

Porque el segundo termino B. es raìz de todos los demàs (640). Luego multiplicandose à sì mismo produce al tercero C. y multiplicando à este produce al quarto D.&c. Pues como por la suposicion el segundo es quadrado, cubo, &c. multiplicandose á sì mismo producirà tambien quadrado, cubo, &c. como queda demonstrado en el Theorema antecedente; y assi, el termino tercero serà potestad semejante á la del segundo termino; y multiplicando el segundo por el tercero, saldrà el quarto del mismo genero de potestad que primero; porque como primero, y tercero son potestades de un mismo genero, tambien lo serà el producto, que es el quarto por el Theorema antecedente; y assi de lo demàs.

A.	B.	C.	D.	E.
1.	4.	16.	64.	252.
1.	8.	64.	512.	4096.
1.	16.	256.	4076.	65196.
1.	32.	1024.	12768.	408576.

THEOREMA VII.

SI UNA POTESTAD MIDE A OTRA, TAMBIEN SU RAIZ midirà à la raìz de la otra. Y si una raìz mide à otra, tambien la potestad midirá à la potestad.

653 SUpongo que el quadrado 9. mide al quadrado 36. esto es, que multiplicado algunas veces constituye al 36. Digo lo primero, que tambien la raìz quadrada 3. del 9. midirà à la raìz quadrada 6. del 36. Porque siendo el 9. y el 36. numeros quadrados, avrà entre ellos un medio proporcional 18. y assi seràn continuamente proporcionales 9. 18. 36. en la razon de las raìces 3. á 6. Y como el quadrado 9. mida al 36. por la supcsicion, luego el 9. tambien midirá al 18. por la prop. 7. del 8. de Eucl. Y pues 9. es à 18. como la raìz 3. à la raìz 6. si el 9. mide al 18. tambien la raìz 3. á la raíz 6. porque la misma especie de la razon submultiplice que tiene 9. à 18. dice tambien el 3. al 6.

3.		6.
9.	18.	36.

Digo lo segundo, que si la raìz 3. mide á la raìz 6. tambien el quadrado 9. midirá al quadrado 36. Porque si la raìz 3. mide à la raìz 6. tambien el quadrado 9. midirá al medio proporcional 18. por tener la misma razon, como està dicho: Luego el 9. midirà el 36. porque 9. mide al 18. y este al 36. Hasta aqui es la prop. 14. del lib. 8. de Eucl.

Estas mismas demonstraciones se aplicaràn à los cubos, quadrado quadrados, &c. solo con la advertencia, que assi como se ha dicho que en-

entre los quadrados ay un medio proporcional, se ha de decir que entre los cubos ay dos medios; entre los quadrado quadrados tres, &c. En quanto à los cubos es la prop. 15. del 8. de Eucl.

Consectario.

654 De aqui se infiere, que si una potestad como 4. no mide à otra como à 9. ni tampoco la raìz 2. midirá à la raìz 3. Y si una raíz no mide á la otra, tampoco la potestad midirà á la otra. Porque si una raìz midiera à la otra, tambien la una potestad midiria à la otra, lo qual es contra la suposicion. Assi mismo, si una potestad mide à la otra, tambien la raìz ha de medir á la otra, que es contra la suposicion.

THEOREMA VIII.

EL NUMERO ENTERO, QUE NO TIENE RAIZ EN NUmero entero, y tampoco la tendrà en entero, y quebrado, ni en quebrado solo.

656 SI algun numero entero como el 30. se toma por potestad, el qual no tiene raìz quadrada, ò cubica, ò quadrado, quadrada, &c. expressada en numero entero: digo, que tampoco tendrá raìz expressada en entero, y quebrado, ni en quebrado solo; y por consiguiente la tal potestad serà irracional, y su raìz sorda.

Supongo que alguno dixera, que la raìz quadrada del 30. es 5. y un tercio. El intento, pues, es probar que no puede ser. Reduzgase el entero al quebrado, y será 16. tercios, cuyo denominador 3. no mide al numerador 16. porque si le midiera, el dicho quebrado contendria alguno, ò algunos entre justos, que es contra la suposicion que hice, de que la raíz sea entero, y quebrado. Multipliquense el 16. tercios por sì mismo, que es multiplicar el numerador, y denominador por sì mismo, y saldrà el quebrado quadrado 256. novenos, el qual; si la suposicion es verdadera, ha de igualar al entero 30. porque como la raiz de 30. se dice que es 5. y un tercio, ò 16. tercios, multiplicandola por sì misma ha de producir un numero igual al quadrado 30. lo qual es impossible; porque como la raíz 3. no mide á la raìz. 16. del quebrado 16. tercios (los terminos deste quebrado son raíces de los terminos del 256. novenos, y todo el quebrado es raíz): Luego ni el quadrado 9. midirá al quadrado 256. (654); y assi, partiendo el numerador 256. por el denominador, no vendrá al quociente numero entero justo, como avia de venir; porque el dicho quebrado quadrado avia de ser igual al numero 30.

Del mismo modo se demonstrarà, que la raíz quadrada del nume-

 ro

ro 30. nó puede ser numero entero con otro qualquiér quebrado; porque reduciendo el entero al quebrado, el denominador no podrà medir al numerador; y assi, quadrando el dicho quebrado, tampoco su denominador no podrá medir à su numerador; y por consiguiente el quebrado quadrado no serà igual à numero entero justo, que es lo que se pretende. Y esta misma demonstracion se podrá aplicar el quebrado solo, y à las otras potestades, pues que si sus raices no se miden, tampoco ellas se midiràn.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL NUMERO QUADRADO, Y SU RAIZ.

YA queda explicado arriba, què sea numero quadrado, y raíz quadrada. Aora pondrèmos algunos Theoremas especiales de los quadrados, y despues passarémos á sacar sus raìces. El que solo gustàre de la practica, podrà omitirlos.

THEOREMA I.

EL NUMERO, CUYO PRIMER GUARISMO ES 2. 3. 7. 8. no es quadrado.

657 POrque el primer guarismo de un numero quadrado siempre es el mismo, que el primer guarismo del quadrado de un numero digito: v. gr. el primer guarismo *6.* del quadrado *576.* es el mismo que el primer guarismo del quadrado *16.* del numero digito 4. Esto es, multiplicando el primer guarismo 4. de la raìz. 24. por sí mismo produce *16.* cuyo primer guarismo es el mismo que el del quadrado total *576.* Porque multiplicando 24. por 24. se multiplica 4. por 4. y el segundo producto parcial se escrive una casa mas adelante; y assi, el primer guarismo del producto de 4. por 4. que es *16.* siempre queda en primer lugar. Pues como no aya numero alguno digito, que quadrandose produzga un numero, cuyo primer guarismo sea 2. 3. 7. 8. tampoco avrà quadrado alguno, cuyo primer guarismo sea 2. 3. 7. 8.

```
  24
  24
 ---
  96
 48
 ---
 576
```

Consectarios.

658. Si un numero tiene al principio zeros impares; esto es, uno, tres, cinco, &c. como estos 210. 1000. 3500000. no es quadrado. Porque si el primer guarismo de la raìz es zero, necessariamente en su quadrado

do ha de aver dos zeros; y si tiene la raíz dos zeros al principio, ha de tener el quadrado quatro, como consta por el multiplicar. Con que los zeros que puede aver al principio de un numero quadrado han de ser pares; esto es, dos, quatro, seis, &c.

659 El primer guarismo de un numero quadrado solo, puede ser uno destos 1. 4. 5. 6. 9. 0. porque estos solos son los primeros guarismos de los quadrados de los numeros digitos, como se verà abaxo en su tabla. Pero por tener al principio uno destos guarismos, no se sigue que el numero sea quadrado; porque pueden provenir de la multiplicacion de dos numeros desiguales, ò ser numeros primos, como se vè en estos 11. 19. &c. Lo que digo es, que un numero para ser quadrado, necessariamente ha de tener al principio uno destos guarismos 1. 4. 5. 6. 9. 0. aunque teniendo esta circunstancia puede no ser quadrado. Pero si al principio no tiene uno de dichos guarismos, sino uno destos otros 2. 3. 7. 8 necessariamente no serà quadrado.

THEOREMA II.

LA RAIZ QUADRADA DE UN NUMERO QUE TIENE dos guarismos: es solo un guarismo; la de un numero de tres, ò quatro guarismos, contiene dos guarismos; la de un numero de cinco, ò seis guarismos, tiene tres guarismos, &c.

660 ESte Theorema se puede proponer de otro modo, que es el siguiente: Qualquier numero quadrado que està entre 1. y 100. tiene por la raìz un guarismo solo. El quadrado que està desde 100. hasta 9999. ò hasta 10000. exclusive, tiene dos guarismos. El quadrado que està entre 9999. y 100000. tiene tres guarismos, &c.

La razon; esto es, porque el numero 10. es el menor de los que tienen dos guarismos, y multiplicandose à sì mismo produce al quadrado 1000. que tiene tres guarismos: Luego qualquier quadrado que tenga dos guarismos, serà menor que el numero 100. y por consiguiente tendrà menor raìz que 10. y assi constarà de un guarismo solo. Mas el numero 100. es el menor de los que tienen tres guarismos, y multiplicandose à sì mismo produce al quadrado 10000. que tiene cinco guarimos: Luego el quadrado que tuviere quatro guarismos, serà menor que el dicho quadrado 10000. y por consiguiente su raìz serà menor que la raìz 100. y assi, necessariamente ha de tener dos guarismos, &c.

Consectario.

661 De aqui se infiere, que si qualquier numero se divide de dos,

dos en dos guarismos, comenzando desde las unidades, en cada miembro está incluido un quadrado; y assi tendrà tantos guarismos la raiz de todo el numero, quantos miembros huviere. Como si este numero 12. 51. 29. se divide de dos en dos guarismos, comenzando por la derecha ácia la izquierda, su raiz tendrà tres guarismos; porque ay otros tantos miembros, y en cada uno está escondido un quadrado.

THEOREMA III.

SI UN NUMERO SE DIVIDE EN DOS QUALESQUIERA partes, el quadrado del todo es igual à los quadrados de las partes, y à dos rectangulos de las mismas partes.

Exposicion.

662 Tomese qualquier numero como el 10. el qual se divida en dos qualesquiera partes como en 6. y 4. Digo, que el quadrado 100. de todo el numero es igual à los quadrados 36. y 16. de las partes, juntamente con dos numeros planos 24. y 24. (que son los rectangulos) de la multiplicacion de las mismas partes. Assi mismo, si este numero 32. se divide en 30. y 2. digo, que el quadrado 1024. es igual à los quadrados 900. y 4. de las partes, y à dos planos 60. y 60. de las mismas partes. Y assi de los demàs.

36	900
16	4
24	60
24	60
100	1024

Demonstracion.

Este Theorema es el fundamento de la regla de sacar raiz quadrada, y le demonstrò Euclides en la quantidad continua en la prop. 4. del lib. 2. y el Padre Clavio en numeros en el escolio de la prop. 14. del 9. de Eucl. Pero si atendemos à la multiplicacion de los guarismos, segun su lugar, por sí mismo es manifiesto. En el ultimo exemplo, multiplicando el primer guarismo 2. del multiplicador 32. por el primer guarismo 2. del numero multiplicado 32. es evidente que nace el numero quadrado 4. Multiplicando el mismo 2. del multiplicador 32. por el segundo guarismo 3. del numero multiplicando 32. salen 6. decenas; esto es, 60. Multiplicando el segundo guarismo 3. del multiplicador, por el primer guarismo 2. del numero multiplicando, salen tambien 6. decenas, que son 60. Multiplicando, ultimamente el segundo guarismo 3. del multiplicador, por el segundo 3. del numero multiplicando; esto es, 30. por 30. es cierto

32
32
4
60
60
900
1024

to que ſaldrà el quadrado 900. Sumandolo todo harà el quadrado 1024. del numero 32.

En eſte otro numero 98. ſe verà lo miſmo. Multiplicando las unidades 8. por las unidades 8. ſale el quadrado 64. como es manifieſto. Multiplicando las unidades 8. por las decenas 9. ſale el plano 720. Multiplicando las decenas 9. por las unidades 8. ſale otra vez el miſmo plano 720. porque lo miſmo es multiplicar 8. unidades por 9. decenas, que eſtas por aquellas (59). Ultimamente, multiplicando las decenas 9. por las decenas 9. ſale el quadrado 8100. Sumandolo todo nace el quadrado 9604 de todo el numero 98. Y lo miſmo ſe demonſtrarà en qualquier otro numero; porque todo conſiſte en la multiplicacion; ſin guardar decenas, ſino eſcriviendolas en ſu lugar; eſto es, cada producto de por ſí, como ſe vè en los exemplos.

```
  98
  98
----
  64
 720
 720
8100
----
9604
```

Conſectarios.

663 De aqui ſe infiere, que el quadrado 9604. de todo el numero 98. no ſolamente es igual á los quadrados, y planos de ſus partes, como eſtà dicho, tomando los ſegundos guariſmos como decenas, ſino tambien tomandolos ſencillamente como unidades, y eſcriviendo los productos un lugar, ò caſa mas adelante; porque ſi bien ſe advierte, multiplicando el 8. por el 9. tomado en ſegundo lugar, ò como à decenas, produce 720. Y como el zero ſolo ſirve de llenar lugar, y hacer paſſar al numero una caſa mas adelante, ſerà lo miſmo eſcrivir el 720. que el poner una caſa mas adelante el 72. que es el producto de 8. por 9. tomados como unidades; y aſsi de los demàs, como ſe vè aqui figurado ſin zeros.

```
  98
  98
----
  64
 72
 72
81
----
9604
```

664 Si à un numero quadrado como al 9. ſe añade el duplo de ſu raíz, y mas la unidad, ſale el quadrado 16. proxime mayor en numeros enteros; eſto es, cuya raíz 4. es una unidad mayor que la raíz 3. del 9. Porque ſi à la raíz 3. del quadrado 9. ſe añade una unidad, ſerà 4. y ſi el quatro ſe divide en dos partes 3. y 1. el quadrado del 4. que es 16. ſerà igual al quadrado del 3. que es 9. á dos rectangulos, ò planos de las partes 3. y 1. que ſon 3. y 3. y al-

```
 31
 31
---
  1
  3
  3
 9
---
 16
```

al quadrado de la otra parte 1. que es 1. (662): Luego el quadrado 16. consta del quadrado 9. del duplo de su raíz, y de la unidad, como se vé en el exemplo; porque multiplicando 1. por 1. hace 1. multiplicando 1. por 3. salen 3. multiplicando 3. por 1. salen tambien 3. y assi, los dos 3. hacen 6. que es el duplo de la raìz. Multiplicando ultimamente el 3. por el 3. hace al quadrado 9. Luego sumandolo todo sale el quadrado del 4. que es 16.

Pero advierto, que como el 4. que consta de un guarismo, se ha dividido en dos; esto es, en 3. y 1. el 3. aunque estè en segundo lugar, no representa decenas, sino unidades, supuesto que no hace 31. sino 3. y 1. Luego tambien los productos que salieren no se han de poner en el lugar de las decenas, ò centenas, sino en las unidades, como se vè figurado.

665 Si de un numero quadrado como del 16. se quita el duplo de su raíz 4. menos la unidad, quedarà el quadrado 9. proxime menor; porque la raíz 4. excede á la raìz 3. del quadrado que queda en 1. y assi, el duplo de la raìz 4. que es 8. excede al duplo de la raìz 3. que es 6. en dos unidades: Luego si añadiendo el duplo de la raiz menor 3. que es 6. mas una unidad de aquellas dos del excesso, que todo es 7. al quadrado 9. de la raìz 3. sale el quadrado proxime mayor, como queda dicho. Si del duplo 8. de la raìz 4. se quita una unidad, que es la otra de las dos del excesso, quedarà el duplo de la raíz 3. y una unidad; esto es, 7. y esto, si se resta del quadrado 16. se bolverà à restituìr el quadrado proxime menor 9.

666 De estos dos consectarios nace un modo facil para hacer la tabla de los numeros quadrados sin multiplicar, la qual es de sumo descanso para hallar la raíz quadrada. Contiene dos colunas, en la primera están las raíces, y en la segunda los quadrados. Primeramente escrivanse las raìces en la primera coluna, hasta donde la tabla se quiere continuar; y escriviendo 1. en la segunda coluna al lado de la raíz 1. doblese la raíz 1. y serán 2. añadase 1. y saldràn 3. los quales añadidos al quadrado 1. saldrà el quadrado proxime mayor 4. Despues doblando la raíz 2. y al duplo 4. añadiendo 1. son 5. los quales sumados con el quadrado 4. vendrà el quadrado proxime mayor 9. Otra vez doblese la raíz 3. y añadiendole una unidad serà 7. sumense con el quadrado 9. y saldrá el quadrado 16. immediate siguiente, y assi de los demàs.

Raíces.	Quadrados.
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81
10	100
11	121
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256

Si

Si la tabla se ha de comenzar del fin, como del quadrado 256. cuya raìz es 16. doblese esta raiz, y quitandose 1. quedaràn 31. restense del quadrado 256. y quedarà el quadrado proxime menor 225. cuya raíz es 15. una unidad menor que la raìz 19. y asi de los demàs.

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ QUADRADA DE QUALQUIER NUMEro entero que conste de uno, ò dos guarismos.

667 SAcar raìz quadrada de un numero, es hallar un numero, que multiplicado por sì mismo produzga al numero de quien es raìz. Como sacar raíz quadrada del 49. es hallar el 7. el qual multiplicandose à sì mismo produce 49. Es una especie de division, pero mas dificultosa, porque el partidor, y quociente han de ser iguales; como si el mismo 49. se divide por 7. saldrà el quociente 7.

Esto supuesto, para sacar raìz quadrada de un numero que consta de uno, ò dos guarismos, la qual necessariamente ha de tener un solo guarismo (660), se buscará por la tabla antecedente, ó de memoria, qual quadrado iguala, ó es proxime menor que el numero propuesto, y restandole, si nada sobra, serà la raíz del quadrado restado la que se busca; pero si sobra algo, pongase por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà la raìz doblada, y mas la unidad; y la dicha raìz, con este quebrado, serà la raíz algo aproximada; pero menor que la verdadera, la qual no se puede hallar por ser sorda.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz quadrada del 64. Busco en la tabla antecedente, ó de memoria, què quadrado ay igual, ò proxime menor que el 64. y hallo que 64. cuya raìz quadrada es 8. Resto 64. de 64. y porque nada sobra, digo, que la raìz quadrada de 64 es 8.

Exemplo II.

Busquese la raìz quadrada de 83. En la tabla antecedente el quadrado proxime menor que el 83. es 81. cuya raíz es 9. Resto el 81. del 83. y quedan 2. que pongo por numerador de un quebrado, cuyo denominador es 19. esto es, el duplo de la raíz 9. y mas la unidad, y assi digo, que la raìz quadrada proxime menor del 83. es 9, y 2. 19. avos.

Demonstracion.

Toda la dificultad està en dar la razon; porque quando el numero de quien se ha de sacar raìz no es quadrado, se pone lo que sobra por numerador de un quebrado, cuyo denominador, es el duplo de la raíz del quadra-

drado proxime mayor que se incluye en tal numero, y mas la unidad; porque lo demàs por sí mismo es manifiesto. Asi lo demuestro.

El numero 83. (en este segundo exemplo) està entre el quadrado 81. cuya raíz es 9. y entre el quadrado 100. cuya raíz es 10. Luego su raíz ha de estàr entre las raíces 9. y 10. que solo se diferencian en la unidad. Y como la diferencia del quadrado 81. al quadrado 100. es el duplo de la raiz 9. y mas la unidad; esto es, 19. porque añadiendo 19. al 81. hacen 100. (664) el residuo 2. serà parte del 19. esto es, que en el numero 83. ay un quadrado 81. y sobran dos unidades de aquellas 19. que faltan para hacer al quadrado 100. Con que se forma el quebrado 2. 19. avos, el qual es numero plano; porque el numerador, y denominador, son, ó por mejor decir se entienden ser numeros planos, supuesto que pertenecen á la composicion de quadrado.

Aora falta demonstrar, que el quebrado 2. 19. avos, en quanto es linear, es lado de sí mismo, en quanto es plano, porque como el lado del plano 19. es 1. que es la diferencia de las raices 9. y 10. la razon del plano 19. al residuo plano 2. serà casi la misma, que la del lado, ò diferencia 1. al lado 2. 19. avos; esto es, haciendo regla de tres: Si 19. dan 2. luego 1. dará 2. 19. avos; porque aunque los planos no guardan la razon siempre de los lados, sino compuesta de ellos; pero como el lado del mayor plano 19. es sola unidad, que es la diferencia de las raices de los quadrados 81. y 100. la qual en entero no puede ser menor, será muy pequeña la diferencia que avrá del lado 2. 19. avos del plano menor 2. al lado verdadero; y asi, con poca diferencia guardan la misma razon los planos, y los lados, y por consiguiente la raìz 9. y 2. 19. avos proxima, aunque no es la verdadera; porque los numeros enteros, que no tienen raìz en enteros; tampoco la tienen en entero, y quebrado (656).

Pero si en la quantidad continua se consideran dos quadrados desiguales, de tal suerte puestos, que el uno estè dentro del otro, ajustandose los dos lados, será la diferencia una superficie al modo de esquadra, ó como dos brazos de una cruz, á la qual llaman *Gnomon*, y representa al plano 19. en nuestro exemplo. Pues si su lado menor, que representa la unidad, se divide en 19. partes, y destas se toman 2. tirando por alli lineas paralelas, que dividan al dicho Gnomon, es manifiesto que no le dividiràn en partes proporcionales á las del lado, sino que la parte de dentro serà menor proporcionalmente que la de afuera, y por esta causa el quebrado 2. 19. avos es menor que lo justo; y por consiguiente, tambien toda la raìz 9. y 2. 19. avos serà menor.

Examen.

668 Multipliquense los enteros de la raiz hallada por sì mismos, y al

al producto añadase el numerador del quebrado, que es el residuo, y ha de salir el numero de quien se ha sacado raìz; pero con advertencia, que el dicho residuo ha de ser menor que la raìz duplicada, juntamente con la unidad; porque si fuere igual, ò mayor, alomenos podrà tener la raìz una unidad mas. Y assi, en el exemplo segundo, multiplicando 9. por 9. salen 81. y añadiendo el residuo 2. son 83. que es el numero de quien se ha sacado raiz. Si no ay residuo, entonces el quadrado de la raiz ha de igualar al numero de quien se sacò la raìz; como en el primer exemplo, multiplicando 8. por 8. salen 64.

PROBLEMA II.

SACAR LA RAIZ QUADRADA DE QUALQUIER NUmero entero, que conste de mas de dos guarismos.

Preceptos.

669. PRimero: Dividase el numero con distinciones de dos en dos guarismos, comenzando de mano derecha, ò de las unidades àcia la izquierda, aunque el ultimo miembro tenga solo un guarismo; y tantos guarismos ha de tener la raìz, quantos fueren los miembros. Tirese una linea por encima del numero, sobre la qual se escriviràn los guarismos de la raìz, cada una correpondiente à su miembro.

670 Segundo: Saquese la raìz quadrada del primer miembro de la izquierda, como si fuera solo por el Problema antecedente, escriviendola sobre la linea, y su quadrado debaxo del dicho miembro para restarle. Hecha la resta escrivase el residuo debaxo del quadrado, advirtiendo, que ningun residuo puede ser mayor que la raìz duplicada; porque si fuera mayor, avria de ser la raìz tambien mayor lo menos una unidad.

671 Tercero: Abaxese el miembro siguiente, escriviendole al lado del primer residuo, para hacer el miembro total. Doblese la raìz hallada, añadiendole siempre un zero, para guardar el debido lugar de los guarismos, à la qual, assi doblada con el zero, llamarèmos divisor. Dividase el miembro total por este divisor, no dando al quociente todo lo que se puede dar, segun las raglas del partir, sino atendiendo à que el producto del divisor por el quociente, junto con el quadrado del mismo quociente, se pueda restar del miembro total, lo qual enseñarà el exercicio; y assi, multipliquese el divisor por el quociente, y al producto añadase el quadrado del mismo quociente, cuya summa escrivase debaxo del residuo total, y haciendo la resta escrivase

se

se el residuo debaxo. El quociente se escrivirà por raiz encima de la linea sobre su miembro.

672 Quarto: Abaxese el miembro siguiente, escriviendole al lado del segundo residuo, se tendrà el tercer residuo total. Doblese la raíz hasta entonces hallada, y añadiendole en zero se harà lo mismo que antes; y assi prosiguiendo, hasta que estè acabada la operacion. Si despues de abaxado el miembro siguiente no se pudiere partir el miembro total, por ser menor que el divisor, se pondrà zero por raiz, y se abaxarà el miembro siguiente para hacer otro total, el qual se partirà por el divisor.

673 Quinto: Si al fin de la operacion sobràre algo, el numero de quien se saca raiz no tendrà raiz verdadera; y assi, escrivase el residuo por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el duplo de la raiz, y mas la unidad, como se dixo arriba (667). Esto es dificultoso, practiquemoslo.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz quadrada deste numero 1254. Dividase en miembros, como se vè en el exemplo. Saquese la raìz quadrada del primer miembro 12. de mano izquierda; buscando el quadrado mayor que se contiene en èl, ó de memoria, ò por la tabla sobre escrita (666), el qual es 9. que se ha de escrivir debaxo del 12. y encima la raìz 3. Restese el 9. del 12. y quedarà el primer residuo 3. á cuyo lado se escrivirà el miembro siguiente 54. y serà miembro total 354.

$$\begin{array}{l} 3\ \ 5\ \ \tfrac{29}{71} \\ \hline 12,54 \\ 9 \\ \hline 354 \\ 325 \\ \hline 29 \end{array}$$

Para hallar el segundo guarismo de la raìz, doblese la raiz 3. hasta aora hallada, y seràn 6. añadase un zero, y serà 60. el divisor. Dividase el miembro, residuo total 354. por 60. y saldrà el quociente 5, el qual se ha de examinar si es verdadero; porque no basta la division simple, sino que se ha de atender à lo siguiente. Multipliquese el quociente 5. por el divisor 60. y seràn 300. Añadase el quadrado de 5. que es 25. y la suma restese de los 354. y porque se puede restar, y el residuo 29. no es mayor que el duplo de la raíz 35. serà el 5. el verdadero quociente, el qual se escrivirà sobre la linea, y miembro segundo. De lo que sobra se harà un quebrado, poniendolo por numerador, cuyo denominador serà el duplo de la raìz con la unidad; esto, es 71.

Exemplo II.

Se ha de sacar raìz quadrada deste numero 67081. Dividido de dos en dos guarismos, saquese la raìz del primer miembro 6. la qual

es

es 2. que ſe eſcrivirà ſobre la linea, y ſu quadrado es 4. el qual ſe reſtará del 6. y quedarán 2. à cuyo lado ſe pondrà el miembro ſiguiente 70. y ſerà el miembro total 270.

Para hallar el ſegundo guariſmo dobleſe la raìz hallada 2. y añadiendo un zero ſerán 40. Dividanſe los 270. por 40. y aunque ſiguiendo las reglas de la diviſion ſe podria dar 6. al quociente; pero ſi ſe atiende à que ſe ha de multiplicar por el 40. y añadir ſu quadrado, no podrá ſer 6. ſino 5. el qual ſe eſcrivirà ſobre la linea enfrente del miembro ſegundo. Multipliqueſe el 5. por 40. y al producto 200. añadaſe el quadrado 25. del quociente, cuya ſuma 225. ſe reſtará del miembro 270. y quedará el reſiduo 45. menor que el duplo de la raìz 25. hallada haſta aora.

2 5 9

6,70,81
4
270
225
4581
4581
0000

Para el tercer guariſmo, abaxado el ſiguiente miembro 81. dobleſe la raìz 25. añadiendo un zero, y ſerán 500. Dividanſe los 4581. por 500. y ſale el quociente 9. que ſe eſcrivirá ſobre la linea. Multipliqueſe el 9. por los 500. y al producto 4500. añadaſe el quadrado 81. del miſmo 9. y reſtando la ſuma 4581. del miembro 4581. no queda reſiduo alguno. Con que la raìz verdadera ſerá 259. y el numero propueſto es quadrado racional; porque nada ſobra.

Exemplo III.

Para ſacar raìz quadrada deſte numero 65768462. dividaſe de dos en dos guariſmos, y porque tiene quatro miembros, tambien ſu raìz ha de tener otros tantos guariſmos. Saqueſe la raìz del 65. buſcando en la tablà el mayor quadrado que ſe contiene en el 65. el qual es 64. cuya raìz es 8. Eſcrivaſe el 8. ſobre la linea, y el 64. debaxo del 65. Reſteſe, y quedará el reſiduo 1. à cuyo lado ſe eſcrivirá el ſegundo miembro 76. para hacer el miembro total 176.

Para hallar el ſegundo guariſmo de la raìz, dobleſe la raìz 8. y al duplo 16. añadaſe un zero, para formar el diviſor 160. Dividaſe el miembro 176. por 160. y ſale 1. por quociente. Multipliqueſe el diviſor 160. por 1. y al producto añadaſe el quadrado de 1. que es tambien 1. con que ſerá 161. Reſteſe del miembro 176. y quedarà el ſegundo reſiduo 15. à cuyo lado ſe eſcrivirà el otro miembro 84. y aßi ſerà el miembro total 1584.

8 1 0 9

65,76,84,62
64
176
161
158462
145881
12581

Para hallar el tercer guarismo de la raíz, doblese la raiz 81. hasta aqui hallada, y al duplo 162. añadiendo un zero serà 1820. Dividase el miembro 1584. por 1620. y porque no se puede, por ser menor el dividendo que el divisor, es señal que el quociente, ò tercer guarismo es zero, el qual se escrivirá sobre la linea, y abaxando el siguiente miembro 62. serà el total residuo 158462.

Para hallar el guarismo quarto, doblese la raiz 810. hallada hasta aqui, y al duplo 1620. añadiendo un zero serà 16200. el divisor. Dividase el miembro 158462. por 16200. y saldrá el quociente 9. Multipliquese por el divisor 16200. y al producto añadase el quadrado 81. del quociente 9. y serán 16281. Restense del miembro, y quedará el residuo ultimo 12481. el qual se escrivirà por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el duplo de toda la raiz, y mas la unidad.

Demonstracion.

En este tercer exemplo està comprehendida qualquier dificultad que puede ocurrir en la extraccion de raíz quadrada; y assi, usarè dèl en esta demonstracion, la qual para mayor claridad divido en partes.

Que el numero de quien se ha de sacar raiz se aya de dividir de dos en dos guarismos, y que la raiz conste de tantos guarismos, quantos fueren los miembros, consta por el Theorema 2. deste capitulo. Pero que la raiz estè bien sacada, siguiendo la regla sobredicha, es el principal assunto desta demonstracion, la qual se funda en la prop. 4 del 2. de Euclides, que hemos demonstrado en numeros en el Theorema 3. deste capitulo.

Considerèmos al primer miembro solo 65. el qual atendiendo al lugar de los guarismos es 65000000. cuya raiz quadrada es 8000. y su quadrado es 64000000. el qual restado quedarà el primer residuo 1000000. Y pues los zeros solo sirven de llenar lugar, la raiz de 65. es 8. y el residuo es 1. al qual añadiendo el segundo miembro 76. serà 176. ò segun el lugar, 1760000.

En este residuo se incluyen dos rectangulos, cuyos lados son el guarismo hallado 8. de la raiz, y el que se busca; mas un quadrado del mismo guarismo que busca; porque si consideramos los dos ultimos guarismos de la raiz, que son 8. y 1. el quadrado de 81. que es el mayor que se contiene en los dos miembros 6576. es à saber 6561. es igual à los quadrados 64. y 1. de las partes 8. y 1. mas à dos rectangulos 8. y 8. de las partes, puestos en su debido lugar, como se dixo arriba (663), y aviendo sacado del numero 6576. el un quadrado 64. quedará el residuo 176. à los dos rectangulos, y mas un qua-

quadrado de la otra parte. Pues doblando la raiz hallada 8. se hace el lado de los dos rectangulos, y el añadir zero es para guardar el orden de los lugares de los guarismos; porque, como está dicho (663), los numeros de los dos rectangulos se ponen en segundo lugar, y por esso se añade el zero para llenar el lugar. Partiendo, pues, el residuo 176. por el lado de los dos rectangulos, que es la raiz duplicada, de suerte, que multiplicando el quociente por el divisor (que es hacer los dos rectangulos), y añadiendo el quadrado del mismo quociente (que es lo que falta para el quadrado total 6561.) pueda restarse del miembro 176. sin sobrar residuo mayor que el duplo de la raiz, saldrà el guarismo del miembro segundo.

Por la misma razon, para hallar el otro guarismo correspondiente al tercero miembro, se dobla la raiz hasta entonces hallada, añadiendo zero, y se parte, &c. porque la parte de la raiz 810. se considera dividida en dos partes 81. y 0. El quadrado de 81. que es 6561. ya se ha restado de los primeros miembros, quedando el residuo 15. y abaxando el tercer miembro 84. es 1584. en el qual se contiene assimismo dos rectangulos de las partes 81. y 0. de la raiz, y mas un quadrado del 0. y por esso se dobla la raiz, se parte, &c. Del mismo modo se demonstrarà lo restante de la raiz. El ultimo quebrado queda ya demonstrado en la proposicion antecedente.

Examen.

674 El examen es el mismo que el del Problema antecedente. Multipliquese la raiz hallada por sì misma, y si ay algun residuo añadase al producto, y todo ha de ser igual al numero de quien se sacò raiz quadrada; como en el exemplo 3. multiplicando la raiz 8109. por sì misma, sale el quadrado 65755881. añadase el residuo 12581. y saldrà el numero 65768462. de quien se sacò la raiz. Pero se ha de advertir, que el residuo no ha de ser mayor que la raiz doblada; porque puede suceder, que se aya tomado una raiz menor, y haciendo el examen venga bien; pero entonces el residuo es mayor que la raiz doblada. Como si se huviera errado la raiz, tomando 8108. haciendo la multiplicacion de la raiz por sí misma, y añadiendo el residuo 28698. saldrà el mismo numero de quien se sacò raiz; pero el residuo es mayor que la raiz doblada, y por esso la raiz 8108. no es la verdadera, aunque venga bien à la multiplicacion.

PROBLEMA III.

HALLAR LA RAIZ QUADRADA DE ENTERO, y quebrado, ò de quebrado solo.

Preceptos.

675 PRimero: Si se ha de sacar raìz de entero, y quebrado, reduzgase el entero al quebrado, (162) y serà lo mismo que si fuera quebrado solo, para sacar su raìz.

676 Segundo: Saquese la raíz quadrada del numerador, y denominador, haciendo quebrado, el qual serà la raìz quadrada que se busca.

677 Tercero: Si los terminos del quebrado no tuvieren raìz, examinese si el mismo quebrado en otros terminos puede tener raìz justa, multiplicando los terminos entre sì, y sacando raìz quadrada del producto, la qual si es justa sin sobrar algo, es señal que el quebrado se puede reducir à otros terminos quadrados. Lo mismo se sabrà partiendo el numerador por el denominador, y viendo si del quociente se puede sacar raìz quadrada justa. Reduzgase el quebrado à los minimos terminos (150), y estos serán quadrados.

678 Quarto: Si el quebrado no tuviera raíz justa, ni se pudiere reducir à terminos quadrados, se sacarà la raíz de cada termino con su quebrado, y reducidos los enteros de la raíz al quebrado del residuo, se reducirán à un comun denominador (154), y de los numeradores se formará un quebrado, que será la raíz proxima. Dificultosos son estos preceptos, y assi es precisso que los declarêmos con los exemplos.

Exemplo I.

Se ha de sacar raíz deste quebrado 36. 49. avos. Saquese la raìz quadrada de cada termino, haciendo quebrado, que será seis septimos, el qual es la raíz deseada. Assi mismo, si se ha de sacar raíz de este otro quebrado 4. 100. avos, sacando raíz de cada termino será dos decimos.

Exemplo II.

Si se ha de sacar raíz quadrada de 5. y 1. 16. avos, reducidos los enteros al quebrado serán 81. 16. avos. Saquese la raíz quadrada de cada termino, y será nueve quartos, ò 2. y un quarto. Assi mismo, para sacar raíz quadrada de 72. y un quarto, reduzganse los enteros al quebrado, y serán 289. quartos. Saquese la raíz quadrada de cada termino, que será el quebrado 17. medios; esto es, 8. y un quarto.

Exem-

Exemplo III.

Para sacar la raíz quadrada de este quebrado 2. 18. avos, se examinarà primero si se puede reducir á terminos quadrados, porque del modo que està expressado no tiene los terminos quadrados. Multipliquese el numerador 2. por el denominador 18. y porque el producto 36. tiene raìz quadrada justa, es señal que el dicho quebrado se puede reducir à terminos quadrados. Reduzgase, pues, à los minimos (150), y será un noveno en terminos quadrados. Aora saquese la raiz quadrada del numerador, y denominador, que es un tercio.

Exemplo IV.

Se ha de sacar raìz quadrada de 6. y dos octavos. Reduzganse los enteros al quebrado (162), y serà 50. octavos, el qual no consta de terminos quadrados; pues examinese multiplicando el numerador 50. por el denominador 8. y pues el producto 400. tiene raíz quadrada justa, es señal que el dicho quebrado se puede reducir à terminos quadrados, la qual reduccion se harà, reduciendole à los minimos terminos (150), y serà 25. quartos. Aora, pues, ya tiene los terminos quadrados. Saquese la raìz quadrada de cada termino, y serà cinco medios, ò dos y medio.

Exemplo V.

Se ha de sacar raìz quadrada deste quebrado seis novenos. Porque no consta de ambos terminos quadrados, examinese si los puede tener, multiplicando 6. por 9. y pues el producto 54. no tiene raìz quadrada justa, es señal que el dicho quebrado no puede reducirse à terminos, que los dos sean quadrados; y assi no tendrá raìz verdadera. Pues para hallar una raìz proxima, saquese las raìces de cada termino, por los Problemas antecedentes, y serán 2. y dos quintos la del numerador, y 3. la del denominador. Reduzganse las dos raìces à quebrados, los quales seràn $\frac{12}{5}$, y $\frac{3}{1}$. Estos quebrados se reduciràn à un comun denominador (154) $\frac{21}{5}$, y $\frac{15}{5}$, de cuyos numeradores 12. y 15. se ha de hacer quebrado en esta forma: El numerador del quebrado, que es raìz del numerador 6. serà numerador; y el numerador del quebrado, que es raìz del denominador 9. ha de ser denominador assi $\frac{12}{15}$, y esta es la raìz algo proxima.

Exemplo VI.

Para sacar raìz quadrada deste numero 6. y cinco septimos, se reduciràn primero los enteros á su quebrado, y serà él quebrado $\frac{47}{7}$; y pues no consta de terminos quadrados, ni los puede tener, porque el producto 329. de los terminos 47. y 7. no tiene raìz quadrada justa, saquese la raìz proxima del numerador 47. que serà 6. y 11. 13. avos,

Saquese assi mismo la raìz proxima del denominador, y serà 2. y tres quintos. Reduzganse los enteros de estas raìces à sus quebrados (162), y seràn 89. 13. avos, y 13. quintos. Aora reducidos à un comun denominador seràn 445. 65. avos 269. 65. avos. Formese quebrado de los numeradores en la forma sobredicha en el exemplo antecedente, que serà la raìz algo proxima 445. 169. avos.

Demonstracion.

Que el numero entero se aya de reducir á su quebrado quando se ha de sacar raíz de entero y quebrado, es manifiesto; porque si no se reduxera avrian de sacar dos raìces, la una del entero, y la otra del quebrado.

Que la raíz quadrada de un quebrado que consta de numeros quadrados sea quebrado, consta claramente; porque como el quebrado necessariamente se ha de expressar con dos numeros, es preciso que con otros tantos se declare la raìz. A mas, que la raìz multiplicandose à sì misma produce al quadrado: Luego si el quadrado consta de dos terminos (pues es quebrado) es precisso que prevengan de la multiplicacion de otros dos terminos, cada uno por sí mismo: Luego la raìz quadrada de un quebrado, tambien es quebrado.

Que sacando raíz de cada termino de un quebrado de terminos quadrados sea la verdadera raìz, consta por lo que acabamos de decir; porque multiplicando cada termino de la raíz per sì mismo, se produce el quebrado quadrado. Tambien porque en el quebrado, un quadrado, que es el numerador, dice respeto, ó relacion á otro quadrado, que es denominador: Luego la raìz del numerador tambien ha de decir respeto à la raìz del denominador.

Que un quebrado quadrado se pueda expressar con terminos no quadrados, es manifiesto; porque qualquier quebrado se puede declarar por otros terminos, multiplicandole por qualquier numero: Luego si consta de terminos quadrados, y se multiplica por un numero no quadrado, saldrá un quebrado igual, pero no tendrà los terminos quadrados.

Que el examen para conocer si se puede reducir à terminos quadrados sea legitimo, lo demuestro asi: En el exemplo 3. multiplicando el 2. al 18. produce al quadrado 36. cuya raìz 6. multiplicandose à sì misma produce tambien al 36. seràn continuamente proporcionales 2. 6. 18. porque el producto de los extremos es igual al quebrado del medio (300): Luego los numeros 2. y 18. son planos semejantes, pues que entre ellos ay un medio proporcional. Y como los planos semejantes tienen entre sí la razon de un quadrado á otro, avrà dos quadrados en la misma razon de 2. á 18. y asi, el dicho quebrado se podrà reducir à otro quebrado igual, que conste de terminos quadrados, los quales son los minimos terminos.

Que

Que dividiendo el numerador por el denominador, y sacando raìz quadrada justa del quociente, sea señal de que los terminos son quadrados, es manifiesto, si consideramos al quebrado como razon, porque el dicho quociente serà el denominador de la razon, y como este sea semejante, y declare la dicha razon, si tiene raìz quadrada, tambien la podrà tener la razon, ò quebrado.

Ultimamente, que el modo de saca raìz algo proxima de un quebrado que no tiene terminos quadrados, como en el exemplo 6. sea proximo, lo pruevo assi: Las raíces del numerador, y denominador, reducidas à sus quebrados son 89. 13. avos, y 13. quintos, las quales reducidas à un comun denominador tienen entre sì la razon de los numeradores (140): Luego haciendo quebrado de los numeradores en la forma referida, saldrá un quebrado igual á los quebrados sobre escritos; esto es, el numerador de este quebrado ultimo tendrà la misma razon à su denominador, que el quebrado 89. 13. avos á 13. quintos; y como estos expressan la raìz, tambien la declararà aquel, pero no la verdadera, porque el quebrado de quien se sacò raìz era irracional.

El examen es el mismo que en los Problemas antecedentes, y assi por no alargarme en cosas superfluas no lo repito.

CAPITULO TERCERO.

DEL NUMERO CUBICO, Y SU RAIZ.

NUmero cubico es el que proviene de la multiplicacion de un quadrado por su raìz; como si el quadrado 9. se multiplica por su raìz 3. sale el cubo 27. ò es el producto de un numero puesto tres veces; como si el 4. se escrive tres veces assi 4. 4. 4. y continuamente se multiplica, nace el cubo 64. Raìz cubica es aquel numero que se multiplica para producir al cubo. Aora pondremos brevemente algunos. Theoremas, correspondientes á los del capitulo antecedente.

THEOREMA I.

LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO, QUE TIENE UNO, dos, ò tres guarismos; es solo un guarismo; la de un numero de quatro, cinco, ò seis guarismos, tiene dos guarismos; la de siete, ocho, ò nueve guarismos, consta de tres guarismos, &c.

679 ES lo mismo que decir, que qualquier numero cubico que està entre 1. y 1000. tiene un guarismo por raìz. El cubo

que està entre 1000. y 1000000. tiene su raíz dos guarismos. El que està entre 1000000. y 1000000000. consta su raìz de tres guarismos, y assi de los demàs.

Porque el 10. es la raíz menor de las que tienen dos guarismos, y su cubo es 1000. Luego si ay algun cubo menor que 1000. tendrá por raìz un numero menor que 10. que en enteros no puede ser menor que tener un guarismo solo. Assi mismo, el 100. es la raìz menor de las que tienen tres guarisinos, cuyo cubo es 1000000. Luego si ay un cubo menor hasta 100. inclusive, su raíz tambien serà menor, y por consiguiente tendrà un guarismo menos, que son dos solos, &c.

Consectario.

680 De aqui consta, que si un qualquier numero se divide de tres en tres guarismos; comenzando de mano derecha àcia la izquierda, en cada miembro estarà escondido un cubo; y assi, su raíz tendrá tantos guarismos, quantos fueren los miembros.

THEOREMA II.

SI UN NUMERO SE DIVIDE EN DOS PARTES, EL CUBO del todo es igual à los cubos de las partes, y à tres productos de la multiplicacion de la primer parte, por el quadrado de la segunda; mas à otros tres productos del quadrado de la primer parte, por la segunda.

Exposicion.

681 SEa el numero 24. dividiendo en 20. y en 4. Digo, que el cubo 13824. de todo el numero 24. es igual à los cubos 8000. y 64. de las partes 20. y 4. al producto 320. tresdoblado de la primera parte 20. por el quadrado 16. de la segunda, juntamente con el producto 1600. tresdoblado del quadrado 400. de la primera parte, por la segunda. Assi mismo, si el numero 426. se divide en dos partes 400. y 26. el cubo 77308776. de todo el numero, es igual á los cubos 64000000. y 17576. de las partes, y à tres productos 270400. de la multiplicacion de la primera parte 400. por el quadrado 676. de la segunda 26. juntamente con otros tres productos 4160000. de la multiplicacion del quadrado 260000. de la primera parte 400. por la segunda 26.

8000	64000000
64	17576
320	270400
320	270400
320	270400
1600	4160000
1600	4160000
1600	4160000
13824	77308776

De-

Demonstracion.

En este Theorema està fundada la regla de sacar raíz cubica, el qual demuestran algunos por Geometría, y otros por arte mayor, valiendose de los *Binomios*. Pero la demonstrarè por el mismo multiplicar, atendiendo tambien al Theorema 3. del cap. 2. deste libro. Y para que la demonstracion no sea puramente abstracta, me valdrè del primer exemplo.

Multiplicando la raìz à su quadrado se engendra el cubo, como se dixo arriba. Pues multipliquese el 24. por si mismo, para hacer su quadrado en la forma que se dixo en el dicho Theorema 3. y saldràn los quadrados 16. y 400. de las partes, y dos rectangulos 80. y 80. de las mismas. Aora todo esto se ha de multiplicar por el mismo 24. para hacer el cubo. Multiplicando, pues, el 4. del 24. por el quadrado 16. nace el cubo 64. de la una parte 4. Multiplicando el mismo 4. al rectangulo 80. sale el sólido (que se llama Paralelepipedo) 320. que provino de la multiplicacion de 4. por 20. y de su prodigio 80. otra vez por el 4. esto es, provino de la multiplicacion continua destos tres numeros 20. 4. 4. y como multiplicando 4. por 4. sale quadrado, y este se ha de multiplicar por 20. que es la otra parte de la raìz 24. es manifiesto, que multiplicando lá primera parte 20. del 24. por el quadrado de la segunda 4. sale el sólido 320. Assi mismo multiplicando el 4. del 24. al otro rectangulo 80. sale el mismo sólido 320. el qual por la misma razon es tambien el producto de la primer parte 20. por el quadrado de la segunda 4. Con que yà tenemos dos productos de la primera parte, por el quadrado de la segunda.

24
24
16
80
80
400
24
64
320
320
1600.
320
1600
1600
8000
13824

Multipliquese ultimamente el mismo 4. del 24. por el quadrado 400. y saldrá el sólido, ò Paralelepipedo 1600. el qual es el producto de la segunda parte 4. por el quadrado de la primera 20. Con que ya tenemos un producto del quadrado 400. de la primera parte 20. por la segunda 4. y con esto estàn multiplicados los numeros que componen al quadrado del 24. por la segunda parte 4. Passemos aora à multiplicar los mismos por la primer parte 20. del mismo 24.

Mul-

Multiplicando, pues, el 20. ò el 2. en segundo lugar al quadrado 16. produce al sólido 230. el qual es el producto de la primer parte 20. por el quadrado de la segunda 4. y assi yá tenemos tres productos de estos. Multiplicando aora el 20. por el rectangulo 80. sale el sólido 1600. el qual es el producto del quadrado de la primer parte 20. por la segunda 4. porque proviene de la multiplicacion continua destos tres numeros 4. 20. 20. y assi es lo mismo que multiplicar 20. por 20, y el quadrado 400. (que es de la primer parte) multiplicar por la segunda 4. Con que yà tenemos dos productos destos; y si el mismo 20. se multiplica otra vez por el otro 80. saldrá el mimo sólido, y tendrèmos tres productos destos. Ultimamente, multiplicando el 20. por su quadrado 400. sale el cubo 8000. y sumandolo todo sale el cubo total 13824. del numero 24.

Aora solo falta probar, que multiplicando deste modo no se muda el producto total. La razon es, porque quadrando el 24. en la forma sobredicha, salen los dos quadrados, y rectangulos (guardando el orden numerico de los lugares de los guarismos, pues por esso se ponen los zeros) los quales son partes del quadrado total; y multiplicando los dichos quadrados, y rectangulos por el 24. es lo mismo que multiplicar el quadrado total, que es hacer cubo; porque como consta por el mismo multiplicar, un numero no se multiplica todo junto, sino por partes, guardando las decenas para sumarlas con el producto siguiente, las quales aqui no se guardan, sino que se escriven en su lugar competente: Luego lo mismo es multiplicar deste modo, por partes, que por el modo ordinario.

Consectarios.

682 De lo dicho se infiere, que si cada parte del numero 24. se toma sencillamente, no atendiendo al lugar; esto es, no se divide en 20. y 4. sino en 2. y 4. saldrá lo mismo, mientras que los productos, ò sólidos se pongan una, ò dos casas mas adelante, dexando los lugares vacios donde ay zeros, porque estos solo sirven de llenar lugar.

683 Si à un numero cubico, como al 8. se añade el triplo 6. de su raiz 2. mas el triplo 12. del quadrado 4. de la misma raiz, y mas la unidad, sale el cubo immediate mayor en numeros enteros; esto es, que la raiz sea una unidad mayor. Porque si à la raiz 2. del cubo 8. se añade una unidad, serà 3. y si el 3. se divide en dos partes 2. y 1. el cubo de toda la raiz 3. indivisa serà igual al cubo de la primer parte 2. que es 8. mas á tres sólidos dos del quadrado de la primer parte por la

8
6
12
1
27

se-

segunda (la qual por ser la unidad, no aumenta la multiplicacion, asi basta añadir los tres quadrados de la raiz 2.) mas à otros tres sólidos del quadrado de la segueda parte por la primera, (el qual quadrado por ser la unidad, no aumenta la multiplicacion, y asi basta añadir el triplo de la primera parte, que es la raiz del cubo 8.) y mas el cubo de la segunda parte 1. que es 1. Luego si à un cubo se añade el triplo del quadrado de su raiz, mas el triplo de la misma raiz, y mas la unidad, saldrà el cubo immediate mayor.

Raìces	Cubos.
1	1
2	8
3	27
4	64
5	125
6	216
7	343
8	512
9	729
10	1000
11	1331
12	1728
13	2207
14	2744
15	3375
16	4096

684 De aqui nace un modo facil para hacer de nuevo, ò continuar la tabla de los numeros cubicos. Sumando el cubo 1. con el triplo del quadrado de su raiz, que es 3. mas con el triplo de la misma raiz, que tambien es 3. y mas con la unidad, sale el cubo 8. de la raiz cubica 2. Sumando el cubo 8. con el triplo 12. del quadrado 4. de su raiz 2. mas con el triplo 6. de la misma raiz, y con la mitad sale el cubo immediate siguiente 27. cuya raiz es 3. y asi de los demàs.

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ CUBICA DE UN NUMERO ENTERO, que tenga menos, que quatro guarismos.

685 SAcar la raiz cubica de un numero, es hallar otro, que multiplicando à su quadrado, produzga al numero de quien se saca raiz. Es mas dificil que la raiz quadrada, y por esso pide mayor atencion.

La raiz cubica de un numero, que conste de menos guarismos, que quatro; esto es, que tenga uno, dos, ò tres, necessariamente ha de tener un guarismo solo (679). Y asi busquese por la tabla antecedente, ò de memoria, el cubo proxime menor, ò igual al numero dado, del qual se restará, y si nada sobra, su raiz serà la verdadera; pero si sobràre algo, pongase por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà la suma del triplo del quadrado de la raiz, del triplo de la misma raiz, y de la unidad; y la raiz con este quebrado, se-

ferà algo proxima, pero menor que la verdadera.

Exemplo I.

Se ha de facar raìz cubica de 64. Bufquefe en la tabla un cubo que fea igual, ò proxime menor, que el 64. y fe hallarà el 64 cuya raìz es 4 reftefe 64. de 64. y pues nada fobra, digo, que la raiz cubica verdadera de 64. es 4.

Exemplo II.

Para hallar la raíz cubica de 138. bufquefe en la tabla el cubo proxime menor, y fe hallarà 125. cuya raìz es 5. reftefe del 138. y quedan 13. que fe han de poner por numerador de un quebrado; aora para hallar el denominador, tripliquefe el quadrado 25. de la raìz 5. y ferà 75. tripliquefe la mifma raìz, y ferà 15. Sumenfe 75. 15. y 1. y la fuma 91. ferà el denominador; con que la raìz algo proxima del 138. es 5. y 13./91 avos.

Demonftracion.

El exemplo primero, por sì mifmo, es manifiefto; folo eftá la dificultad en el quebrado del exemplo fegundo, la qual fe harà llena figuiendo proporcionalmente lo que fe dixo de el quebrado de la raìz quadrada. El cubo 138. eftà entre los cubos 125. y 216. cuyas raíces 5. y 6. folo fe diferencian en la unidad. Luego la diferencia de los cubos (que fegun fe dixo, es el triplo del quadrado de la raiz, mas el triplo de la mifma raìz, y mas la unidad) ha de fer denominador de las partes que fobran; porquè todo lo que el 1 8. excede al 125. es lo que fe acerca al cubo 216. Luego ha de fer numerador, y fu denominador la diferencia 91. de los dos cubos.

Examen.

686 Si la raíz es verdadera; efto es, fi no ay quebrado; multipliquefe por fu quebrado (que es cubicarla), y el producto ha de fer igual al numero de quien fe facò raìz cubica. Y afsi cubicando la raíz 4. en el primer exemplo; falen 64. Pero fi la raìz tiene quebrado, cubiquenfe los enteros de la raìz, y al cubo añadafe el numerador del quebrado, ò el refiduo, que es lo mifmo; la fuma ha de fer igual al numero de quien fe facó raìz. Y afsi en el exemplo fegundo cubicando al 5. falen 125. añadanfe los 13. que fobran, y feràn 138. Pero adviertafe, que el refiduo, ó numerador del quebrado, no ha de fer mayor que la fuma del triplo del quadrado de la raíz, y del triplo de la mifma raíz; porque de otra fuerte fe avria de aumentar la raìz, alomenos una unidad.

PRO-

PROBLEMA II.

SACAR RAIZ CUBICA DE UN NUMERO ENTERO, QUE conste de mas que tres guarismos.

Preceptos.

687 PRimero: Dividase el numero con distinciones de tres en tres guarismos, comenzando de la derecha, ácia la izquierda, y quedarà repartido en miembros; aunque el ultimo tenga uno, ò dos guarismos solos. Y tantos guarismos ha de tener la raiz, quantos fueron los miembros. Tirese una linea por encima del numero, sobre la qual se han de escrivir los guarismos de la raiz, cada uno correspondiente à su miembro.

688 Segundo: Saquese la raìz cubica del primer miembro de mano izquierda, como si fuera solo por el Problema antecedente, y escriviendo sobre la linea, y su cubo debaxo del dicho miembro, restese, escriviendo el residuo debaxo. Advirtiendo, que ningun residuo puede ser mayor que el triplo del quadrado de la raìz, juntamente con el triplo de la misma raiz; porque en tal caso, se avria tomado la raiz menor, que lo justo.

689 Tercero: Para hallar el segundo guarismo, se abaxarà el siguiente miembro, escriviendole al lado del residuo, para hacer el miembro total. Aora tirense à parte seis lineas perpendiculares, de suerte, que distingan cinco espacios, ò colunas: En el primero, se escrivirán estos numeros 3. y 3. uno encima del otro: En el segundo, se pondrà la raìz hallada, con un zero à la derecha, correspondiente al 3. inferior, y encima colateral al otro 3. se escrivirà el quadrado de la raíz con el zero. Multipliquese cada 3. por el numero que tiene al lado, y los productos, se escrivirán en el tercer espacio, y su suma, serà el divisor. Dividase el miembro total por este divisor, pero no dando al quociente todo lo que cabe, sino atendiendo, à que la suma de los productos de los numeros del tercer, y quarto espacio, y mas el cubo del quociente, se pueda restar del miembro total, como aora dirèmos, y el quociente escrivase en el espacio quarto, al lado del numero superior del espacio tercero; debaxo pongase su quadrado, y mas abaxo su cubo. Multipliquense los numeros del tercero, y quarto espacio, excepto los dos inferiores, escriviendo los productos en el quinto, cuya suma se restarà del miembro total, y el residuo, se escrivirà debaxo.

690 Quarto: Abaxeſe el tercer miembro, poniendole al lado del reſiduo, y hagaſe la miſma operacion, y deſte modo continuando haſta el fin. Si ſobra algo, ſe pondrà por numerador de un quebrado, cuyo denominador, es el triplo del quadrado de la raìz, mas el triplo de la miſma raìz, y mas la unidad como queda dicho en el Ploblema antecedente.

691 Quinto: Si el miembro que ſe divide, fuere menor que el diviſor, ponga zero por guariſmo de la raìz, y abaxando el miembro ſiguiente, proſigaſe la operacion como eſtà dicho. Practiquemos eſtos preceptos.

Exemplo I.

Se ha de ſacar la raìz cubica deſte numero 21952. Dividaſe en miembros, comenzando de las unidades, ò de la derecha àcia la izquierda, y tirada la linea por encima, buſqueſe por la tabla antecedente (684) el mayor cubo que puede caber en 21. que es el primer miembro, el qual es 8. y ſu raìz 2. que ſe eſcrivirà ſobre la linea. Reſteſe el 8. del 21. y quedarà el reſiduo 13. à cuyo lado ſe eſcrivirà el ſiguiente miembro para hacer el total 13952.

2 8
21,952
8
13,952
13,952
00000

Aora para hallar el otro guariſmo de la raìz, ſe formaràn las cinco colunas ſiguientes: En la primera, ſe eſcrivirà dos veces el 3. En la ſegunda, pongaſe la raìz 2. hallada haſta aora con un zero, aſsi 20. enfrente del 3. inferior, y ſobre la raìz 20. eſtarà ſu quadrado 400. Multipliqueſe cada 3. de la primera coluna por ſu numero colateral, que es triplicar el quadrado de la raìz, y de la miſma raìz, eſcriviendo los productos, ò triplos en la tercera coluna, cuya ſuma 1260. es el diviſor. Dividaſe, pues, el miembro total 13952. por dicho diviſor, y aunque ſiguiendo las reglas del partir, el quociente avia de ſer 11. pero porque un miembro no puede tener dos guariſmos de raìz, y tambien porque ſe ha de atender à la multiplicacion ſiguiente, no podrà ſer el dicho quociente, ſino 8. que ſe pondrà en la quarta coluna al lado del guariſmo ſuperior de la coluna tercera.

3	400	1200	8	9600
3	20	60	64	3840
			512	512
		1260		
				13952

Hecho eſto, quadreſe el 8. y ſu quadrado 64. eſcrivaſe debaxo

subiquese, y su cubo 512. escrivase mas abaxo. Aora multipliquese el 8. y su quadrado 64. por los numeros colaterales de la tercera coluna, sin multiplicar el cubo 512. y los productos escrivanse en la coluna quinta debaxo los quales se pondrà el cubo 512. cuya suma 13952. restese del residuo total, y pues nada sobra, serà la raiz cubica verdadera 28.

Pero adviertase, que antes de escrivir sobre la linea el guarismo mismo correspondiente al segundo miembro, ò à otros fuera del primero, serà conveniente concluìr toda la operacion, hasta vèr si la suma de los numeros de la coluna quinta, se pueden restar del miembro total; porque para hallar el quociente, no ay regla, sino tentando como el partir, y aun con mucha mas dificultad; pero ay estos dos señales: El primero, que si la dicha suma no se puede restar del miembro, es señal que el quociente se ha tomado mayor, y assi se avrà de repetir la operacion en los numeros de la quarta, y quinta coluna, tomando al quociente menor: El segundo, que si el residuo antes de abaxar el miembro siguiente, fuere mayor que la suma de los numeros de la coluna tercera; esto es, que es el divisor, se avrà tomado menor, y assi se ha de bolver à hacer la operacion, aumentando dicho quociente.

Exemplo II.

Se ha de sacar raiz cubica deste numero 68430125. dividase en miembros de tres en tres guarismos, y porque los miembros son tres, avrà otros tantos guarismos en la raiz. Saquese la raiz cubica del miembro 68. buscando en la tabla el mayor cubo que puede caber en èl, y se hallarà el 64. cuya raiz cubica es 4. que se ha de escrivir sobre la linea enfrente del miembro, y debaxo se pondrà el 64. restese el 64. del 68. y quedarà el residuo 4. à cuyo lado se pondrà el otro miembro 430. para hacer el miembro total 4430.

Formense las cinco colunas como antes, escriviendo en la primera dos veces al 3. y en la parte inferior de la segunda, pongase la raiz 4. hallada hasta aora con un zero, y encima su quadrado 1600. al lado del 3. superior. Multipliquense los numeros de la primera coluna por los de la segunda, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma 4920. serà el

```
 4  0  9     12196
             503071.
-----------
68,430,125
64
----
 4430125
 4417929
-----------
   12196
```

di-

diviſor. Dividaſe, pues, el miembro 4430. por 4920. y pues no ſe puede por ſer mayor el diviſor, es ſeñal que el guariſmo radical es zero, el qual ſe eſcrivirà ſobre la linea.

3	1600	4800	0
3	40	120	00
			000
		4920	

Aora para hallar el guariſmo correſpondiente al otro miembro, abaxeſe el dicho miembro, eſcriviendole al lado del miembro antecedente, y ſerà el total miembro 4430125. y formenſe otras cinco colunas: En la primera ſe pondrà dos veces el 3. En la parte inferior de la ſegunda, ſe eſcrivirà la raìz 40. hallada haſta aqui con un zero, y encima ſu quadrado; multipliquenſe los numeros de la primera, y ſegunda coluna, eſcriviendo los productos en la tercera, cuya ſuma 481200. ſerà el diviſor. Dividaſe el miembro 4430125. por eſte diviſor, dando al quociente 9. tan ſolamente, aunque ſe le podia dar mas atendiendo à las reglas del partir, pero no ſi ſe conſidera lo ſiguiente. Pongaſe el quociente 9. en la coluna quarta, debaxo ſu quadrado 81. y mas abaxo ſu cubo 729. Multipliquenſe la raìz 9. y ſu quadrado 81. por los numeros colaterales de la tercera coluna, eſcriviendo los productos en la quinta, à los quales ſe añadirà el cubo 729. Y ſumando las tres partidas, ſaldrà el numero 4417929. el qual ſe eſcrivirà debaxo del dicho miembro, y hecha la reſta, quedarà el reſiduo 12196.

3	160000	480000	9	4320000
3	400	1200	81	97200
			729	729
		481200		4417929

El reſiduo 12196. ſe pondrà por numerador de un quebrado, cuyo denominador ſerà la ſuma del triplo del quadrado de toda la raìz 409. mas del triplo de la miſma raìz, mas una unidad; como ſe vè figurado.

Exemplo III.

Para ſacar la raìz cubica deſte numero 942056624690. ſe dividirà en miembros como lo enſeña la formula; y buſcando en la tabla (684) el mayor cubo que puede caber en el miembro 942. ſe hallarà 729. cuya raìz es 9. que ſe ha de eſcrivir ſobre la linea correſ-

reſpondiente al dicho miembro, y debaxo pongaſe el dicho cubo para reſtarle, y quedará el reſiduo 213. á quien ſe ajuntarà al lado el otro miembro, para hacer el total 213056.

9 8 0 5
942,056,624,690
729
213 056
212 192
864 624 690
864 624 627
63

Aora para hallar el otro guariſmo de la raìz, formenſe las cinco colunas, poniendo en la primera dos veces al 3. y en la ſegunda la raíz hallada 9. con un zero, y encima ſu quadrado. Multipliquenſe los numeros de la primer coluna por los de la ſegunda, eſcriviendo ſus productos en la tercera, cuya ſuma 24570. ſerá el diviſor. Dividaſe pues el dicho miembro por eſte diviſor, dando al quociente 8. el qual ſe eſcrivirà en la coluna quarta, y debaxo ſu quadrado 64. y cubo 512. Multipliqueſe eſte quociente, y quadrado por los dos numeros de la coluna tercera, eſcriviendo los productos en la quinta, à los quales ſe añadirà el cubo 512. y la ſuma 212192. ſe reſtarà del miembro, y quedará el reſiduo 864. á cuyo lado ſe abaxará el otro miembro 624. para hacer el total 864624.

3	8100	24300	8	194400
3	90	270	64	17280
			512	512
		24570		212192

Para hallar el otro guariſmo radical, formenſe otra vez las cinco colunas, eſcriviendo en la primera dos veces al 3. En la ſegunda la raíz hallada haſta aqui con un zero, que ſerá 980. y encima pongaſe ſu quadrado 960400. que ſe multiplicarán por los dos numeros 3. eſcriviendo los productos en la tercer coluna, cuya ſuma 2884140. ſerá el diviſor. Partaſe pues el miembro ſobredicho por èl, y pues no ſe puede por ſer el di-

3	960400	2881200	0	
3	980	2940	00	
			000	
		2884140		

viſor mayor, pongaſe zero por guariſmo radical, y abaxaſe el otro miembro 690. para hacer al miembro total 864624690.

Ultimamente, para hallar el otro guariſmo, formenſe otras cinco colunas, eſcriviendo en la primera dos veces al 3. En la ſegunda, la raiz haſta aora hallada con un zero 9800. y encima ſu quadrado 96040000. Multipliquenſe por los numeros de la primera coluna, eſcriviendo los productos en la tercera; cuya ſuma 288149400. es el diviſor: Dividaſe el miembro 864624690. por eſte diviſor, dando 3. al quociente, el qual ſe eſcrivirá en la quarta coluna, poniendo debaxo ſu quadrado, y cubo, como ſe vè en la formula. Multipliquenſe dicho quociente, y quadrado por los dos productos de la tercera coluna, eſcriviendo los productos en la quinta, y mas el cubo 27. La ſuma de las tres partidas deſta quinta coluna, reſteſe del miembro total, y quedarà el reſiduo 63. el qual ſe pondrà por numerador de un quebrado, cuyo denominador es el triplo del quadrado de toda la raiz 9803. mas el triplo de la miſma raiz, mas una unidad, como ſe hizo antes.

3	96040000	288120000	3	864360000
3	9800	29400	9	264600
			27	27
		288149400		864624627

Demonſtracion.

Contiene muchas partes que demonſtrarè de por sì, valiendome del exemplo 2. *Primo*: Que el numero ſe aya de dividir en miembros de tres en tres guariſmos, y que la raiz aya de tener tantos guariſmos, quantos fueren los miembros, conſta por el Theorema 1. deſte capitulo.

Segundo: Que la raiz eſtè bien ſacada, ſiguiendo la regla ſobredicha ſe funda en el Theorema 2. deſte capitulo, deſte modo: Conſideremos al primer miembro ſolo 68. el qual atendiendo al lugar de los guariſmos, es 68000000. pero no es neceſſario poner los zeros, porque tambien ſe quitan de ſu raiz, y aſsi baſta conſiderar al 68. ſolo. El mayor cubo que cabe en 68. es 64. cuya raiz cubica, es 4. y ſobran otros 4. por primer reſiduo, al qual añadiendo el ſegundo miembro 430. ſerà 4430. el miembro total.

En eſte miembro eſtàn incluidos tres ſolidos comprehendidos, ò que provienen de la multiplicacion del quadrado de la raiz hallada 4. y del otro guariſimo que ſe hallarà por raiz; mas otros tres ſolidos, que provienen de la multiplicacion de la raiz hallada por el quadrado del

gua-

guariſmo que ſe buſca; y mas un cubo del miſmo guariſmo que ſe buſca; porque ſi conſideramos los dos guariſmos 4. y 0. de la raìz, correſpondientes à los miembros 68., 430. El cubo 94000. de los dos conſiderados, como un numero 40. el qual cubo es el mayor que ſe contiene en los dos miembros 68.,430. (de la diferencia, ò reſiduo de dicho cubo à los dichos miembros, aora no ſe hace caſo, ſino en la operacion ſiguiente) es igual à los cubos 64000. y 0. de las partes, mas á tres ſólidos de la multiplicacion del quadrado 1600. del guariſmo 4. ò de la primer parte 40. (eſtando divida la raìz en dos partes como ſe dixo en el Theorema 2. deſte capitulo) por la ſegunda parte zero, mas á otros tres ſólidos de la multiplicacion de la primer parte, por el quadrado de la ſegunda, como todo conſta por el Theorema 2. deſte capitulo.

Eſto ſupueſto, queda manifieſta la razon, porque ſe pone dos veces el 3. en la primer coluna de las cinco, y porque ſe eſcrive la raìz, y ſu quadrado en la ſegunda (el zero ſe añade à la raìz, para guardar el lugar numerico de los guariſmos, por que la raìz del primer miembro, pertenece à las decenas) la razon, como digo, es; porque multiplicando la raìz, y ſu quadrado por 3. ſe producen el triplo del quadrado, y el triplo de la raìz, que vienen à ſer los lados, y las baſes de los ſeis ſólidos; eſto es, la raìz triplicada, es el lado de la ſuma de los tres ſólidos producidos de la multiplicacion de la primer parte de la raìz por el quadrado de la ſegunda, y el quadrado triplicado, es la baſe de la ſuma de los otros tres ſólidos producidos de la multiplicacion del quadrado de la primer parte por la ſegunda que ſe buſca; y aſsi, la ſuma de los numeros de la tercer coluna, ſerá la ſuma de las tres baſes, y lados referidos.

Pues como el miembro 4430. es igual à los ſeis ſólidos, y mas al cubo de la ſegunda parte, ò guariſmo que ſe buſca, ſi ſe parte por la ſuma de la tercer coluna, de ſuerte, que la baſe triplicada, ſe multiplique por el guariſmo que ſe buſca, para hacer la ſuma de unos tres ſólidos, y la raìz triplicada, ſe multiplique por el quadrado del miſmo guariſmo, ò parte que ſe buſca; y à mas deſto, ſe añade el cubo del dicho guariſmo que ſe buſca: la ſuma deſtas tres partidas de la quinta coluna, ſe ha de poder reſtar del dicho miembro; pero como la particion no ſe puede hacer, es evidente, que el guariſmo que ſe buſca ha de ſer zero; porque ſiendo la ſuma de la coluna tercera mayor que el miembro ſobredicho, ſerà tambien mucho mayor la ſuma de la coluna quinta, y aſsi no podrà comprehenderſe en dicho miembro, y por conſiguiente avrá de ſer zero el guariſmo que ſe buſca, y el dicho miembro, ſe avrá de tomar por reſiduo, à cuyo lado ſe deve eſcrivir el otro miembro 125. para hacer al total 4430125.

Aora si consideramos à la raìz (que tiene tres guarismos) dividida en dos partes, de las quales la primera consta de dos guarismos 40. hasta aqui hallados, y la segunda, es el guarismo que se busca; serà el cubo de todo igual á los cubos de las partes, y à los seis sólidos mencionados: Luego poniendo la una parte de la raìz 40. con un zero asi, 400. para guardar el orden de los Lugares numericos, y encima su quadrado en la segunda coluna, y multiplicando por los numeros de la primera, que es triplicar, saldrán los triplos de las bases de unos tres *sólidos*, y los triplos de los lados de los otros tres sólidos, cuya suma será el divisor, porque partiendo el sobredicho miembro (que incluye los seis sólidos, y un cubo del guarismo que se busca) por esta suma, saldrà el guarismo que se busca, atendiendo à que se puedan hacer las multiplicaciones de los dos numeros de la tercera coluna, por los dos de la quarta, y añadir al cubo de la raìz, ò quociente que se busca; y asi los tres numeros de la coluna quinta, seràn la suma de los tres sólidos, mas la otra suma de los otros tres sólidos, y el cubo; cuya suma se ha de poder restar del miembro; y lo que quedàre, serà numerador de un quebrado, cuyo denominador ha de ser la suma del triplo del quebrado de toda la raìz, mas el triplo de la misma raìz, mas la unidad, como se dixo en la demonstracion del Problema antecedente.

Este modo de sacar raìz cubica haciendo cinco colunas, es del P. Zaragoza en su Arithmetica universal, el qual es muy facil, y claro, y se puede aplicar à la raìz quadradada, como se verà en el capitulo siguiente.

PROBLEMA III.

SACAR LA RAIZ CUBICA DE ENTERO, Y QUEBRADO, ò de quebrado solo.

Preceptos.

692 PRimero: Si se ha de sacar raìz de numero entero, y quebrado, reduzgase el entero, ó enteros à su quebrado, (162) y con esto se sacará la raìz por los preceptos siguientes, como si fuera quebrado solo.

693 Segundo: Saquese la raìz cubica del numerador, ò denominador por los Problemas antecedentes, haciendo quebrado, y serà la raìz que se busca.

694 Tercero: Si los terminos del quebrado no tuvieren raìz cubica justa, (aunque alguno la tenga) examinese si el mismo

que-

quebrado expressada en otros terminos, puede tener raíz cubica exacta, lo qual se sabrà multiplicando el quadrado del numeradar, por el denominador, y viendo si el producto tiene raìz cubica justa, ó dividiendo el numerador, por el denominador, y examinando si el quociente tiene raìz cubica exacta. Y si la tuviere, reduzgase el quebrado à los minimos terminos, (150) los quales seràn cubicos.

695 Quarto: Si el quebrado no tuviere raìz justa, ni se pudiere reducir à terminos cubicos, saquese la raìz cubica de cada termino con su quebrado, y reduciendo los enteros à sus quebrados, se reduciràn à un comun denominador, (154) se formarà un quebrado de los numeradores, y serà la raìz cubica algo proxima.

Exemplo I.

Se ha de sacar raìz cubica de 8. 27. avos. Saquese su raìz de cada termino, y serà dos tercios. Assi mismo para sacar raíz cubica de 64. 512. avos. Sacando la raíz cubica del 64. y del 512. se hallarà el quebrado quatro octavos por raíz cubica.

Exemplo II.

Para sacar la raìz cubica de 11. y 25. 64. avos, reduzganse los enteros à su quebrado, y seràn 729. 64. avos. Aora saquese la raíz cubica del numerador, y denominador, la qual serà nueve quartos.

Exemplo III.

Para sacar la raíz cubica de 2. 16. avos, por quanto no consta de terminos cubicos, examinarè si se puede reducir à otro quebrado igual, pero que tenga los terminos cubicos, multiplicando el quadrado 4. del numerador 2. por el denominador 16. y sacando raìz cubica del producto 64. y porque la tiene cabal, que es 4. dirè que el dicho quebrado, se puede reducir à terminos cubicos. Lo mismo puedo conocer dividiendo el numerador 2. por el denominador 16. y pues del quociente un octavo, puedo sacar raìz cubica justa, que es un medio, dirè assi mismo, que se puede reducir. Reduzgo, pues, el dicho quebrado á los minimos terminos, y serà un octavo en terminos cubicos, cuya raìz cúbica es un medio.

Exemplo IV.

Se ha de sacar raíz cubica de 20. y 3. 27. avos. Lo primero, se reducirán los enteros al quebrado, y será 543. 27. avos. Lo segundo examinese si se puede reducir á terminos cubicos (es necessario que los dos sean cubicos) multiplicando el quadrado 294849. del numerador 543. por el denominador 27. y pues del producto 7960923. no se puede sacar raìz cubica justa, es señal que no se puede reducir à ter-

terminos cubicos. Y asi se avrà de sacar la raiz algo proxima por el precepto quarto; sacando la raiz del numerador 543. que es 8. y 31. 217. avos. Saquese asi mismo la raiz cubica del denominador 27. la qual es 3. Aora reduzganse los 8. de la raiz à su quebrado, y serán 1767. 27. avos, reduzganse tambien los 3. (que es raiz del denominador) à quebrado asi $\frac{3}{1}$. Ultimamente estos dos quebrados, se han de reducir à un comun denominador, y serán 1767. 27. avos, y 81. 27. avos, hagase quebrado de los numeradores deste modo $\frac{1767}{81}$. y este serà la raiz algo proxima.

Demonstracion.

La demonstracion, es la misma que la que dimos en el Problema 5. del capitulo antecedente, solo con aplicarla à los numeros, y raices cubicas. El examen de un quebrado que no consta de terminos cubicos, para vèr si se puede reducir à otro igual, pero de terminos cubicos, depende de sacar dos medios proporcionales, como lo enseñarèmos en la Parte 2. deste libro, donde demonstrarèmos, que multiplicando el un extremo por el quadrado del otro, y sacando raiz cubica del producto, es el un medio proporcional; y como si entre dos numeros ay dos medios proporcionales, son sólidos semejantes, los quales son proporcionales à algunos cubos. Si entre los terminos de un quebrado pueden caer dos medios, serán sólidos semejantes, y avrà dos cubos en la misma razon, que serán los numeros mínimos en aquella razon, y por consiguiente el quebrado dellos, serà igual al que está propuesto, y constarà de terminos cubicos.

CAPITULO QUARTO.

DE LAS DEMAS POTESTADES, y sus raices.

LAs Potestades, y sus raices del cubo arriba, bastantemente quedan explicadas al principio deste libro. Aora darè un methodo universal para sacar raiz de qualquier potestad, reduciendolo sólamente à la practica sin demonstracion; porque facilmente se puede sacar de lo que està dicho hasta aqui; y no he de cansar al Arithmetico en demonstraciones prolixas de cosa que no pertenece al arte menor, teniendo su lugar en el mayor, que siendo Dios servido espero sacar à luz.

PRO-

PROBLEMA I.

SACAR LA RAIZ DE QUALQUIER POTESTAD.

696 PAra ſacar la raíz de qualquier Poteſtad, es conveniente tener hechas dos tablas, la una de las Poteſtades de los numeros digitos, que ſirve para hallar el guariſmo radical del primer miembro de mano izquierda; y la otra de los numeros propios de cada Poteſtad, que ſe han de poner en la primera coluna de las cinco, como en la extraccion de raìz cubica, para hallar los guariſmos radicales de los demás miembros.

597 La primer tabla contiene las poteſtades, y ſus raìces en numeros digitos, y aunque ſolamente ſe ponen ſeis Poteſtades, pero con facilidad podrà el Arithmetico continuar la tabla en otras muchas, multiplicando las raíces por sí miſmas para los quadrados: Multiplicando las raìces por ſus quadrados, para hallar los cubos: Multiplicando las raíces por ſus cubos, para los quadrado quadrados; y aſsi de las demàs, ſegun ſe advirtió arriba en la formacion de las Poteſtades.

Raíces	Quadrados	Raìces	Quad. Quad.	Raíces	Cubo Cubos.
1	1	1	1	1	1
2	4	2	16	2	64
3	9	3	81	3	729
4	16	4	256	4	4096
5	25	5	625	5	15625
6	36	6	1296	6	46656
7	49	7	2401	7	117649
8	64	8	4096	8	262144
9	81	9	6561	9	531441

Raíces	Cubos	Raíces	Quad. Cubos	Raiz.	Quad. Q. Cub.
1	1	1	1	1	1
2	8	2	32	2	128
3	27	3	243	3	2187
4	64	4	1024	4	16384
5	125	5	3125	5	78125
6	216	6	7776	6	279936
7	343	7	16807	7	823543
8	512	8	32768	8	3097152
9	729	9	59049	9	4782969

698 La ſegunda tabla, que llaman *Triangular*, por eſtàr en forma de triangulo, enſeña los numeros que ſe deven poner en la primera coluna de las cinco, para hallar los guariſmos radicales en la operacion ſegunda, tercera, quarta, &c. Eſto es, para ſacar raiz quadrada, ſe ha de tomar el 2. para cubica 3. y 3. para quadrado quadrado 4. 6. 4. &c. Su fabrica proviene de la multiplicacion del numero 11. dexando los extremos del producto, y tomando los medios; como ſi el dicho 11. ſe multiplica por ſí miſmo, ſaldrà el quadrado 121. Dexenſe, pues, los extremos 1. y 1. y quedarà el 2. por numero perteneciente al quadrado. Multipliqueſe el producto 121. por 11. (que es cubicar el 11.) y ſaldrà el producto 1331. quitando los extremos, quedan los medios 3. y 3. proprios del cubo. Multipliqueſe el 1331. por 11. y del producto 14641. quitando los extremos, quedarán 464. para el quadrado quadrado, y aſsi de los demás.

```
              1   1
              1   1
            ---------
              1   1
          1   1
          -----------
          1.  2.  1.
              1   1
        -------------
          1   2   1
      1   2   1
      ---------------
      1.  3.  3.  1.
              1   1
    -----------------
      1   3   3   1
  1   3   3   1
  -------------------
  1.  4.  6.  4.  1.
              1   1
  -------------------
  1   4   6   4   1
1 4   6   4   1
---------------------
1. 5. 10. 10. 5. 1.
```

Preceptos.

699 Eſto ſupueſto, para hallar la raiz de qualquier poteſtad, dividaſe con diſtinciones de tantos en tantos guariſmos, como fuere el exponente de la poteſtad, ò primer numero de los de la tabla triangular; eſto es, el quadrado de dos en dos; el cubo de tres en tres; el quadrado quadrado de quatro en quatro, &c. comen-

2.	Quadrado.
3. 3.	Cubo.
4. 6. 4.	Quadrado quadrado.
5. 10. 10. 5.	Quadrado cubo.
6. 15. 20. 15. 6.	Cubo cubo.
7. 21. 35. 35. 21. 7.	Quad. quad. cubo.

zan-

quando siempre de la derecha àcia la izquierda, aunque en el ultimo miembro no aya mas que un guarismo.

700 Para hallar la raìz correspondiente al primer miembro de mano izquierda, busquese en la tabla de las potestades (697) la mayor potestad que puede caber en el tal miembro, y escriviendola debaxo del miembro, y encima la raìz, restese para hallar el residuo, à cuyo lado se escrivirá el segundo miembro, para hacer al miembro total.

701 Para hallar la raìz del segundo miembro, se formaràn cinco colunas, como se hizo en la extraccion de la raìz cubica, y serà conveniente tenerlas hechas en una falsa regla, de fuerte que estèn bien anchas, en particular la tercera y quinta, y deste modo no serà necessario formarlas cada vez. En la primer coluna se pondràn los numeros de la tabla triangular, correspondientes à la potestad de quien se saca raìz. En la segunda estarà la raìz hasta entonces hallada con un zero, la qual se escrivirá en la parte inferior; esto es, correspondiendo al numero inferior de la primera coluna, y sobre ella se pondràn sus potestades quadrado, cubo, &c. correspondiendo á los otros numeros de la primera coluna, tantos quantos numeros huviere. Multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, y escrivanse los productos en la coluna tercera, cuya suma es el divisor, y por esto esta coluna se puede llamar de los *Divisores*. En la quarta coluna se pondrá el quociente, que es el guarismo radical que se busca, escriviendole en la parte superior, y debaxo se escrivirán sus potestades colaterales à los numeros de la coluna tercera, hasta aquella de la misma especie de la que se saca raìz. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna, exceptando el divisor y la ultima potestad, y los productos se escriviràn en la quinta coluna, debaxo de los quales estará la ultima potestad de la quarta coluna; cuya suma se restarà del miembro de quien se saca raìz, escriviendo debaxo el residuo, y abaxando el otro miembro, si le ay, para proseguir la operacion del mismo modo.

702 Si la potestad es irracional; esto es, si sobra algun residuo, se pondrà por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà el producto de la raìz; y sus potestades por los numeros de la tabla triangular propios de la tal potestad, y mas una unidad, como por los exemplos quedarà todo manifiesto.

Exemplo I.

Se ha de sacar raìz quadrada deste numero 3864. Dividase en miem-

miembros de dos en dos guarismos, porque el exponente del quadrado es 2. comenzando por la derecha. Busquese el mayor quadrado que puede caber en el primer miembro de mano izquierda 38. y se hallará el 36. cuya raiz es 6. (597). Escrivase la raiz 6. sobre la linea correspondiente al miembro 38. y el quadrado debaxo para hacer la resta, la qual hecha quedan 2. por residuo. Abaxese el segundo miembro 64. y será el miembro total 264.

6 2 $\frac{20}{125}$

38,64
36
2 64
2 44
20

Para hallar el guarismo correspondiente al miembro 264. se formarán las cinco colunas. En la primera se escrivirá el 2. que es el numero correspondiente al quadrado en la tabla triangular. En la segunda estarà la raiz 6. hallada hasta aora con un zero, que son 60. y pues en la primera coluna no ay mas que un numero, no se pondrán las potestades de dicha raiz. Multipliquese el 2. de la primera coluna por el 60. de la segunda; escriviendo el producto 120. en la tercera; y pues en esta coluna solo ay un numero, él mismo será la suma, ó divisor: Y assi, dividase el miembro 264. por 120. dando al quociente 2. el qual se escrivirá en la parte superior de la coluna quarta, y en la inferior su quadrado, que es la potestad de la especie de la que se saca raiz. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna, exceptando el quadrado, y escriviendo el producto en la quinta; al qual se añadirà el quadrado 4. de la coluna quarta, para hacer el restador 244. Restese, pues, del miembro 264. y quedarà el residuo 20.

2	60	120	2	240
			4	4
				244

Este residuo se escrivirà por numerador de un quebrado, que tendrà por numerador al producto del numero 2. de la primera coluna por la raiz quadrada 62. y mas la unidad; que serà 125. como se vè en la formula.

Exemplo II.

Para sacar raiz cubica deste numero 21952100. se dividirà en miembros de tres en tres guarismos, porque el exponente del cubo es 3. Y buscando en la tabla de las potestades el mayor cubo que puede caber en el primer miembro 21. de mano izquierda, se hallarà el 8. y su raiz 2. que se escrivirà sobre la linea, y el 8. debaxo.

Ref-

Restese el 8. del 21. y quedarà el residuo 13. à cuyo lado se abaxará el miembro 952.

Para hallar el otro guarismo radical, formense las cinco colunas, escriviendo en la primera los numeros propios del cubo de la tabla triangular (698), los quales son 3. 3. En la segunda se pondrà la raíz hallada 2. con un zero, correspondiendo al 3. inferior, y encima estarà el quadrado de 20. colateral al 3. superior. Multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma 1260. serà el divisor. Dividase, pues, el dicho miembro por este divisor, dando al quociente no todo lo que se puede, segun el partir ordinario, sino atendiendo à que la suma de los productos de la quarta, y quinta coluna, con el cubo del quociente, se puedan restar del miembro; y assi basta darle á 8. Escrivase, pues, en la parte superior de la quarta coluna, y debaxo su quadrado 64. y cubo 512. Multipliquense los dos primeros numeros de la tercera, y quarta coluna, escriviendo los productos en la quinta, y añadiendo el cubo 512. cuya suma se restará del miembro, y quedarà el residuo zero.

```
2 8 0        100
           236041
-----------------
21,952,100
 8
-----------
13 952
13 952
-----------
     0100
```

Abaxese el otro miembro 100. y para hallar su guarismo radical formense las cinco colunas, escriviendo en la primera los mismos numeros 3. y 3. En la segunda pongase la raíz hasta aora hallada con un zero, y sobre ella su quadrado. Multipliquense los numeros de la primera coluna por los de la segunda, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma es el divisor; dividase el miembro 100. por èl, y pues no se puede, pongase zero por letra radical, y el mismo miembro 100. serà el residuo, èl qual ha de ser numerador de un quebrado, que tenga por denominador à la suma de los productos de toda la raíz 280. por 3. y de su quadrada por 3. y mas la unidad.

```
| 3 | 400 | 1200 |   8 | 9600 |
| 3 |  20 |   60 |  64 | 3840 |
              512 |  512 |
       1260
                  13952
```

Exemplo III.

Para sacar raíz quadrado quadrada deste numero 950007863.

Divi-

Dividase de quatro en quatro guarismos, porque su exponente es 4. Busquese en la tabla de las potestades (697) el mayor quadrado quadrado que puede caber en el primer miembro 9. el qual es 1. y su raiz tambien 1. Escrivase la raiz sobre la linea, y el quadrado quadrado 1. debaxo; restese del 9. y quedaràn 8. Abaxese el otro miembro 5000. à su lado, y serà el miembro total 85000.

1 7 5
9,5000,7863
1
8 5000
7 3521
1 14797863
1 02680625
1211 7238

Para hallar su guarismo radical formense las cinco colunas, escriviendo en la primera los numeros 4. 6. 4. de la tabla triangular, que son propios del quadrado quadrado, y en la parte inferior de la segunda se pondrá la raiz 1. con un zero, y encima sus potestades, hasta que acompañen á los numeros de la primera coluna; esto es, quadrado, y cubo. Multipliquese la coluna primera por la segunda, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma será el divisor. Dividase el miembro 85000. por la suma 4640. dando al quociente 7. y no mas, para que la suma de la quinta coluna se pueda restar del dicho miembro. Escrivase el 7. en la parte superior de la coluna quarta, y debaxo sus potestades hasta el quadrado quadrado, que es la potestad de quien se saca raiz, las quales se hallan facilmente por la tabla de las potestades.

4	1000	4000	7	28000
6	100	600	49	29400
4	10	40	343	13720
			2401	2401
		4640		73521

Multipliquense todos los numeros de la quarta, y tercera coluna, exceptando los inferiores, y los productos se escrivirán en la quinta, añadiendo el quadrado quadrado, que es la ultima potestad de la coluna quarta. La suma será el restador, la qual restada del dicho miembro quedarà el residuo 11479. á quien se juntarà el miembro 7893.

Aora para hallar su guarismo radical, formense otra vez las cinco colunas, escriviendo en la primera los mismos numeros 4. 6. 4 y en la parte inferior de la segunda estará la raiz 17. hasta aora hallada con un zero, sobre la qual se pondràn sus potestades, hasta que todos los numeros de la coluna primera tengan su colateral. Multipli-

Multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma será el divisor. Dividiendo, pues, el miembro por dicho divisor, le tocan 5. al quociente, que se escrivirá en la coluna quarta, y debaxo sus potestades. Multipliquense los numeros de la coluna tercera por los de la quarta, exceptando à los dos ultimos, cuyos productos se escrivirán en la quinta coluna, poniendo debaxo el quadrado quadrado 625. que es la potestad inferior de la coluna quarta, porque esta potestad nunca se multiplica. La suma, pues de los numeros de la coluna quinta, se restará del miembro de quien se saca raíz, quedando el residuo 155538. el qual se pondrá por numerador de un quebrado.

4	4913000	19652000	5	98260000
6	28900	173400	25	4335000
4	170	680	125	85000
			625	625
		19826080		102680625

Para hallar el denominador del dicho quebrado, se formaràn tres colunas. En la primera estaràn los mismos numeros 4. 6. 4. y en la segunda se pondrán la raíz 175. sin zero, y encima sus potestades, como antes. Multiplicando, pues los numeros de la primera; y segunda coluna, y à los productos (que se han de poner en la tercera coluna) añadiendo una unidad, serà la suma de los numeros de la coluna tercera el denominador que se busca. Y este methodo se guardarà en todas las potestades.

4	5259375	21437500
6	30625	183750
4	175	700
		1
		21621951

Exemplo IV.

Para sacar raíz quadrado cubica deste numero 87900000. dividase en miembro de cinco en cinco guarismos, porque el exponente desta potestad es 5. Busquese en la tabla de las potestades el mayor quadrado cubo, que puede caber en el primer miembro de mano izquierda, y se hallarà el 243. cuya raíz es 3. Restese, y quedarà el residuo 636. à cuyo lado se abaxarà el otro miembro, para hacer al total 63600000.

Para hallar su guarismo de la raíz, formense las cinco colunas, escriviendo en la primera los numeros 5. 10. 10. 5. que son propios del

del quadrado cubo, como consta por la tabla triangular. Despues en la segunda coluna, se escrivirà la raiz 3. hallada, con un zero, de suerte, que estè colateral al 5. inferior de la primer coluna, y encima se pondràn sus potestades, hasta que todos los numeros de la primer coluna tengan sus colaterales. Multipliquense los numeros de la primera, y segunda coluna, escriviendo los productos en la tercera, cuya suma es el divisor: Dividiendo, pues, el dicho miembro por èl, se darà 8. al quociente, el qual estarà en la parte superior de la quarta coluna, y debaxo sus potestades, hasta el quadrado cubo. Multipliquense los numeros de la tercera, y quarta coluna fuera los dos ultimos, que son el divisor, y quadrado cubo, escriviendo los productos en la quinta, y añadiendo el quadrado cubo de la tercera coluna. La suma se restarà del miembro, y quedarà el residuo que està en el exemplo, el qual se pondrà por numerador de un quebrado, cuyo denominador se hallará deste modo.

3 8
879,00000.
243
636,00000.
549 55168.
864 4832.

5	810000	4050000	8	32400000
10	27000	270000	64	17280000
10	900	9000	512	4608000
5	30	150	4096	614400
			32768	32768
		4329150		54935168

Formense trés colunas, en la primera escrivanse los mismos numeros 5. 10. 10. 5. en la segunda se pondrà la raiz 38. y encima sus potestades como antes; multipliquense los numeros colaterales de la primera, y segunda coluna, escriviendo los productos en la tercera, y añadiendo una unidad, cuya suma serà el denominador que se busca.

5	2085136	10425680
10	54872	548720
10	1444	14440
5	38	190
		1
		10989031

Exa-

Examen.

703 Multipliquese la raìz por sì misma, tantas veces como fuere la potestad; esto es, quadrese, cubiquese, &c. Y si hay algun residuo, añadese, y ha de ser todo igual al numero de quien se sacó raìz, como se dixo en el examen de la raìz quadrada, y cubica. Pero adviertase, que el ultimo residuo, ò numerador del quebrado, nunca ha de ser igual al denominador, sino menor.

Observaciones.

704 Ningun residuo puede ser igual, ni mayor que la suma de los productos de la raiz, y sus potestades por los numeros de la tabla triangular, peculiares de la potestad de quien se saca raiz, y mas la unidad: Esto es, formando las tres colunas antecedentes, escrivanse en la primera los numeros propios de la potestad de quien se saca raíz: En la parte inferior de la segunda coluna, pongase la raíz hasta entonces hallada, y sobre ella, estaràn sus potestades hasta que llenen todos los lugares colaterales à los numeros de la segunda coluna: Multipliquense la primera, y segunda coluna, escriviendo los productos en la tercera, à los quales se añadirá una unidad, pues ningun residuo puede ser mayor que la suma de la coluna tercera.

705 Si algun residuo fuere zero, y los miembros restantes tambien fueren zeros, se pondràn por guarismos radicales tantos zeros como miembros faltàren que correr. Y assi, sacando raiz quadrada de 10000. porque restando el quadrado 1. del miembro 1. queda zero; y los otros dos miembros son tambien zeros, se pondràn dos zeros en la raíz. Lo mismo es quando el residuo es zero, y el miembro siguiente tambien es zero, se pondrà un zero por raíz, aunque el otro miembro tenga guarismos significativos.

```
  1 0 0
 ———————
1,00,00
1
—
0
```

706 Si la potestad està expressada en enteros, y quebrado, se reducirán los enteros al quebrado, y quedarà quebrado solo: Aora saquese la raíz del numerador, y denominador, formando quebrado; y assi la raíz quadrado quadrada de 16.81. avos, serà dos tercios.

CAPITULO QUINTO.

DE LA APROXIMACION DE LAS raìces Sordas.

707 AProximar las raìces sordas, es hallar raiz de las Potestades irracionales, la qual aunque no sea la verdadera, porque esta no se puede hallar (656) pero es proxima á la verdadera; y se puede aproximar de tal suerte, que la diferencia de la raíz sacada, y de la verdadera, sea menor que qualquier quantidad determinada por pequeña que sea. Mas claramente: Las potestades que no tienen raiz en numero entero, tampoco la tienen en entero, y quebrado (656), y son irracionales; cuyas raìces son sordas, porque como no se pueden pronunciar, pues no ay numero que las expresse, tampoco se pueden oìr; y entonces son las potestades irracionales, quando sobra algo despues de la extraccion de las raìces: Pues lo que se busca en este capitulo, es hallar una raiz de potestad irracional, que se acerque á la verdad tanto quanto se quisiere, pero nunca se pueda señalar la raiz verdadera.

708 Esto supuesto, para aproximar una raiz, añadase al ultimo residuo de la potestad un miembro de zeros, ò tantos zeros como fuere el exponente de la potestad; esto es, en el quadrado, dos ceros; en el cubo, tres; en el quadrado quadrado, quatro; &c. Y continuando la operacion, el guarismo que saliere, serà decimas; esto es, se pondrá por numerador de un quebrado, cuyo denominador serà 10. Otra vez al residuo de esta operacion (siendo la potestad irracional, siempre quedarà el residuo) añadense otros tantos zeros, y continuando la operacion, el guarismo que saliere junto con el antecedente, serà centesimas; esto es, los dos guarismos, se pondrán por numerador de un quebrado, tenga 100. por denominador, y deste modo se puede continuar infinitamente.

Exemplo I.

Se ha de aproximar la raiz quadrada deste numero 632. Saquese la raiz del primer miembro 6. que es 2. y restando su quadrado 4. de 6. quedan 2. por residuo, al qual se añadirà al lado el otro miembro 32. Aora formando las cinco colunas, se pondrá en

la

La primera el numero 2. peculiar del quadrado, como consta por la tabla triangular. (698) En la segunda estarà la raìz 2. con un zero. Multipliquese la primera coluna por la segunda, escriviendo el producto en la tercera, el qual serà divisor; dividase, pues, el miembro 232. por 40. dando al quociente 5. el qual se escrivirà en la quarta coluna, y su quadrado 25. debaxo: Multipliquese el 40. por 5. escriviendo el producto. 200. en la coluna quinta, y debaxo el quadrado 25. cuya suma 225. restada del miembro 232. queda el residuo 7.

```
  2 5
  ———
  6,3 2
  4
  ———
  2 3 2
  2 2 5
  —————
    7 0 0
    5 0 1
    —————
    1 9 9 0 0
    1 5 0 6 9
    —————————
      4 8 3 1
```

A este residuo 7. añadase un miembro de zeros; esto es, dos zeros, porque se saca raìz quadrada, cuyo exponente, ò numero de la primer coluna, es 2. y serà 700. Aora formense las cinco colunas para sacar el guarismo radical correspondiente al 700. y serà 1. quedando 199. de residuo, como todo se vé en la operacion siguiente. Pues si nos contentamos con esta aproximacion, se pondrà el guarismo radical 1. sobre una linea, haciendo quebrado, y debaxo avrà 10. Y assi la raìz serà 25. y 1. 10. avos.

2	20	40	5	200
			25	25
				225

2	250	500	1	500
			1	1
				501

Pero si se quiere aproximar mas, al residuo 199. añadase un otro miembro de zeros, y serà 19900. Formense las cinco colunas, escriviendo en la primera 2. En la segunda estarà toda la raìz hallada hasta aora, que es 251. con un zero. Multiplicando la primera, y segunda coluna, se escrivirà el producto en la tercera, el qual serà divisor: Dividase, pues, el miembro 19900. por el divisor 5020. dando al cociente 3. el qual se escrivirà en la coluna tercera, y debaxo su quadrado 9. multiplicando los numeros de la quarta, y tercera coluna fuera del quadrado 9. saldràn 15060. à los quales se añadirà

dirà el quadrado 9. y la ſuma reſtada del miembro total 19900. quedaràn 4831. con que eſtos dos guariſmos ultimos que provienen de los zeros añadidos, ſeràn numerador de un quebrado que tenga por denominador 100. y aſsi la raíz ſerà 25. y 13. 100. avos.

2	2510	5020	3	15060
			9	9
				15069

Si ſe quiere aproximar mas, añadeſe otro miembro de zeros al reſiduo 4831. y proſiguiendo en ſacar raìz, ſe tendràn ya tres guariſmos originados de los tres miembros de zeros añadidos, los quales ſeràn milleſimas; eſto es, ſe pondràn por numerador del denominador, y deſte modo proſiguiendo, ſe podrà aproximar la raìz, de ſuerte, que ſea mas, y mas proxima à la verdad.

Exemplo II.

Para aproximar la raìz cubica de eſte numero 36879. ſe ſacarà primero la raíz cubica, como eſtà dicho arriba, la qual es 33. y queda el reſiduo 942. al qual ſe añadiràn tres zeros, y ſerà el tercer miembro 942000. Proſigaſe en ſacar la raìz del miſmo modo, y ſe hallarà 2. por guariſmo radical del miembro ſobredicho. Si alguno ſe contentàre con eſta aproximacion, dirà que la raìz cubica algo proxima del numero 36879. es 33. y 2. 10. avos. Pero ſi quiſiere mayor preciſion, añada otro miembro de zeros al reſiduo 284632. y proſiga en ſacar raìz cubica, valiendoſe del guariſmo radical antecedente, no como à numerador de quebrado, ſino como à guariſmo que acompaña à la raìz 33. deſte modo 332. haciendo, pues, la operacion, hallarà 7. por guariſmo radical, y ſi ſe contentàre con eſta aproximacion, dirà, que la raìz cubica del ſobredicho numero, es 33. y 27. 100. avos. Del miſmo modo puede proſeguir aproximando infinitamente.

3 3 2 7

36879
27

9879
8937

942000
657368

284632000
231958783

52673217000

De-

Demonstracion.

Supongo lo primero, que añadir à las potestades tantos zeros como unidades tiene su exponente, es lo mismo que multiplicarlas por las potestades que consten de zeros, y una unidad; como el añadir el quadrado dos zeros, quatro, seis, ocho, &c. es lo mismo que multiplicarle por los quadrados 100. 10000. 1000000. 100000000. &c. Asimismo el añadir al cubo tres zeros, seis, nueve, &c. es multiplicarle por los cubos 1000. 1000000. 1000000000. &c. Y assi de las demàs potestades, como consta por las observaciones del multiplicar. (*69*) Supongo lo segundo, que multiplicando una potestad por otra de la misma especie, sale el producto potestad de la misma especie, como se demonstrò en la Theorica de las potestades; y assi despues de añadidos los zeros, aun quedarà la potestad de la misma especie que antes.

Supongo lo tercero, que si à la potestad antes de añadir los zeros, se le pone debaxo una unidad, se hace un quebrado, como consta de lo que se dixo en los quebrados. (*128*) Y si despues de añadidos los zeros, se pone debaxo de ella una unidad, y tantos zeros, quantos se han añadido, se formarà otro quebrado igual al primero, porque multiplicando los dos terminos del primer quebrado por un mismo numero (que es añadir zeros) sale un quebrado del mismo valor, aunque en numeros mayores (*152*).

Esto supuesto, sea en el primer exemplo la potestad quadrada 632. (Lo mismo dirè de qualquier otra potestad) la qual expressada en forma de quebrado, serà A. y añadiendole quatro zeros que es lo mismo que multiplicar por el quadrado 10000. serà 6320000. à la qual poniendole debaxo el denominador 10000. formarà el quebrado B igual à A. cuya raìz quadrada, serà el quebrado D. la qual contiene 25. enteros, y sobra el quebrado 13. 100. avos. Y como el quebrado B. es igual à A. la dicha raìz, tambien serà raìz de A. pero como la potestad B. està dividida en mas partes que A. la raìz D. serà mas proxima, porque quanto mas menuda es la division, tanto mas se puede acercar à la verdad; y assi añadiendo mas zeros à la potestad, se acercarà la raìz mas à la verdad, hasta que se diferencie en la cantidad mas minima que se pueda señalar.

A	B	D
$\frac{632}{1}$	$\frac{6320000}{10000}$	$\frac{2513}{100}$

PARTE II.

DE LOS MEDIOS PROPORCIONALES.

709 NUmeros medios proporcionales, son aquellos, que estando entre dos extremos, componen alguna proporcion; como en estos numeros 4. 8. 16. el 8. es medio proporcional, porque con los extremos, se formarà la razon de 4. à 8. y de 8. à 16. Y aunque pueda aver diferentes especies de medios, segun la diversidad de las proporciones, que constituyen con sus extremos, como se puede vèr en Jordano, Boecio, y otros; pero comunmente los Arithmeticos les dividen en tres, es à saber en medio Arithmetico, Geometrico, y Harmonico; de los quales trataremos en los Capitulos siguientes.

CAPITULO PRIMERO.

DEL MEDIO ARITHMETICO.

710 MEdio Arithmetico, es el que constituye con los extremos una tal proporcion, de suerte, que la diferencia del medio à los extremos, sea igual; como en estos numeros 3. 5. 7. el 5. es medio Arithmetico, porque la diferencia de 3. à 5. es 2. y la diferencia de 5. à 7. tambien es 2. Assimismo estos tres numeros 15. 10. 5. estàn en proporcion Arithmetica, y el 10. es medio, porque de 15. à 10. ay 5. y de 10. al extremo 5. tambien ay 5. Y assi en el medio Arithmetico, las diferencias tienen entre sì razon de igualdad.

PROBLEMA I.

DADOS DOS NUMEROS, HALLAR UN MEDIO Arithmetico.

711 SEan 4. y 8. los numeros, entre los quales se ha de hallar un medio Arithmetico: Sumense, y toman-

mando la mitad de la ſuma 12. que es 6. ſerà el medio deſeado, de ſuerte, que formarán la proporcion Arithmetica de 4. 6. 8. Aſsimiſmo, ſi entre 16. y 9. ſe ha de hallar un medio Arithmetico de la ſuma de los terminos 25. tomeſe la mitad, que es 12. y medio, la qual ſerà el medio que ſe buſca. Pero ſi el medio ha de hallarſe en numeros enteros, ſe dirà, que entre 16. y 9. no puede aver medio Arithmetico, porque la ſuma 25. no tiene mitad entera.

La razon deſto es manifieſta, porque como las diferencias ſon iguales, el extremo mayor 8. (en el exemplo primero) excede al menor 4. es dos diferencias 2. y 2. luego la ſuma 12. de los extremos, ſerà igual á dos extremos menores, y à dos diferencias; luego la mitad 6. de la ſuma dicha, ſerà igual al extremo menor, y à una diferencia, que es el medio Arithmetico, el qual es igual al menor extremo, y á ſu diferencia.

El miſmo medio Arithmetico, ſe puede hallar de otro modo, reſtando el menor extremo 4. del mayor 8. y añadiendo la mitad 2. de la diferencia al menor extremo 4. ſaldrà el medio 6. como por ſi miſmo es manifieſto.

PROBLEMA II.

DADOS DOS NUMEROS, HALLAR MUCHOS MEDIOS Arithmeticos.

712 REſteſe el numero menor del mayor, y partiendo la diferencia por el numero de los medios aumentado una unidad, ſaldrà la diferencia de los terminos, la qual añadida continuamente al numero, ò extremo menor, darà los medios. Como ſi entre 3. y 15. ſe han de hallar tres medios Arithmeticos, reſteſe el 3. del 15. y la reſta 12. dividaſe por 4. que es numero de los medios 3. y una unidad mas, y el quociente 3. ſerá la diferencia de los terminos, la qual añadida al menor extremo 3. darà un medio 6. y añadida á eſte medio, dará el otro 9. y añadida á eſte darà el tercero 12.

Otro exemplo: Se han de hallar ſeis medios entre 37. y 2. reſteſe el 2. del 37. y partiendo la diferencia 35 por 7, que es el numero de los medios aumentado en una unidad, ſaldrá la diferencia 5. de los terminos, la qual añadida al menor extremo 2. dará el primer medio 7. y añadida á eſte, darà el ſegundo 12. y aſsi continuamente haſta hallarlos todos; y aſsi ſerán Arithmeticamente proporcionales

37. 32. 27. 22. 17. 12. 7. 2. la razon desto por sí misma es manifiesta.

PROBLEMA III.

DADOS EL MEDIO, Y UN EXTREMO ARITHMETICOS, hallar el otro extremo.

713 SI se busca el menor extremo, restese el medio del extremo mayor, y restando esta diferencia del medio, quedará el extremo deseado; como si son dados estos dos numeros 7. y 4. de los quales el 7. es el extremo mayor, y el 4. es el medio, restese 4. de 7. y quedará la diferencia 3. la qual restada del medio 4. quedará el menor extremo 1. con que serán proporcionales Arithmeticamente 7. 4. 1.

Pero si se busca el extremo mayor, restando el menor extremo del medio, y añadiendo la diferencia al mismo medio, saldrá el extremo mayor, como si dados estos numeros 2. 5. se busca el mayor extremo, restese el menor 2. del medio 5. y añadiendo la diferencia 3. al mismo 5. saldrà el mayor extremo 8. y seràn los 3. numeros 2. 5. 8. como todo por sì mismo es bien claro.

Consectario.

714 De aqui nace el methodo de continuar qualquier serie de numeros Arithmeticamente proporcionales, que es, añadiendo la diferencia al ultimo termino quando la proporcion sube: como si se han de continuar, la proporcion Arithmetica en estos dos terminos 3. 5. añadase otra vez la misma diferencia 2. al 7. y serà 9. el otro termino, y assi infinitamente.

Pero si la proporcion se ha de continuar baxando, se restará la dicha diferencia, aunque no se puede continuar infinitamente; como si son dados estos terminos 10. y 6. restando la diferencia 4. del 6. queda otro termino 2. y ya no se puede continuar mas, sin valerse de numeros defectivos.

CAPITULO SEGUNDO.

DEL MEDIO GEOMETRICO.

715 MEdio Geometrico, es el que estando entre dos extremos, constituye con el uno la misma razon,

zon; que el otro con èl, y tambien las diferencias guardan la misma razon; como en estos numeros 2. 4. 8. el 4. es medio Geometrico, porque la misma razon (que aqui es subdupla) ay del 4. al 8. que del 2. al mismo 4. y las diferencias 2. y 4. tambien tienen la misma razon dupla. Assimismo en estos otros numeros 80. 20. 5. el 20. es medio Geometrico; porque tiene la misma razon con el 5. que el 80. con el mismo 20. y las diferencias 60. y 15. tambien guardan la misma razon. Este propiamente se llama medio proporcional, porque los otros son impropríos. Si ay muchos medios entre dos extremos, la razon de unos à otros, es la misma, de suerte, que el medio, ò medios Geometricos constituyen muchos terminos continuamente proporcionales.

PROBLEMA I.

ENTRE DOS NUMEROS HALLAR UN MEDIO Geometrico.

716 MUltipliquense los numeros dados entre sì, y sacando la raìz quadrada del producto, serà el medio proporcional que se busca; como si entre 8. y 32. se ha de hallar un medio proporcional, multiplicando 8. por 32. y sacando raìz quadrada del producto 256 serà 16. el medio que se busca. Assimismo para hallar un medio Geometrico entre 64. y 9. multipliquense, y del producto 576. saquése la raìz quadrada, que serà 24. la qual es el medio proporcional. Si del producto no se puede sacar raìz quadrada, no podrà aver medio alguno proporcional entre los numeros señalados: y para que entre dos numeros pueda aver un medio proporcional, es necessario que sean quadrados, ò planos semejantes.

Demonstracion.

El medio proporcional hallado con los extremos, hace tres continuos proporcionales, como por sì mismo es manifiesto: luego el producto de los extremos, es igual al quadrado del medio, (300) y assi sacando la raìz quadrada del producto de los extremos, serà el medio proporcional entre dichos extremos, los quales si no fueren quadrados, ò planos semejantes, no podràn admitir medio alguno proporcional, como consta de lo que se dixo arriba en la Theorica de las potestades, y raìces.

PROBLEMA II.

ENTRE DOS NUMEROS DADOS, HALLAR MUCHOS medios Geometricos.

717 PAra ceñir este Problema à una regla general, serà preciso escrivir los numeros entre quien se han de hallar los medios bien distantes, poniendo à cada uno un señal como A. al primero, y B. al ultimo; despues pongase entre medio, tantos puntos, quantos medios se desean, debaxo los quales, escrivanse las letras A. y B. con sus exponentes en esta forma: A. la primera A. de mano derecha, se escrivirá 1. à la segunda 2. &c. y al contrario à la primera B. de mano izquierda, pongase 1. à la segunda 2. &c.

Esto supuesto, para hallar qualquier medio sin dependencia de los otros, multipliquense entre sì las potestades de A. y B. segun sus exponentes que estàn en el lugar del medio que se busca, y del producto se sacarà la raiz que tenga por exponente la suma de los exponentes, la qual serà el medio que se busca.

Como si entre estos dos numeros 4. y 1024. se han de hallar tres medios Geometricos continuamente proporcionales, señalense tres puntos, escriviendo à cada uno las letras con sus exponentes, como se vè en la formula: Esto supuesto, para hallar el primer medio, multipliquese el cubo de A. que es 64. (porque tiene el exponente 3. que denota cubo) por el numero B. que es 1024. (porque tiene el exponente 1. que no denota potestad, sino el mismo numero) y del producto 65536. saquese la raiz quarta, ò quadrada quadrada (que es la suma de los exponentes 3. y 1.) y serà el primer medio 16.

Para hallar el medio segundo, multipliquese el quebrado de A. que es 16. (porque tiene el exponente 2.) por el quadrado de B. que es 1048576. (porque tambien tiene el exponente 2.) y sacando la raiz quarta (que es la suma de los exponentes) del producto 16777216. serà 64. el medio deseado.

4	.	.	.	1024
A	A3	A2	A1	B
	B1	B2	B3	

Ultimamente, para hallar el tercer medio, multipliquese el nu-

numero A. que es 4. (porque tiene por exponente 1.) por el cubo de B. (porque tiene 3. por exponente) que ferà 4294967296. del qual facanño la raìz quarta (por la fuma de los exponentes) faldrá el tercer medio 256.

718 De aqui fale una regla facil para hallar dos medios Geometricamente proporcionales, que es lo mas ordinario que fe bufca. Multipliquefe el extremo menor por el quadrado del extremo mayor, y facando raìz cubica del producto, ferà el medio menor; multipliquefe el mayor extremo por el quadrado del menor, y facando raìz cubica del producto ferà el fegundo medio. Tambien hallado el primer medio, fi fe halla un medio proporcional entre el medio primero, y mayor extremo, ferà el medio fegundo.

La demonftracion defte Problema, eftà fundada en el Theorema 9. defte Libro 3. y afsi, quien huviere entendido bien dicho Theorema, verà manifiefta la razon en que eftriva el methodo de facar los fobredichos medios. Quando los extremos propueftos no fon femejantes fólidos, plano fólidos, plano planos, fólido fólidos, &c. no pueden hallarfe entre ellos medios algunos proporcionales.

PROBLEMA III.

DADOS EL MEDIO, Y UN EXTREMO GEOMETRICAMENTE proporcionales, hallar el otro extremo.

719 MUltipliquefe el medio por sí mifmo, y partiendo el producto por el extremo dado, faldrà el otro extremo que fe bufca, como fi dados el medio 8. y el extremo 4. fe ha de hallar el otro extremo; multiplicando 8. por 8. falen 64. los quales divididos por 4. caben à 16. que es el otro extremo, y afsi fon tres continuas proporcionales 16. 8. 4.

Demonftracion.

El quadrado del medio, es igual al producto de los extremos (300) Luego fi el quadrado del medio, fe divide por un extremo, faldrá el otro; porque lo que la multiplicacion hace, la divifion deshace.

Confectario.

720 De aqui fale un modo de continuar qualquier proporcion, porque fi el extremo hallado, fe hace medio, dexando el extremo dado, fe hallará otro termino, y fi efte fe hace medio, dexando los

dos

dos primeros, se hallarà otro termino, assi infinitamente; como se dá el medio 6. y el extremo 3. partiendo por 3. el producto 36. de 6. multiplicado por sì mismo, saldrá el extremo 12. el qual haciendole medio, y dexando el primer extremo 3. esto es, dado el extremo 6. y el medio 12. se hallará el otro termino 24. y dexando los dos primeros terminos, tomando solamente 12. y 24. se hallarà el 48. y assi de los demàs; tomando siempre los dos ultimos terminos.

Pero se ha de advertir, que no siempre se puede hallar el otro extremo, ni continuar la proporcion en numeros enteros, sino en enteros, y quebrados, ò en estos solos; porque no siempre el quadrado del medio, se puede partir enteramente por el un extremo, como por sí es manifiesta: y como consta en la *prop.* 16. *del lib.* 9. de Euclides, siempre que los dos numeros dados fueren entre sí primos, no se quede hallar otro numero entero proporcional.

PROBLEMA IV.

DADO UN TERMINO PROPORCIONAL, Y EL DENOMInador de la razon, hallar los otros terminos proporcionales.

721 SI el termino dado, es el menor extremo, multipliquese por el denominador, y saldrá el medio, el qual multipliquese tambien por el mismo denominador, y saldrà el otro extremo, y assi infinitamente continuando la proporcion, como si se dà el menor extremo 4. y el denominador dos tercios multiplicando, salen 6. que es el medio, el qual multiplicado por dicho denominador, salen 9. que es el mayor extremo; con que seràn 4 6. 9. continuamente proporcionales.

Si el termino dado, es el medio, multipliquese por el denominador, y saldrà el mayor extremo; pero si se parte por dicho denominador, saldrà el extremo menor; como en el exemplo propuesto, si el 6. se multiplica por dos tercios, saldrà 9. y si se divide por los mismos dos tercios, saldrà 4.

Ultimamente, si el numero dado es el mayor extremo, dividase por el denominador, y el quociente será el medio, el qual dividido por el mismo denominador, darà el menor extremo.

Demonstracion.

El denominador de qualquier razon multiplicado por el termino me-

menor, dà el otro termino mayor; y partiendo el termino mayor por dicho denominador, sale el termino menor, como consta de la Theorica de las razones.

Observacion.

722 Es digna de notar la discrepancia que tienen la Arithmetica, y Geometria en la invencion de los medios proporcionales, porque entre dos qualesquiera lineas, siempre se puede hallar una media proporcional por la *prop.* 13. *del lib. 6.* de Euclides; pero entre dos qualesquiera numeros, no siempre se puede hallar medio proporcional. Mas entre dos numeros se pueden algunas veces hallar dos medios proporcionales, y entre dos lineas, aun no se ha hallado arte para poner dos medios continuamente proporcionales; con que en esta materia en parte, es mas fecunda la Geometría, y en parte la Arithmetica.

CAPITULO TERCERO.

DEL MEDIO HARMONICO.

723 TRes numeros están en proporcion Harmonica, ò Musica, quando la misma razon ay del mayor extremo al menor, que de la diferencia del mayor extremo, y medio à la diferencia del medio, y menor extremo; como en estos numeros 3. 4. 6. la razon de 6. à 4. es dupla; assi como la razon de la diferencia 2. del 6. al 4. à la diferencia 1. del 4. al 3. Assimismo estos otros tres numeros 42. 12. 7. estàn en proporcion Harmonica, porque la misma razon ay del 42. al 7. que de la diferencia 30. del 42. al 12. á la diferencia 5. del 12. al 7. pues entrambas razones son sexcuplas. Llamase Harmonica, ò Musica, porque de ordinario en ella consisten las consonancias, y sirve para la division de los intervalos musicos.

PROBLEMA I.

ENTRE DOS NUMEROS DADOS, HALLAR UN MEDIO Harmonico.

724 MUltipliquese la diferencia de los extremos por el extremo menor, y dividiendo el producto por la suma

de

de los extremos, añadase el quociente al menor extremo, y saldrá el medio que se busca; como si entre 15. y 60. se ha de hallar un medio Harmonico, multipliquese la diferencia 45. de entrambos extremos por el menor extremo 15. y dividiendo el producto 675. por la suma de los extremos, saldrá el quociente 9. el qual añadido al menor extremo 15. darà el medio 24. y seràn Harmonicamente proporcionales 15. 24. 60.

Demonstracion.

En el medio Harmonico el extremo menor 60. es al menor 15. como la diferencia 36. del medio al extremo mayor, à la diferencia 9. del extremo menor al medio; esto es, como 60. à 15. asi 36. á 9. Luego componiendo como la suma 75. de los extremos al extremo menor 15. asi la suma 45. de las diferencias 36. y 9. (que es la misma diferencia de los extremos) á la diferencia menor 9. Luego multiplicando la diferencia de los extremos por el extremo menor, y partiendo el producto por la suma de los mismos extremos, saldrá la diferencia menor (que es hacer regla de tres) la qual añadida al extremo menor harà el medio.

PROBLEMA II.

DADO EL MEDIO, Y EL EXTREMO MENOR, HALLAR *el mayor extremo Harmonico.*

725 Dividase el producto del medio, y extremo dados por el numero que queda restando la diferencia de los numeros dados del menor extremo, y el quociente serà el mayor extremo. Como si se dà el menor extremo 12. y el medio 16. multipliquense, y el producto 192. dividase por 8. que es el numero que queda restando la diferencia 4. de los numeros dados del extremo menor 12. y el quociente 24. serà el mayor extremo que se busca.

Demonstracion.

El mayor extremo al menor, tiene la misma razon que la mayor diferencia à la menor, ò al contrario: luego restando las diferencias de los extremos; esto es, la diferencia mayor del mayor extremo, y la menor del menor, quedaràn los residuos en la misma proporcion. Luego serà como 8. residuo menor à 12. extremo menor; asi el medio 16. que es tambien el mayor residuo, al extremo mayor; y por esso se hace la multiplicacion, y division, como en la regla de tres.

Ob-

Observacion.

726 Si la razon del menor extremo al medio es submultiplice, submultiplice superparticular, ò submultiplice superparciente, no se podrà hallar el mayor extremo, porque en todas estas razones la diferencia del menor extremo al medio, es mayor, ò à lo menos igual como en la subdupla, que el menor extremo, con que no se podrà restar para que salga el residuo, ò divisor; con que este Problema solamente tiene lugar en las razones subsuperparticulares, y subsuperparcientes.

PROBLEMA III.

DADOS EL MAYOR EXTREMO, Y EL MEDIO, HALLAR el menor extremo Harmonico.

727 Multipliquese el mayor extremo por el medio, y partiendo el producto por la suma del mayor extremo, y de la diferencia dèl al medio, saldrà el menor extremo que se busca: como si son dados el mayor extremo 24. y el medio 16. cuya diferencia es 8. multipliquense 24. por 16. y el producto 384. se partirà por 32. que es la suma del mayor extremo 24. y de la diferencia 8. el quociente 12. serà el menor extremo.

Demonstracion.

Como el mayor extremo 24. al menor 12. assi la mayor diferencia 8. à la menor 4. y alternando como 24. à 8. assi 12. à 4. è invirtiendo como 8. à 24. assi 4. á 12. Ultimamente componiendo como 32. que es la suma del mayor extremo, y de la diferencia al medio, à 24. que es el mayor extremo; assi 16. que es la suma del menor extremo, y menor diferencia (la qual suma, es el mismo medio) à 12. que es el menor extremo.

Observaciones.

728 Multiplicando el medio Arithmetico por sus extremos, salen los extremos Harmonicos, y multiplicando los extremos Arithmeticos entre sì, sale el medio Harmonico, como lo demuestra Clavio en el Escolio à la *propos. 17. del lib. 6.* Y assi si son tres numeros 3. 5. 7. Arithmeticamente proporcionales, multiplicando 5. por 3. y 7. salen 15. y 35. multiplicando 3. por 7. salen 21. y son tres numeros 15. 21. 35. Harmonicamente proporcionales.

729 Y assi, si querèmos tres numeros en proporcion Harmonica, de suerte, que los extremos tengan qualquier razon, como sesquialtera, tomarèmos dos numeros en la dicha razon, como 6. y 4. entre los quales hallarèmos un medio Arithmetico 5. y de estos saldràn dos Harmonicos 30. 24. 20.

CAPITULO QUARTO.

DEL EXERCICIO DE LAS RAICES, potestades, y medios proporcionales.

730 QUestion 1. Pidese que un qualquier numero quadrado como el 36. se divida en tantos quadrados quantos quisieren. Para la solucion desta dificultad se ha de suponer, que estos tres numeros 3. 4. 5. tienen esta propiedad, que la suma de los quadrados de los dos primeros, es igual al quadrado del 5. porque el quadrado del 3. es 9. y el quadrado del 4. 16. pues sumando 9. y 16. hacen 25. que es el quadrado del 5.

Esto supuesto, digase por regla de tres: Si 25. vienen de 9. luego 36. vendrán de 12. y 24. 25. avos, que es un quadrado, parte del 36. Otra vez: Si 25. vienen de 16. luego 36. vendràn de 23. y 1. 25. avos, que es el otro quadrado, el qual tambien, y mas facilmente se puede saber, restando el primer quadrado 12. y 24. 25. avos del 36. Con que està dividido el 36. en dos quadrados, cuyas raices por regla de tres tambien se pueden conocer, obrando por las raices deste modo: Si 5. dan 3. luego la raiz 6. del 36. darà 3. y tres quintos. Otra vez: Si 5. dan 4. luego 6. daràn 4. y quatro quintos.

Para dividir al dicho 36. en otras partes, dividase cada quadrado en otras dos partes por la misma regla, diciendo: Si 25. vienen de 9. luego 12. y 24. 25. avos vendràn de 4. y 416. 625. avos. Otra vez: Si 25. vienen de 16. luego el quadrado 12. y 24. 25. avos vendrà de 8. y 184. 625. avos. Assimismo se dividirà en dos quadrados la otra parte quadrada 23. y 1. 25. avos, y cada quadrado se dividirà en otros dos infinitamente.

731 Question 2. Un Mercader dexò à otro 54. doblones por tiempo de 3. años, à razon de cierto interès por 100. cada año; pero con tal condicion, que la ganancia de cada año ganasse al mismo respeto que el principal. Despues de los 3. años le bolviò entre caudal, y ga-

ganancia 128. doblones; preguntase à razon de quanto se gana por 100. al año? Esta question se resuelve buscando medios geometricos, y despues usando de la regla de tres, deste modo: Busquense dos medios geometricos entre 54. y 128. porque siendo el empleo por 3. años, y los 128. correspondiendo al tercer año, cierto está que faltan dos años, que son otros tantos medios. El medio, pues, menor entre 54. y 128. es 72. que es la ganancia junta con el empleo del primer año; y assi, si de 72. se quita el empleo 54. quedaràn 18. por la ganancia sola del primer año. Con que los 54. doblones ganan 18. doblones en el primer año.

Aora para saber quanto se gana por 100. en un año, dirè por regla de tres: Si 54. ganan 18. en un año; luego 100. ganaràn 33. y un tercio en el mismo año; y assi dirè, que en el sobredicho contrato se gana à razon de 33. y un tercio por 100.

732 Question 3. Pedro pagò una deuda en 4. años en cierta proporcion geometrica; el primer año pagò 2. reales, y el quarto 128. preguntase en que razon estavan las pagas de cada año? Porque los años son 4. y se tiene la paga del primero, y del quarto, hallense dos medios geometricos entre 2. y 128. y en rigor basta hallar el medio menor, que es 8. el qual se dividirá por el primer termino 2. y saldrà 4. que es el denominador de la razon de las pagas. Con que cada paga fue quadrupla de la antecedente.

733 Question 4. Pidense dos numeros quadrados, que la suma de ellos sea tambien numero quadrado. Para resolver esta question se ha de suponer, como se dixo en la question 1. que estos quadrados 9. 16. sumados hacen numero quadrado 25. Esto supuesto, tomese qualquier numero quadrado como 4. y digase por regla de tres: Si 9. dan 16. luego 4. daràn 7. y un noveno, que es el otro quadrado; y sumando 4. con 7. y un noveno sale numero quadrado 11. y un noveno.

Esta misma question resuelven Puig, y Uentallol de otro modo. Tomese un qualquier quadrado impar como 25. del qual quitese una unidad, y quedaràn 24. cuya mitad es 12. quadrese el 12. y serà 144. el otro quadrado; y sumando 25. con 144. salen 169. tambien numero quadrado.

734 Question 5. En un aposento ay una ventana prolongada, que tiene 6. palmos de ancho, y 10. y dos tercios de alto, la qual se ha de cerrar, y hacer otra quadrada, de suerte que entre la misma luz; preguntase quantos palmos tendrá por cada lado? Hallese un medio geometrico entre los lados de la ventana prolongada, multipli-

tiplicando 6. por 10. y dos tercios, y del producto 64. saquese la raiz quadrada 8. la qual será el lado de la ventana quadrada. Por esta regla se reducirà qualquier figura rectangula prolongada à quadrado, sacando un medio geometrico entre los lados, el qual serà el lado del quadrado.

735 Question 6. Pidense tres numeros quadrados, que la suma de ellos serà tambien numero quadrado. Tomense dos numeros quadrados como 9. y 16. que sumados hagan numero quadrado por la question 4. y dado el numero quadrado 25. que es la suma de los dichos quadrados, hallese por la misma question 4. otro quadrado, de suerte, que la suma de los dos sea numero quadrado.

736 Question 7. Pidense dos numeros, que multiplicados cada uno por sì mismo, y juntos los dos productos, hagan una *unidad*. Busquense dos numeros quadrados, que la suma de los dos sea numero quadrado como 9. y 16. cuya suma es 25. y formense dos quebrados, que tenga por denominador la raìz de la suma 25. y por numeradores las raìces de los quadrados 9. y 16. como son tres quintos, quatro quintos; y estos serán los que se piden.

Si se piden tres numeros, que multiplicados cada uno por sì mismo, y sumados los productos hagan asi mismo la unidad: busquense tres numeros quadrados, cuya suma sea numero quadrado como 9. 16. 144. cuya suma es 169. Formense aora tres quebrados, cuyo denominador sea la raìz quadrada 13. de la suma 169. y los numeradores sean las raìces de los otros quadrados, asi $\frac{3}{13}$ $\frac{4}{13}$ $\frac{12}{13}$.

737 Question 8. Pidense dos numeros quadrados, cuya suma sea igual à la suma de sus raìces. Tomense dos qualquiera numeros, como 2, y 4. cuya suma es 6. la qual partida por 20. que es la suma de sus quadrados, salen 6. 20. avos; y multiplicando este quadrado por los numeros tomados 2. y 4. salen las raìces 12. 20. avos, 24. 20. avos, cuyos quadrados son 144. 400. avos, y 576. 400. avos. La suma de los quadrados es igual à la suma de las raìces.

Si se piden tres numeros quadrados, cuya suma sea igual à la suma de sus raìces, tomense qualesquiera numero 1. 2. 4. cuya suma 7. se partirà por la suma 21. de sus quadrados, y saldrà el quebrado 7. 21. avos, el qual multiplicado por los dichos numeros, serán las raìces 7. 21. avos, 14. 21. avos, y 28. 21. avos, cuyos quadrados sumados igualan à la suma de dichas raìces.

738 Question 9. Pidense dos numeros cubicos, cuya suma sea igual à la suma de sus raìces cubicas. Tomense estos dos numeros 5. y 8. los quales tienen tal propriedad, que la suma de sus cubos,

par-

partida por la suma de ellos mismos, viene al quociente numero quadrado. Sumense, pues, 5. y 8. la suma 13. se dividirà por 637. que es la suma de sus cubos, para que salga el quebrado 1. 49. avos, del qual se tomará la raìz quadrada, que será un septimo, la qual multiplicada por 5. y 8. darà las raìces cubicas cinco septimos, ocho septimos, cuya suma es igual à la suma de los cubos de dichas raìces.

739. Question 10. Dos Mercaderes van à una feria, el uno lleva 36. piezas de lienzo, y el otro lleva 900. reales de à ocho para emplear en el mismo genero de lienzo; quando estuvieron en la feria à tal precio comprò el uno como vendiò el otro, y tantas piezas comprò el uno, quantos reales de à ocho se llevò el otro; preguntase quanto valia la pieza del lienzo, y quantas piezas se compraron con los 900. reales de à ocho.

Esta question resuelve Ventallol desta suerte. Hallase un medio Geometrico entre 36. y 900. el qual serà 180. y tantas piezas de lienzo se compraron con los 900. reales de à ocho, y otros tantos reales de à ocho se llevò el que vendiò las 36. piezas. Aora para saber quanto valia cada pieza de lienzo, dividanse los 180. por 36. y saldran 5. Con que 5. reales de à ocho valia cada una.



LIBRO IV.

DE LAS PROGRESSIONES, Y COMBINACIONES.

AUNQUE este libro sirve de poco provecho para el trato mercantil, y por tanto puede dexarle el que solo se contentàre con la Arithmetica vulgar; pero por los admirables, y reconditos usos que tiene en la Mathematica, y Filosofia, merece el primer lugar en esta obra. Porque à mas de las sutilissimas proposiciones, que nacen de las progressiones, las acreditan la *Algebra*, à quien llaman *Arte Mayor*, y la prodigiosa fabrica de los Logarithmos, pues tienen todo su fundamento en las mismas progressiones. En las combinaciones estriva la arte, que llaman *Combinatoria*, que es una principal parte de la Filosofia, de quien hacen mucho aprecio, y con razon, los Llulistas. Contiene este libro dos partes, la primera trata de las *Progressiones*, y la segunda de las *Combinaciones*.

PARTE I.

DE LAS PROGRESSIONES.

740 PRogression numerica es una série de numeros continuada alomenos por tres terminos, con algun excesso, ò diferencia proporcional, que es lo mismo que una razon continuada por mu-

muchos terminos; los quales, como queda dicho, han de ser lo menos tres, para que aya dos diferencias, que son menester para hacer una *razon Mathematica*. La Progresion es en dos maneras, una Arithmetica, quando las diferencias de los terminos son iguales, ò tienen entre sì razon de igualdad, como 2. 4. 6. 8. &c. ò como 8. 6. 4. 2. La otra es *Geometrica*, quando las diferencias son desiguales, ò guardan entre sì alguna razon de desigualdad, como 1. 2. 4. 8. 16. &c. ò como 16. 8. 4. 2. 1.

741 Qualquiera destas Progresiones Arithmetica, ò Geometrica puede ser *Ascendente*, ò *Descendente*. En la Ascendente los terminos van creciendo como 3. 8. 13. 18. &c. ò como 1. 6. 36. 216. &c. En la Descendente van menguando como 12. 9. 6. 3. ò como 27. 9. 3. 1. Mas qualquiera de estas dos progresiones Ascendente, ò Descendente, se puede continuar por infinitos, ò por mejor decir, por indefinitos terminos; pero con esta diferencia, que la progresion Arithmetica Ascendente se puede continuar indefinitamente por terminos positivos; pero la Arithmetica Descendente no se puede continuar por terminos positivos, sino por negativos, de este modo 6. 4. 2. 0. — 2. — 4 — 6. &c. en la qual los numeros que tienen este señal — son negativos, que son menos que nada, como lo explican los que tratan de Algebra, y de los Logarithmos. La progresion Geometrica Ascendente, siempre se puede continuar por numeros enteros, ò por enteros y quebrados; pero la descendente Geometrica solo se puede continuar infinitamente por numeros quebrados. La progresion Arithmetica que comienza del zero, y la diferencia de los terminos, es la unidad, como 0. 1. 2. 3. 4. &c. se dice progresion natural.

742 Denominador de una progresion Geometrica (la progression Arithmetica propriamente no tiene denominador, sino que la diferencia de sus terminos se llama denominador, aunque no con toda propriedad) es el mismo denominador de la razon, que dicen entre sí los terminos de la misma progresion; pero con esta advertencia, que aunque los terminos tengan razon de menor desigualdad; esto es, que la progresion sea Ascendente, siempre se nombra la razon de mayor desigualdad, comparando el mayor con el menor; y assi, esta progresion 3. 9. 27. 81. no se dirá subtripla, sino tripla. Assi mismo, esta progresion 1. 4. 16. 64. será quadrupla, aunque los terminos tengan entre sì razon subquadrupla; porque de este modo de hablar usan los Autores, pues el ser la razon de mayor, ò menor desigualdad, bastantemente se explica con decir progresion Ascendente, ò Descendente.

743 En qualquier progresion finita, y terminada se deven con-

confiderar cinco cosas. La primera es el termino menor, el qual siempre señalaremos con este señal *Me*. La segunda el termino mayor señalado *Ma*. La tercera el numero de los terminos, cuyo señal será *N*. La quarta la de la progression; que señalaremos con *S*. La quinta el denominador de la Progression, que se significarà con una *D*.

CAPITULO PRIMERO.

DE LA PROGRESSION ARITHMETICA.

PROBLEMA I.

CONTINUAR UNA PROGRESSION ARITHMETICA.

744 SI la progression es ascendente, añadase la diferencia, ò denominador al ultimo termino; y si es descendente, restese, y assi procediendo se continuarà; como si se dá la progression 2. 5. 8. 11. cuya diferencia es 3. añadola al 11. y salen 14. que es otro termino; añado 3. à 14. y salen 17. añado 3. à 17. y salen 20. y assi infinitamente. Pero si la progression es descendente, como 20. 17. 14. 11. resto la diferencia 3. del 11. y quedarà el siguiente termino 8. assimismo, resto 3. del 8. y quedarà el siguiente termino 5. resto 3. de 5. y saldrà el 2. resto 3. de 2. y saldrà el termino negativo — 1. resto el 3. y saldrà — 4. &c. con que serà la progression continuada 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2. — 1. — 4.

Demonstracion.

En la Progression Arithmetica la diferencia de los terminos siempre es igual (740): Luego añadiendo continuamente la dicha diferencia al termino mayor, ò restandola del termino menor, se continuarà infinitamente.

Observacion.

745 En qualquier Progression Arithmetica, como 5. 7. 9. 11. 13. un termino mayor como 11. contiene à otro menor, como al 5. y mas tantas veces à la diferencia 2. quantos son los terminos desde 11. hasta 5. porque como añadiendo la diferencia 2. al 5. continuamente, se ha

pro-

producido el 11. Luego contendrà al 5. y à tantas diferencias, quantas se han añadido. Con que en la progresion Arithmetica finite, el mayor termino contiene al menor, y à tantas diferencias, quantos son los terminos, menos uno.

THEOREMA I.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA LA SUMA de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos.

746 SEa una qualquier progresion Arithmetica A. B. C. D. E. F. G. cuya diferencia sea Z. Digo que la suma de los extremos A. y G. es igual à la suma de B. y F. igualmente distantes de los mismos extremos, ò por mejor decir, immediatos á los mismos extremos. Porque si del extremo mayor C. se quita la diferencia Z. quedaràn F. y G. iguales, pues G. excede à F. en la dicha diferencia, la qual si se añade al menor extremo A. seràn A. y B. iguales; y considerando los terminos deste modo, si cada uno de los dos iguales A. y B. se añade à cada uno de los dos iguales F. y G. las sumas necessariamente han de ser iguales: Luego la suma de los extremos A. y G. es igual à la suma de dos terminos B. y F. immediatamente distantes de dichos extremos.

Z. 4.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
3.	7.	11.	15.	19.	23.	27.

Por la misma razon, la suma de B. y F. es igual à la suma de sus terminos immediatos C. y E. Luego la suma de los extremos es tambien igual à la suma de C. y E. y asi de otros qualesquiera terminos, precediendo siempre por los immediatos: Luego absolutamente la suma de los extremos es igual à la suma de qualesquiera dos terminos igualmente distantes.

Y generalmente la suma de dos terminos de una progresion Arithmetica, es igual à la suma de qualesquiera otros dos terminos igualmente distantes, ora sea àcia al medio de la progresion, ò àcia los extremos, como consta por la misma demonstracion.

*** **** ***

THEOREMA II.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA DE terminos impares, la suma de los extremos es igual al duplo del termino medio.

747 SEa qualquier progression Arithmetica de terminos impares A. B. C. D. E. F. G. cuya diferencia es Z. Digo, que la suma de los extremos A. y G. es igual al termino medio D. doblado: Porque si se toman los terminos C. y E. immediatos à D. la suma de ellos es igual à la suma de los extremos, por el Theorema antecedente: Luego probando que la suma de C. y E. es igual al duplo de D. quedarà probado, que la suma de los extremos es igual al mismo duplo de D. lo qual pruevo assi: Si del termino E. se quita la diferencia Z. quedaràn D. y E. iguales; y si la diferencia quitada se añade á C. serà C. y D. iguales; con que los tres C. D. E. seràn iguales: Luego sumando C. y E. se toman dos terminos iguales: Luego la suma de C. y E. es igual al duplo de D.

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
1.	4.	7.	10.	13.	16.	19.

Z. 3.

Y generalmente, el duplo de qualquier termino es igual à la suma de dos qualesquiera terminos igualmente distantes; ò qualquier termino es la mitad de la suma de dos qualesquiera terminos igualmente distantes.

THEOREMA III.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, SI DE LA suma de dos terminos se resta un qualquier otro termino, el residuo serà un termino distante, tanto del uno de los sumados, quanto el restado dista del otro.

748 SEa la progression Arithmetica A. B. C. D. E. F. G. en la qual se suman los dos terminos A. y F. Digo, que si de dicha suma se resta un qualquier termino C. que dista dos terminos de A. quedarà el termino D. distante tambien dos terminos de F. Porque como las sumas de dos terminos igualmente distan-

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.
20.	18.	16.	14.	12.	10.	8.

tantes son iguales, si de la suma de A. y F. se resta C. quedará D. igualmente distante de F. para que la suma de C. y D. sea igual á la de A. y F.

THEOREMA IV.

LAS SUMAS DE LOS TERMINOS DE LAS PROGRESSIONES Arithmeticas forman Progression Arithmetica.

749 SEan dos, ò mas progressiones Arithmeticas A. y B. Digo, que la suma de sus terminos forma la progression Arithmetica D. Porque siendo ambas progressiones ascendentes, los segundos terminos 6. y 5. exceden à los primeros 4. y 2. en las diferencias 2. y 3. Los terceros terminos 8. y 8. exceden á los segundos 6. y 5. en las mismas diferencias, y assi de los demás. De suerte, que cada termino excede á su antecedente en la diferencia de la progression: Luego cada termino de la suma tambien excede á su antecedente en la suma de las dos diferencias; y assi la suma constituye progression Arithmetica.

A.	4.	6.	8.	10.
B.	2.	5.	8.	11.
D.	6.	11.	16.	21.

Quando las progressiones son descendentes, los primeros terminos exceden à los segundos en la diferencia de la progression: Luego tambien los primeros terminos de la suma exceden à los segundos en la suma de las diferencias; y assi es progression Arithmetica.

Pero quando la una progression es ascendente, y la otra descendente, los segundos terminos de la ascendente exceden à los primeros en la diferencia de la progression, y los segundos terminos de la descendente son excedidos de los primeros en la diferencia de su progression: Luego los terminos de la suma se exceden en la diferencia de las diferencias de las progressiones; y assi dicha suma forma progression Arithmetica.

A.	4.	6.	8.	10.
B.	11.	8.	5.	2.
D.	15.	14.	13.	12.

Consectario.

750 Quando ambas progressiones son ascendentes, ò descendentes, la diferencia de la progression D. es la suma de las progressiones; pero quando la una es ascendente, y la otra descendente la diferencia de la progression D. es la diferencia entre las diferencias de las progressiones A. y B.

THEOREMA V.

LAS RESTAS DE LOS TERMINOS DE LAS *progressiones Arithmeticas forman progression Arithmetica.*

751 SEan dos, ò mas progressiones Arithmeticas A. y B. Digo, que restando los menores terminos de la una de los de la otra, sale la progression Arithmetica D. Porque quando las progressiones A. y B. son ascendentes, cada termino excede à su antecedente en una diferencia; y por consiguiente, los segundos terminos exceden á los primeros en una sola diferencia; los terceros exceden à los primeros en dos diferencias, &c. Y si estas diferencias se quitassen de dichos terminos, quedarian iguales à los primeros; y assi la resta serian terminos iguales à la resta del primero menor del primero mayor, que aqui es 6. Pues como los segundos terminos exceden à los primeros en una diferencia, el segundo mayor excederà al segundo menor en el residuo de los primeros, que aqui es 6. y mas en el residuo de las diferencias 3. y 1. que es 1. Assimismo, el tercero mayor excederà al tercero menor en el residuo 6. y en dos residuos de las diferencias, que aqui es 4. ò excederà al menor en el numero antecedente 8. y un residuo de las diferencias, y assi de los demàs: Luego las diferencias de la resta son iguales, y assi forman progression Arithmetica.

8.	11.	14.	17.	A.
2.	3.	4.	[illegible]	B.
6.	8.	10.	12.	D.

Quando ambas progressiones son descendentes, los segundos terminos son excedidos de los primeros en una diferencia; y assi es la misma demonstracion. Pero quando la una es ascendente, y la otra descendente, crecen, y menguan igualmente: Luego tambien las restas de los terminos han de crecer, ò menguar igualmente, y por consiguiente han de formar progression Arithmetica.

Consectario.

752 Siendo ambas progressiones ascendente, ó descendentes, la diferencia de la resta D. es la diferencia entre las diferencias de las progressiones A. y B. Pero quando la una es ascendente, y la otra descendente, entonces la diferencia de D. es la suma de las diferencias de A. y B.

9.	6.	3.	0.	A.
2.	4.	6.	8.	B.
7.	2. —	3. —	8.	D.

PROBLEMA II.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS DOS extremos, y el numero de los terminos hallar la suma.

753 En este, y en los Problemas siguientes, se ha de advertir, que de las cinco cosas que en cada progression se deven considerar (743) las tres han de ser conocidas, para que se puedan saber las otras.

Esto supuesto, multipliquense la suma de los extremos por el numero de los terminos, y tomando la mitad del producto, serà la suma de todos los terminos de la progression; como si Pedro destribuye cierta cantidad de reales en los pobres en progression Arithmetica por espacio de 7. dias; en el primero dà 3. reales, y en el ultimo 33. Pidese quanta es toda la cantidad que dà de limosna.

Me.						Ma.	N.	S.	D.
3.	8.	13.	18.	23.	28.	33.	7.		5.

Sumando los terminos mayor, y menor 33. y 3. son 36. la qual suma, multipliquese por 7. que es el numero de los dias, ó terminos, y del producto 252. tomese la mitad 126. la qual es la suma de la progression, ò los reales que destribuyò en los pobres.

Demonstracion.

Las sumas de los terminos de dos en dos igualmente distantes de los extremos, son iguales entre sí; esto es, todos los pares de terminos, hacen suma igual, y quando el numero de los terminos es impar, se toma el termino medio dos veces, como consta de los Theoremas antecedentes. Y si todos los pares de terminos, hacen la suma de la progression luego si un par de terminos, que es la suma de mayor, y menor, se multiplica por el numero de los pares de terminos; esto es, se toma tantas veces quantos son los dichos pares, saldrá la suma de la progression; y si se multiplica por el numero de los terminos, el qual es doblado del numero de los pares, saldrà numero doblado de la suma de la progression; y por esso multiplicando la suma de los extremos por el numero de los terminos, y tomando la mitad del producto, sale la suma que se busca.

Consectarios.

754 La misma suma se sabrà multiplicando la suma de los extre-

extremos por la mitad del numero de los terminos; ò multiplicando la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos, como se infiere de la demonstracion antecedente.

755 Quando el numero de los terminos es impar; se hallarà la suma de la progression, multiplicando el termino medio por el numero de los terminos, porque el termino medio, es la mitad de la suma de los extremos; luego lo mismo es multiplicar la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos, que multiplicar el termino medio por el mismo numero de los terminos.

756 En la progression natural como 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. Si el mayor termino 6. se multiplica por el que se avia de seguir, si prosiguiera la progression, que es el 7. y del producto se toma la mitad, será la suma de todos los terminos; porque el dicho numero que en la progression natural se sigue al 6. es el numero de los terminos.

757 En la progression natural de los numeros impares, como 1. 3. 5. 7. 9. &c. La suma es igual al quadrado 25. del numero de los terminos; porque el producto de la mitad de la suma de los extremos por el numero de los terminos, es la suma de la progression como se dixo antes; el numero pues de la mitad de la suma de los extremos es igual al numero de los terminos; porque el termino mayor 9. tomese al menor 1. y tantas veces à la diferencia 2. de los terminos, quantos son los mismos terminos menos uno (745) y assi si al mayor termino 9. se añade el menor 1. la suma 10. contendrá tantas veces à la diferencia 2. quantos son los terminos, y por consiguiente serà doblada del numero de los mismos terminos: Luego la mitad de la suma de los extremos, serà igual al numero de los terminos; luego multiplicando la dicha mitad por el numero de los terminos, saldrà la suma de la progression numero quadrado, cuya raiz es el numero de los terminos.

PROBLEMA III.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS EXtremos, y el numero de los terminos, hallar la diferencia.

758 REstese el extremo menor del mayor, y el residuo dividase por el numero de los terminos menos uno, el quociente serà la diferencia que se busca: Como si un Merca-

cader ha de pagar á otro una cierta cantidad en progression Arithmetica; esto es, que las pagas se excedan igualmente por espacio de 5. años, en el primer año paga 2. doblones, y en el ultimo 22. Pidese quanto ha de pagar cada año. Restando el menor 2. del mayor 22. quedaràn 20. divididos por 4. que es el numero de los años menos uno, porque los dichos años son 5. y quitando 1. quedan 4. sale la diferencia 5. de las pagas; la qual añadida al menor termino 2. saldrà la paga 7. del segundo año; y añadiendo la misma diferencia 5. saldrá la paga 12. del tercer año, y assi de las demàs.

Me.	N.	S.	D.
2. 7. 12. 17. 22.	5.	60.	

Demonstracion.

El termino mayor, contiene al menor, y tantas veces á la diferencia, quantos son los terminos menos uno, como consta por la misma naturaleza de la Progression Arithmetica; luego restando el menor del mayor, y dividiendo la resta por el numero de los terminos menos uno, saldrá la diferencia.

PROBLEMA IV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LA SUMA, y los extremos, hallar el numero de los terminos.

749 EL duplo de la suma de la progression, dividase por la suma de los extremos, y saldrá el numero de los terminos; como si Pedro ha de pagar 70. libras en progression Arithmetica cada año; en el primer año paga 19. y en el ultimo paga 1. preguntase en quantos años pagarà las dichas 70. libras. Doblese la suma 70. y el duplo 140. dividase por la suma 20. de los extremos, y saldràn 7. que es el numero de los terminos, ó años en que ha de pagar las dichas 70. libras en progression Arithmetica.

Ma.	Me.	N.	S.	D.
19. 16. 13. 10. 7. 4.	1.		70.	3.

De-

Demonstracion.

Para saber la suma de la progression, se multiplica la suma de los extremos por el numero de los terminos, y sale el duplo de la suma (749); luego si el duplo de la suma de la progression, se divide por la suma de los extremos, saldrà el numero de los terminos.

PROBLEMA V.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS EXtremos, y la suma, hallar la diferencia.

760 HAllado el numero de los terminos por el *Problema* 4. estaràn conocidos los extremos, y el numero de los terminos; por los quales se hallará la diferencia por el Problema 3.

PROBLEMA VI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS EXtremos, y la diferencia hallar el numero de los terminos.

761 REstese el extremo menor del mayor, y dividiendo el residuo por la diferencia, saldrà un quociente, al qual si se añade una unidad, serà el numero de los terminos. Como si un correo camina ciertas leguas en progression Arithmetica cada dia, el primer dia camina 13. leguas, y el ultimo 3. pero cada dia camina dos leguas menos; preguntase en quantos dias concluirà todo el viage. Quitese el extremo menor 3. del mayor 13. y el residuo 10. dividase por la diferencia 2. al quociente 5. añadase 1. y seràn 6. los dias del viage.

Ma.					Me.	N.	S.	D.
13.	11.	9.	7.	5.	3.		48.	2.

Demonstracion.

El extremo mayor contiene al menor, y á tantas veces la diferencia, quantos son los terminos menos uno, como por sì mismo es manifiesto. Luego si del extremo mayor se resta el menor, y el residuo se divide por la diferencia, saldrà el numero de los terminos menos uno, y añadiendo al quociente 1. serà todo el numero de los terminos.

PRO-

PROBLEMA VII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS LOS extremos, y la diferencia, hallar la suma.

762 POr el Problema antecedente, hallese el numero de los terminos, y entonces conocidos los extremos, y dicho numero de los terminos, se hallarà la suma por el Problema 2.

PROBLEMA VIII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL extremo menor, el numero de los terminos, y la suma de la Progression, hallar el extremo mayor.

763 DIvidase el duplo de la suma de la Progression por el numero de los terminos, quitando el extremo menor del quociente, quedarà el mayor extremo: como si un Artifice hace una estatua en 8. dias por precio de 144. reales, pero le han de pagar en Progression Arithmetica, dandole el primer dia 10. reales que es la menor paga; preguntase quantos reales ha de cobrar el ultimo dia. Doblense los 144. reales, que es toda la paga, ò suma de la Progression, y seràn 288.

los quales divididos por 8. que es el numero de los dias, ò terminos, darán el quociente 36. del qual restado el menor extremo 10. quedará el mayor extremo 26. que es la paga del ultimo dia.

10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26.

Demonstracion.

Para saber la suma de la Progression, se multiplica la suma de los extremos por el numero de los terminos, y del producto se toma la mitad (749): Luego si se dobla la suma dada, y el duplo se divide por el numero de los terminos, saldrà la suma de los extremos, de la qual quitando el extremo menor, quedarà el mayor.

* * *

PRO-

PROBLEMA IX.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, el numero de los terminos, y la suma de la Progression, hallar la diferencia.

764 PRimeramente se hallará el mayor extremo por el Problema antecedente, y despues se hallará la diferencia por el Problema 5.

PROBLEMA X.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, numero de los terminos, y la diferencia, hallar el mayor extremo.

765 MUltipliquese la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y al producto añadase el menor extremo, para que salga el mayor: Como si Pedro pagò en 6. años una cierta deuda en progression Arithmetica, cuya diferencia es 3. En el primer año pagò 5. libras, que es la menor paga; preguntase quanto pagò el ultimo año: Quitese 1. del numero de los terminos 6. y quedarán 5. Multipliquese aora la diferencia 3. por 5. y al producto 15. añadase el menor extremo, ò paga del primer año 5. y serán 20. las libras que ha de pagar el ultimo año.

Demonstracion.

El mayor extremo contiene al menor, y à tantas veces la diferencia, quantos son los terminos menos uno, como queda dicho antes: Luego si la diferencia se multiplica por el numero de los terminos menos uno, y al producto se añade el menor extremo, saldrá el mayor.

PROBLEMA XI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar la suma.

766 HAllese primeramente el extremo mayor por el Problema antecedente; despues se hallará la suma de la progression por el Problema 2.

PRO-

PROBLEMA XII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL mayor extremo, el numero de los terminos, y la suma, hallar el menor extremo.

767 EL duplo de la suma, dividase por el numero de los terminos, y quitando el mayor extremo del quociente, quedarà el extremo menor que se busca. La demonstracion es la misma que la del Problema 8.

PROBLEMA XIII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL MAYOR extremo, el numero de los terminos, y la suma, hallar la diferencia.

768 PRimeramente se hallarà el extremo menor por el Problema antecedente, despues dados los dos extremos, y el numero de los terminos, se sabrà la diferencia por el Problema 3.

PROBLEMA XIV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL MAYOR extremo, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar el menor extremo.

769 MUltipliquese la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y quitando el mayor extremo del producto, quedarà el menor: La demonstracion es la misma que la del Problema 10.

PROBLEMA XV.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL extremo mayor, el numero de los terminos, y la diferencia, hallar la suma.

770 HAllase el extremo menor por el Problema antecedente, y despues hallese la suma por el Problema 2.

PRO-

PROBLEMA XVI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL numero de los terminos, la suma, y la diferencia, hallar los extremos.

771 Dividase el duplo de la suma por el numero de los terminos, y el quociente serà la suma de los extremos, como consta de la demonstracion del Problema 8. Despues multipliquese la diferencia por el numero de los terminos menos uno, y el producto serà el extremo mayor menos el menor, ò la diferencia entre los extremos, como consta de la demonstracion del Problema 10. Ultimamente quitese esta diferencia entre los extremos de la suma de los mismos extremos, y quedarà el duplo del extremo menor, el qual se añade à la dicha diferencia de los extremos, saldrà el mayor extremo.

Como si un correo en *6.* dias caminò *75.* leguas en progression Arithmetica, cuya diferencia es *3.* preguntase quantas leguas caminò el primero, y ultimo dia. La suma es *75.* la qual doblada son 150. leguas, que divididas por *6.* dias, sale la suma de los extremos 25.

Me.					Ma.	N.	S.	D.
5.	8.	11.	14.	17.	20.	6.	75.	3.

Despues multipliquese la diferencia 3. por el numero de los terminos menos uno, que son 5. dias, y el producto 15. serà las leguas que corriò el ultimo dia menos las del primero. Ultimamente restense estas 16. leguas de la suma de los extremos 25. y quedaràn 10. cuya mitad es 5. que son las leguas que corriò el primer dia; las quales si se añaden à las 15. leguas, que es la diferencia de los extremos, serà el mayor extremo 20.

PROBLEMA XVII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL menor extremo, la suma, y la diferencia, hallar el mayor extremo, y el numero de los terminos.

772 EL duplo de la suma de la Progression, multipliquese por la diferencia, y guardese el producto, des-

despues quitese la mitad de la diferencia del extremo menor, ò este de aquella, y el quadrado del residuo, se sumará con el producto guardado de la cuya raiz quadrada restando la mitad de la diferencia, saldrá el extremo mayor que se buscava: Y dados los dos extremos, y la suma, se hallarà el numero de dos terminos por el Problema 4.

Como si Pedro pagò 45. libras en progression Arithmetica, cuya diferencia es 4. el primer año pagó la menor paga 1. libra; preguntase quanto pagó el ultimo, y en quantos años. Doblense las 45. libras, y serán 90. las quales multiplicadas por la diferencia 4. son 390. Despues restando el menor extremo 1. de la mitad de la diferencia, que es 2. quedará 1. cuyo quadrado es 1. el qual se sumará con el producto 360. y seràn 361. cuya raiz quadrada es 19. de la qual se restarà la mitad 2. de la diferencia, y saldrà el extremo mayor, ó paga 17. libras.

1. 5. 9. 13. 17.	N.	S.	D.
Me. Ma.		45.	4.

Para saber los años, dividase el duplo 90. de la suma, por la suma 18. de las dos pagas extremas, y saldrá el numero de los años 5. Y assi digo, que en 5. años pagarà las 45. libras en progression Arithmetica, cuyo primer termino es 1. y la diferencia 4.

Este Problema, y el siguiente, son de la Algebra, y tiene su fundamento en la extraccion de raiz afecta, por lo qual no puedo poner sus demonstraciones hasta que tratemos del arte mayor.

PROBLEMA XVIII.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL EXtremo mayor, la suma, y la diferencia, hallar el extremo menor, y el numero de los terminos.

773 SUmese el extremo mayor con la mitad de la diferencia, y quadrase la suma: Despues multipliquese la suma de la progression por la diferencia, y restando el duplo del producto del quadrado sobredicho, saquese la raiz quadrada del residuo, à la qual se añadirá la mitad de la diferencia quando la raiz es mayor que dicha mitad, pero si fuere menor, se restarà la raiz de la mitad de la diferencia, y saldrà el extremo menor; el

qual conocido, se sabrà el numero de los terminos por el Problema.

Como si Pedro pagò 45. libras en progression Arithmetica, cuya diferencia es 4. La paga mayor fue 17. libras. Preguntase quanta fue la menor, en quantos años pagó. Sumense las 17. libras de la mayor paga con la mitad 2. de la diferencia, y serà la suma 19. cuyo quadrado es 361. Multipliquense aora las 45. libras por la diferencia 4. cuyo producto 180. se doblará, y será 360. el qual restado del quadrado 361. quedará 1. cuya raíz quadrada es 1. la qual restada de la mitad 2. de la diferencia, porque es menor que dicha mitad, quedará 1. que es la paga menor.

Para hallar el numero de las pagas, dividase el duplo de 45. que es 90. por 18. que es la suma de los extremos, ò pagas mayor, y menor, y saldrán 5. que es el numero de las pagas.

PROBLEMA XIX.

DADA LA SUMA DE DOS, O MUCHAS PROGRESSIONES Arithmeticas juntas de igual numero de terminos, y dados el un extremo, y la diferencia de cada una, hallar el numero de los terminos.

774 Continuese cada progression dada á lo menos por dos terminos por el Problema 1. escriviendo la una debaxo la otra, y sumando los terminos correspondientes para conocer la diferencia, cuyas sumas formaràn tambien progression Arithmetica (749) en la qual dados el un extremo, la diferencia, y la suma, se conocerà el numero de los terminos por el Problema 17. ò por el 18.

Exemplo I.

Dos Correos salen à un mismo tiempo; el uno de Madrid para Valencia camino de 50. leguas, y camina cada dia 8. leguas; el otro de Valencia para Madrid, y camina cada dia 10. leguas; preguntase quando se encontraràn. Continuese las dos progressiones por algunos terminos, como se ve, los quales se sumaràn, y saldrà la progression 18. 18. 18. &c. cuya diferencia es zero, en la qual se conoce la suma 50. leguas, el un extremo 18. y la diferencia zero, y assi se conocerá

8.	8.	8.
10.	10.	10.
18.	18.	18.

el

el numero de los terminos por el Problema 17. que es 2. dias, y siete novenos de dia, que es el tiempo quando se encontraràn despues de la partida. Pero porque esta progression es de numeros iguales, se hallarà el mismo tiempo mas facilmente. Doblese la suma 50. y seràn 100. dividase por el duplo del primer termino 18. que es 36. y vendran los mismos dias.

Exemplo II.

Una Ciudad tiene 3600. passos de ambito, y dos hombres salen à un mismo tiempo caminando por partes encontradas para rodearla, el uno camina cada hora 1000. passos, y el otro camina la primer hora 100. passos, la segunda 200. la tercera 300. &c. Preguntase en quantas horas se encontraràn. Escrivanse las dos progressiones, sumando los terminos correspondientes, y saldrá la progression 1100. 1200. &c. En la qual se conoce el menor extremo 1100. la diferencia 100. y la suma 3600. y assi se hallarà en numero de los terminos por el Problema 17. que es 3. y assi digo, que en 3. horas se encontrarán.

1000.	1000.
100.	200.
1100.	1200.

Exemplo III.

En un granero ay 186. cahices de trigo, los quales han de sacar dos hombres en progression Arithmetica, el uno saca en la primer hora 3. cahices, en la segunda 8. &c. el otro saca en la primer hora 8. cahices, en la segunda 11. &c. Preguntase en quantas horas le sacarán todo. Escrivanse algunos terminos destas dos progressiones, y sumandose, saldrà la progression 11. 19. &c. cuya diferencia es 8. Conocidos, pues, el menor extremo 11. la diferencia 8. y la suma 186. se hallará el numero de los terminos 6. por el Problema 17. Y assi digo, que en 6. horas sacaràn todo el trigo.

3.	8.	13.
8.	11.	14.
11.	19.	27.

Exemplo IV.

Entre tres hombres han de llenar una cisterna, en la qual caben 550. cantaros de agua: El primero cada dia echa 50. cantaros: El segundo pone el primer dia 60. cantaros, el segundo 50. &c. El tercero echa el primer dia 20. cantaros, el segundo 35. &c. Preguntase en quantos dias llenarán dicha cisterna. Escrivanse algunos terminos de las tres

50.	50.	50.
60.	50.	40.
20.	35.	50.
130.	135.	140.

progressiones, los quales sumados, hacen la progression 120. 135. &c. cuya diferencia es 5. Dada pues la suma 550. el menor extremo 130. y la diferencia 5. se hallarà el numero de los terminos por el Problema 17.

Demonstracion.

Entre todas las progressiones juntas de leguas, passos, chaices, cantaros, &c. se hace toda la obra; esto es, se caminan todas las leguas, ó passos se vacìa el granero, ó se llena la cisterna: Luego sumando los terminos de las progressiones, saldrá una progression tambien Arithmetica (749) que contiene toda la misma obra; en la qual progression se conoce la suma, el un extremo, y la diferencia, y assi se podrà conocer el numero de los terminos por los Problemas 17. 18. los quales representan las horas, ò dias de camino, ò trabajo. Y que estos terminos en todas las progressiones de leguas; passos, &c. ayan de ser iguales, es manifiesto; porque el trabajo, ò camino se comienza, y acaba à un mismo tiempo.

775 Si se quieren saber las leguas, passos, cahices, cantaros, que cada uno ha corrido, sacado, echado, se hallaràn por el Problema 11. ó 15. pues que se conocen el numero de los terminos, la diferencia, y el un extremo; como si dos correos salen á un mismo tiempo, el uno de Madrid para Valencia caminando en progression Arithmetica, cuya diferencia es zero en el primer dia 8. El otro sale de Valencia para Madrid tambien en progression Arithmetica, cuya diferencia es zero caminando en el primer dia 10. leguas, los quales se encuentran en 2. dias, siete novenos de dia, preguntase quantas leguas camina cada uno, ò à quantas leguas se encontraràn. Se hallarà, que el primero camina 22. leguas, y dos novenos, y el segundo 27. leguas, y siete novenos. Este exemplo por ser de progression es de numeros iguales, se harà mas facilmente multiplicando el primer termino, ó leguas que camina cada uno por los dias.

Assi mismo, conocidas las leguas que camina cada uno, los dias, y el primer termino, se sabrà la diferencia de la progression, y por consiguiente se conoceràn los terminos de la misma progression por los Problemas 9. ó 13. Y con esto tiene el Arithmetico campo abierto, para ir combidando todos los Problemas antecedentes, à inventar inumerables questiones.

PRO-

PROBLEMA XX.

EN DOS, O MUCHAS PROGRESSIONES ARITHMETICAS de igual suma, dados el un extremo, la diferencia, y la suma de cada una, hallar el numero de los terminos.

776 ESte Problema no contiene otra dificultad mas que resolver el Problema 17. quando el extremo dado es el menor, ò el Problema 18. quando es el mayor; pero aplicados à la practica, contiene muchas questiones curiosas, de las quales resolveré algunas en los exemplos siguientes.

Exemplo I.

De Barcelona à Madrid ay 100. leguas, y un Correo sale de Barcelona para Madrid caminando cada dia 10. leguas; otro Correo se atreve à caminar cada dia 16. leguas; preguntase quantos dias saldrá despues este segundo, para que entren los dos juntos en Madrid? Siguiendo la regla del Problema 17. se hallarà, que el primer Correo caminará las 100. leguas que ay de Barcelona à Madrid en 10. dias; y el segundo las caminarà en 6. dias y un quarto de dia, los quales se restaràn de los diez dias que ha de menester el primer Correo, y quedaràn 3. dias y tres quartos de dia, y tanto tiempo saldrà el segundo despues del primero, para que entren los dos juntos en Madrid. Este exemplo por contener progressiones de los terminos iguales se harà mas facilmente, dividiendo las 100. leguas por las 10. del primer Correo, y saldràn 10. dias, dividiendolas por las 16. del segundo Correo, saldrán 6. dias y un quarto, como antes.

Exemplo II.

Pedro ha de pagar 140. libras en progression Arithmetica, el primer año paga 8. libras, el segundo 12. &c. Preguntase si el primer año pagàra 50. libras, el segundo 40. &c. si acabaria mas presto, ò mas tarde de pagar? Busquense los terminos de cada progression, y se hallará, que la primera se acaba en 7. años, y la segunda en 4. años.

La demonstracion deste Problema por si misma, es manifiesta; pero se ha de advertir, que algunas veces son tales las progressiones dadas, que no tiene lugar el Problema.

PROBLEMA XXI.

EN LA PROGRESSION ARITHMETICA, DADOS EL UN extremo, y la diferencia, hallar el numero de los terminos, de ſuerte, que la ſuma de la progreſſion ſea igual al producto del numero de los terminos por un numero dado.

777 DEl duplo del numero dado, reſteſe el extremo conocido, y quedarà el otro extremo; deſpues dados los extremos, y la diferencia, ſe hallarà el numero de los terminos por el Problema 6.

Exemplo I.

Dos Navios parten à un miſmo tiempo, y por un miſmo rumbo; el uno camina cada dia 30. millas; el otro camina el primer dia 10. millas, el ſegundo 15. &c. Preguntaſe en quantos dias alcanzarà el ſegundo al primero? Doblenſe las 30. millas que camina cada dia el primero, y ſerán 60. de las quales ſe reſtaràn las 10. millas que camina el ſegundo en el primer dia, y quedaràn 50. que es el otro extremo. Aora dados los extremos 10. y 50. y la diferencia 5. ſe hallará el numero de los terminos por el Problema 6. quitando 10. de 50. y dividiendo la reſta 40. por la diferencia 5. ſaldràn 8. à los quales añadiendo 1. ſeràn 6. los dias que ſe buſcan.

Si ſe deſea ſaber à quantas leguas del Puerto ſe alcanzaràn: multipliquenſe las 30. millas que camina el primero por los 9. dias, y ſaldrán 270. leguas.

Exemplo II.

Una Isla tiene de ambito 50. millas, y ſalen de un Puerto della dos Navios para rodearla caminando por una miſma parte; el uno camina cada dia 20. millas, y el otro camina el primer dia 30. millas; el ſegundo 28. &c. Preguntaſe en quantos dias alcanzarà el Navio primero al ſegundo? Del duplo de las 20. millas, que es 40. reſtenſe las 30. millas, quedaràn 10. que es el ultimo extremo. Dados, pues, los extremos 30. y 10. y la diferencia 2. ſe ſabrá el numero de los terminos, ó dias reſtando 10. de 30. y partiendo el reſiduo 20. por la diferencia 2. y al quociente 10. añadiendo 1. con que en 11. dias ſe encontraràn los Navios.

Si ſe quiere ſaber á quantas millas ſerà el alcance: Multipliquenſe las 20. millas que camina el primer Navio cada dia por los

11.

11. dias y saldrán 220. millas. Para saber quantas veces avrà rodeado la Isla cada Navio, dividanse las 220. millas por el ambito 50. y saldràn 4. veces, y sobran 20. millas que denotan la distancia del alcance desde el Puerto.

Demonstracion.

Las 20. millas que camina el primer Navio cada dia; multiplicadas por los 11. dias hasta el alcance, hacen toda la suma de la progression; y la suma de los extremos en la progression del segundo Navio, multiplicada por los mismos 11. dias, hace el duplo de la misma progression (son de igual suma las dos progressiones): luego el duplo de las 2. millas, que son 4. es igual à la suma de los extremos en la progression del Navio segundo; con que si de dicho duplo se resta el un extremo, quedarà el otro, y estaràn conocidos los dos extremos; à mas desto se sabe la diferencia: luego se conocerà el numero de los terminos por el Problema 6.

PROBLEMA XXII.

DADOS EL UN EXTREMO, Y DIFERENCIA DE CADA UNA de dos progressiones Arithmeticas de iguales sumas, y numero de terminos, hallar el dicho numero de terminos.

778 ESte Problema, es mas universal que el antecedente, porque se extiende á qualquier progression Arithmetica mientras sea proporcionada à la question propuesta, lo qual se conocerà por el mismo tenor de la question.

Escrivanse á lo menos dos terminos de cada progression correspondientes unos á otros, los mayores arriba, y los menores debaxo, restense, y quedarà una progression Arithmetica, (751) en la qual se han de buscar los terminos hasta el zero, deste modo: Dividase el primer termino (que siempre ha ser el mayor, pues esta progression necessariamente ha de ser descendente para poderse resolver el Problema) por la diferencia, añadiendo 1. al quociente, darà el numero de los terminos hasta el zero, el qual doblado menos uno, será el numero de todos los terminos de la progression.

Exemplo I.

Dos caminantes salen à un tiempo de un mismo lugar, y vàn por

un mismo camino en progression Arithmeticas; el uno camina en el primer dia 3. leguas; en el segundo 7. &c. el otro camina en el primer dia 1. legua, en el segundo 6. &c. Preguntase quando se encontrarán? Escritos los terminos, y restados como se vè en la formula, saldrà la progression 2. 1. &c. cuya diferencia es 1. dividase el primer termino 2. por la diferencia 1. y al quociente 2. se añadirá 1. y serán 3. los terminos hasta el zero, doblense, y quitese 1. y quedaràn 5. los terminos de toda la progression, por lo qual digo, que en 5. dias se alcanzarán.

3.	7.
1.	6.
2.	1.

Si se quiere saber à quantas leguas serà el alcance, siganse las reglas de los Problemas 11. ó 15. en cada progression, y se hallarán 55. leguas.

Exemplo II.

Entre dos Oficiales hacen una obra, ganando en progressiones Arithmeticas; el uno gana en el primer dia 4. reales, en el segundo 8. &c. El otro gana en el primer dia 10. reales, en el segundo 12. &c. Preguntase quanto avrà ganado tanto el uno como el otro? Escritos los terminos de las progressiones, y restados como antes, sale la progression 6. 4. &c. cuya diferencia es 2. dividase, pues, el primer termino 6. por 2. y al quociente 3. añadase 1. seràn 4. doblense, y quitese 1. y serán 7. ó mas facilmente doblese el quociente 3. y al duplo 6. añadase 1. con que en 7. dias avràn ganado igualmente.

10.	12.
4.	8.
6.	4.

Demonstracion.

Para la inteligencia de la demonstracion, continuese las progressiones de un exemplo destos, y sean del primero, donde restando los terminos de una progression de los terminos de la otra, al tercer termino se igualan, y por consiguiente el termino de la resta, es zero. Digo, pues, que donde las progressiones se igualan, es el medio de las dichas progressiones, para que en ambas las sumas, y numeros de terminos sean iguales; porque quando la primera progression lleva ventaja à la segunda hasta los terminos iguales, tanto de alli la segunda excede á la primera; luego los terminos iguales están en medio; y assi hallado el numero de los terminos hasta el zero, se sabrà todo el numero de los terminos.

3.	7.	11.	14.	17.
1.	6.	11.	16.	21.
2.	1.	0.		

Es-

Estos Problemas bastan para que el Arithmetico pueda resolver las questiones de Arte Menor que se le puedan ofrecer, pues discurriendo sobre ellos, y combinando unos con otro, juzgo que no avrà question de las referidas en que no halle cabal solucion. Pero advierta, que en estos ultimos Problemas, no todas las progressiones Arithmeticas tienen lugar.

CAPITULO SEGUNDO.

DE LA PROGRESSION GEOMETRICA.

THEOREMA I.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, EL PRODUCTO de los extremos, es igual al producto de qualesquiera dos terminos igualmente distantes de los extremos.

779 SEa la progression Geometrica A. B. C. D. E. F. G. Digo, que el producto A. G. 256. de los extremos A. y G. es igual al producto de B. F. y al producto de C. E. porque la progression Geometrica, es una razon continuada, y assi son

2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.
A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.

proporcionales A. à B. como B. á C. y como C. à D. y como D. à E. y como E. à F. y como F. á G. con que son proporcionales A. à B. como F. à G. luego el productó de A. por G. es igual al producto de B. por F. (298)

Assimismo son proporcionales B. à C. como E. à F. luego el producto de B. F. es igual al producto de C. E. y por consiguiente igual al producto de A. por G. luego el producto de dos terminos igualmente distantes de los extremos, es igual al producto de los extremos.

Consectarios.

780 Generalmente el producto de qualesquiera dos terminos de una progression Geometrica, es igual al producto de otros dos terminos igualmente distantes de los primeros aora sean extremos, ò medios

En

781 En la progreſsion Geometrica de terminos impares, el quadrado del medio, es igual al producto de qualeſquiera dos terminos igualmente diſtantes: porque C. D. E. ſon continuamente proporcionales: luego el quadrado de D. es igual al producto de C. y E. (300) y como eſte producto ſea igual al producto de B. F. tambien el quadrado de D. ſerà igual al producto de B. F. y aſsi de los demàs. Y no es neceſſario que la progreſsion ſea de terminos impares, ſino que tomando qualquier termino, ſu quadrado es igual al producto de qualeſquiera dos terminos igualmente diſtantes.

THEOREMA II.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, SI EL PRODUCTO de los terminos, ſe divide por un qualquier termino, el quociente ſerà un termino diſtante, tanto del uno de los terminos multiplicados, quanto el partidor diſta del otro.

782 EN la miſma progreſsion Geometrica, multiquenſe los terminos A. F. y el producto dividaſe por el termino E. digo que el quociente ſerà B. que diſta tanto de A. como E. de F. porque el quociente multiplicando al diviſor, reſtituye al numero dividendo, luego el producto de B. E. es igual al producto de A. F. Y como los productos de los terminos igualmente diſtantes ſon iguales, ſi el producto de A. F. ſe divide por E. ſaldrà el otro termino B. igualmente diſtante.

THEOREMA III.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA TERMINADA, la miſma razon tiene la diferencia minima al menor extremo, que la diferencia entre los extremos à la ſuma de la progreſsion menos el mayor extremo.

783 SEa una qualquier progreſsion Geometrica 2. 8. 32. 128. 512. cuyas diferencias ſean 6. 24. 96. 384. Digo que la miſma razon tiene la menor diferencia 6. al menor extremo 2. que la diferencia 510. que ay entre los extremos à la ſuma de la progreſsion menos el mayor extremo, la qual es 170. eſto es, à

2.	8.	32.	128.	512.
6.	24.	96.	384.	

la

la suma de los terminos 2. 8. 32. 128. Porque el mayor extremo 512. se compone de la diferencia 6. 24 96. 384. y del menor extremo, 2. de suerte, que la diferencia 510. de los extremos, es la misma suma de dichas diferencias, como por sì es manifiesto. A mas desto los terminos de la progression, son proporcionales; esto es, como 512. à 128. assi 128. à 32. y assi 32. á 8. y assi 8. à 2. pues que la progression Geometrica es una razon continuada; luego dividiendo como la diferencia 384. à 128: assi la diferencia 96. à 32. y assi 24. à 8. y assi 6. à 2. luego como un antecedente 6. que es la menor diferencia à un consequente 2. que es el menor extremo; assi la suma de todas las diferencias, antecedentes, que es la diferencia entre los extremos, à la suma de todos los consequentes, (318) que es la suma de todos los terminos, ò de la progression fuera el ultimo.

Esta es la proposicion 35. del libro 9. de Euclides, de la qual deduxeron misteriosos arcanos en la progression infinita el P. Gregorio à S. Vincencio, y el P. Andrés Tacquet, ambos de la Compañia de Jesus; pero los Mathematicos antigüos, no advirtieron su fecundidad.

Consectario.

784 En la progression Geometrica, la misma razon tiene el donominador menos la unidad á la unidad, que la diferencia de los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo. Porque el denominador à la unidad, tiene la misma razon que el mayor termino de una razon al menor; esto es, en el exemplo arriba supuesto el denominador 4. à la unidad, es como 8. à 2. luego dividiendo (315) como 4. menos 1. á 1. esto es, como 3. à 1. assi 8. menos 2. à 2. esto es, assi 6. á 2. El 6. pues es la menor diferencia, y el 2. es el menor extremo, los quales tiene la misma razon que la diferencia de los extremos à la suma de la progression menos el mayor extremo, como consta por el Theorema: luego como el denominador menos la unidad à la misma unidad; assi la diferencia entre los extremos à la suma de la progression menos el meor extremo.

THEOREMA IV.

DADAS DOS PROGRESSIONES GEOMETRICAS, SI EL primer termino de la una, se multiplica por el primero de la otra, el segundo, por el segundo sale una progression Geometrica.

785 SEan las progressiones dadas 3. 9. 27. &c. y 1. 2. 4. &c. Digo, que multiplicando 1. por 3. mas 2. por 9. mas

4.

4. por 27. &c. sale progresſion Geometrica 3. 18. 108. &c. porque si el primero, y segundo termino de cada progresſion, se ponen en forma de quebrado, como se suelen poner las razones para sumarlas, restarlas, multiplicarlas, &c. seràn tres novenos y medio, las quales multiplicadas, saldràn 3. 18. avos, que es multiplicar primer termino por primero, segundo por segundo.

3.	9.	27.	81.
1.	2.	4.	8.
3.	18.	108.	648.

Asimiſmo, multiplicando los segundos, y terceros terminos en forma de quebrado, saldrá la razon de 18. à 108. y como la razon del primer termino de cada progresſion al segundo, sea la misma que la del segundo al tercero, y por consiguiente los quebrados, seràn los mismos, tambien saldràn los productos en una misma razon, y assi haràn una progresſion Geometrica.

Consectario.

786 El denominador de la progresſion producida, es el producto de los denominadores de cada progresſion; porque como el denominador de cada razon enseña la cantidad de las razones, multiplicando los denominadores, se hace el denominador de las razones producidas.

THEOREMA V.

DADAS DOS PROGRESSIONES GEOMETRICAS, SI EL primer termino de la una, se divide por el primer termino de la otra, el segundo por el segundo, &c. sale una progresſion Geometrica.

787 Dividanse los terminos de la progresſion 3. 18. 108. &c. por los terminos de la progresſion 3. 9. 27. &c. Digo que saldrà progresſion Geometrica 1. 2. 3. &c. porque si de los primeros, y segundos terminos, se hacen quebrados como antes, seràn 3. 18. avos, y tres novenos, y partiendo el primer quebrado por el segundo, saldrà un medio, que son los primeros terminos de la progresſion de los quocientes; lo mismo serà partiendo los otros terminos, porque todos guardan una misma razon.

3.	18.	108.	648.
3.	9.	27.	81.
1.	2.	4.	8.

PRO-

PROBLEMA I.

CONTINUAR UNA PROGRESSION GEOMETRICA.

788 SI la progresion es ascendente, multipliquese el denominador de la progresion (que es el mismo que el de la razon de los primeros dos terminos) por el mayor termino, y saldrà el immediate siguiente; y asi infinitamente. Pero si la progresion fuere descendente, dividase el mismo termino por el denominador, y saldrá el menor siguiente, y asi continuamente.

Porque el denominador enseña quantas veces el antecedente contiene à su consequente, ó es contenido: Luego en la progresion ascendente, que es razon de menor desigualdad, multiplicando el mayor termino por el denominador, sale su consequente; y en la descendente partiendo, sale el otro termino.

789 Pero se ha de advertir, que como demuestra Euclides en la prop. 17. del lib. 9. La progresion cuyos extremos son numeros entre si primos, no se puede continuar por numeros enteros.

PROBLEMA II.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS LOS EXtremos, y el denominador, hallar la suma, y el numero de los terminos.

790 REstese el extremo menor del mayor, y dividiendo el residuo por el denominador menos 1. saldrà la suma de la progresion menos el mayor extremo, el qual si se añade, se tendrà toda la suma. Como si Pedro pagó una deuda en progresion Geometrica, cuyo denominador es 4. en el primer año pagó 2. libras, y en el ultimo 2048. Preguntase quanta era la deuda. Restese el menor extremo, ò paga 2. del mayor 2048. y quedaràn 2046. quitese 1. del denominador 4. y quedaràn 3. Dividanse aora las 2046. libras por 3. y saldrá el quociente 682. al qual se añadirá el mayor extremo 2048. y será toda la suma de la progresion, ò toda la deuda 2730.

Demonstracion.

Como el denominador menos 1. á la unidad, asi la diferencia de los

los extremos á la suma de la progresion menos el mayor extremo esto es, como 3. á 1. asi 2046. à 682. (784) que es hacer regla de tres, y como el termino segundo, es la unidad que no aumenta la multiplicacion, basta partir el tercer termino 2046. por el primero 3. y saldrà el quarto, al qual añadiendo el mayor extremo de la progresion, saldrà toda la suma.

Para hallar el numero de los teminos, multipliquese el extremo menor por el denominador tantas veces, hasta que el producto sea igual al extremo mayor, como por si mismo es manifiesto.

Consectario.

791 Si la progresion fuere dupla, basta restar el menor extremo del mayor, y añadir al residuo el mismo mayor extremo; ó doblar el mayor extremo, y del duplo restar el menor extremo, para que salga la suma; porque entonces el denominador es 2. del que quitando 1. queda la unidad, que no muda la division.

PROBLEMA III.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS LOS EXTREMOS, y la suma, hallar el denominador, y el numero de los terminos.

792 REstese el menor extremo del mayor, restese tambien el mayor extremo de la suma, y partiendo el mayor residuo por el menor, añadese una unidad al quociente, y saldrà el denominador. Como si un oficial en una obra gana 242. reales en progresion geometrica, en el primer dia 2. reales, y en el ultimo 162. para saber en què progresion geometrica procede la ganancia, restense los 2. reales de los 162. y quedaràn 160. Restense tambien los 162. de los 242. y quedarán 80. Dividanse los 160. por 80. y al quociente 2. se añadirá 1. para que salga el denominador 3. Y asi digo, que en progresion tripla ganò los 242. reales.

Demonstracion.

Si la diferencia de los extremos se divide por el denominador menos 1. saldrà la suma de la progresion menos el mayor extremo (790); esto es, saldrá el residuo de la resta del mayor extremo de la suma total. Luego si la misma diferencia de los extremos se divide por dicho residuo; saldrá el denominador menos uno.

Para

793 Para hallar el numero de los terminos, hallese primero el denominador por la regla antecedente, y despues se sabrà el numero de los terminos por el Problema antecedente.

PROBLEMA IV.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MENOR extremo, la suma, y el denominador, hallar el mayor extremo y el numero de los terminos.

794 QUitada una unidad del denominador, multipliquese el residuo por la suma de la progression, y añadiendo el menor extremo al producto, dividase todo por el denominador, y saldrà el mayor extremo. Como si un limosnero repartió 8190. reales en los pobres en progression geometrica quadrupla; el primer dia dió 6. reales, que fue la menor limosna; preguntase quanto repartió el dia ultimo. Quitese 1. de 4. que es el denominador, y quedarán 3. los quales multiplicados por los 8190. que es la suma, hacen 24570. à los quales añadanse los 6. reales que dió el dia de la menor limosna, y serán 24576. dividase por el denominador 4. y saldrà la mayor limosna, mayor extremo 6144.

Demonstracion.

Para hallar la suma se resta el menor extremo del mayor, y el residuo se divide por el denominador menos 1. y al quociente se añade el mayor extremo (790). Luego si la suma se multiplica por el denominador menos uno, y al producto se añade el menor extremo, y todo se divide por el denominador, saldrà el mayor extremo, que es resolver lo que se hizo en la suma.

795 Conocidos, pues los extremos, y la suma, se hallarà el numero de los terminos por el Problema antecedente; ò dado el denominador, y los extremos, se hallará el numero de los terminos por el Problema 2.

PROBLEMA V.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MAYOR extremo, la suma, y el denominador, hallar el extremo menor, y el numero de los terminos.

796 MUltipliquese la suma, menos el mayor extremo, por el denominador menos 1. y quitando el producto del ma-

mayor extremo, quedarà el menor. Como si un Mercader ha de cobrar 468. libras en progression Geometrica quintupla, el primer año cobra 375. libras por mayor paga; preguntase quanta serà la ultima paga. Restense las 375. libras de toda la paga 468. y quedaràn 93. libras, que es la suma de los terminos de la progression menos el mayor, restese tambien 1. del denominador 5. y quadaràn 4. Multipliquense las 93. libras por 4. y el producto 372. restese de la mayor paga 375. y quedarà la menor 3. libras, y tanto cobrarà el ultimo año.

Demonstracion.

Si el mayor extremo menos el menor; esto es, la diferencia de los extremos, se divide por el denominador menos uno, sale la suma de la progression menos el mayor extremo (790): Luego si la suma menos el mayor extremo se multiplica por el denominador menos uno, saldrà el mayor extremo menos el menor, ò la diferencia de los extremos, la qual quitada del mayor extremo, quedarà el menor; porque la multiplicacion compone lo que la division resuelve.

797 El numero de los terminos, se hallarà el Problema 2. conocidos los extremos, y el denominador.

PROBLEMA VI.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MENOR extremo el denominador, y el numero de los terminos, hallar el mayor extremo, y la suma.

798 ESerivase el denominador tantas veces, quanto fuere el numero de los terminos menos una, y multiplicando continuamente, multipliquese el ultimo producto por el menor extremo, y saldrà el mayor. Como si Pedro pagó una deuda en 6. años en progression quadrupla, el ultimo año, que fue la menor paga, pagò 6. libras; para saber la primer paga, escrivase el denominador 4. cinco veces, que es una menos que el numero de los años, assi 4. 4. 4. 4. 4. y multiplicando continuamente, saldrán 1024. los quales multiplicados por la menor paga 6. libras, saldrán 6144. por la paga mayor.

Demonstracion.

La progression Geometrica ascendente, se continua multiplicando

do de un termino por el denominador continuamente (788 : luego si el mismo denominador se multiplica continuamente tantas veces, quantas son las diferencias, las quales siempre son una menos, que el numero de los terminos, y el producto se multiplica por el menor extremo, saldrá el mayor; porque lo mismo es multiplicar continuamente el menor extremo por el denominador, que multiplicar muchas veces el denominador, despues por el menor extremo.

799 La suma de la progression, se hallará por el Problema 2. conocidos los extremos, y denominador.

PROBLEMA VII.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MAYOR extremo, el denominador, y el numero de los terminos, hallar el menor extremo, y la suma.

800 EScrivase el denominador tantas veces, quantos fueren los terminos menos una, y multiplicando continuamente, se partirà el mayor extremo por el producto, para que salga el menor. Como si un navio camina en progression Geometrica descendente sesquialtera; esto es, cuyo denominador es uno, y medio, viage de 5. dias, el primer dia camina 81. milla; preguntase quanto caminará el dia ultimo, que es el menor extremo. Porque los dias son 5. escrivo el denominador quatro veces assi 1. y medio, 1. y medio, 1. y medio, 1. y medio, y multiplicando continuamente, salen 81. 16. avos, y partiendo las 81. milla del primer dia por dicho producto, saldràn 16. millas por el camino del dia ultimo.

Demonstracion.

Si el menor extremo se multiplicàra por el denominador puesto tantas veces, quantos son los terminos menos una, se produciria el mayor extremo: Luego si el mayor extremo se parte por el producto del denominador puesto las dichas veces, saldrà el menor extremo.

801 Para hallar la suma, restese el menor extremo 16. del mayor 81. y el residuo 65. dividase por medio, que es el denominador menos 1. y saldràn 130. à los quales añadiendo el mayor extremo 81. serà toda la suma 211. millas

PROBLEMA VIII.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL denominador, suma, y numero de los terminos, hallar los extremos.

802 Continuarse una progression del mismo denominador, que la que es dada, que comienza de la unidad hasta tantos terminos como tiene la progression, cuyos extremos se buscan, y dividiendo la suma dada por la suma desta progression, saldrà el menor extremo. Como si Pedro pagò 8190. libras en 6. años en progression quadrupla; para saber quanto pagò en la menor paga, formese una progression quadrupla, que comience de la unidad continuada por 6. terminos por otros tantos años (788), la qual serà 1. 4. 16. 64. 256. 1024. cuya suma es 1365 por la qual se partirá la suma dada 8190. y saldrá la menor paga 6. libras.

Demonstracion.

Supongo que la progression dada en la pregunta es A. y la que se ha formado en la solucion es B. ambas quadruplas. Esto supuesto, el primer termino de la progression B. es al primero de A. como el segundo de B. al segundo de A. y assi de los demàs: Luego como 1. que es un antecedente á 6. es su consequente, assi toda la suma 1365 de la progression B. que es la suma de los antecedentes de B. à la suma 8190. que es la suma de los consequantes de A. que es lo mismo que como 1365. à 8190. assi 1. à 6. y como el tercer termino desta regla de tres, es la unidad que no aumenta la multiplicacion, basta partir 8190. por 1365. y saldrà el menor extremo 6. ò primer termino de la progression.

6.	24.	96.	384.	1536.	6144.	A.
1.	4.	16.	64.	256.	1024.	B.

803 Conocido, pues, el menor extremo, el denominador, y la suma, se hallarà el mayor extremo por el Problema 4.

* * * * * * * * *

PRO-

PROBLEMA IX.

EN LA PROGRESSION GEOMETRICA, DADOS EL MAYOR extremo, y la suma, hallar el menor extremo, y el denominador.

804 RESTESE el mayor extremo de la suma, y partiendo el mayor extremo por el residuo, lo que sobra serà el menor extremo, y añadiendo 1. al quociente, serà el denominador. Como si un oficial en una obra ganò 1023. reales en progression Geometrica, cuya mayor paga fueron 768. reales; para saber quanta fue la menor, y en qué progression procedia la ganancia, se restarà la mayor ganancia 768. de toda la ganancia 1023. y quedaràn 255. Aora dividanse los 768. que es la mayor ganancia por el residuo 255. y serà el quociente 3. y sobran 3. Digo, pues, que los 3. que sobran es la menor ganancia, ò extremo menor; y si al quociente 3. se añade 1. serà 4. el denominador de la progression.

Demonstracion.

Dividiendo la diferencia de los extremos por el denominador menos uno, sale la suma menos el mayor extremo (790), que es el residuo de la resta del mayor extremo à la suma. Luego dividiendo la dicha diferencia por el dicho residuo, saldrà el denominador menos uno. Y como no se ha dividido la dicha diferencia, sino todo el mayor extremo, que incluye à la diferencia, y al menor extremo, necessariamente ha de sobrar el menor extremo, que es lo que incluye mas que la diferencia.

PROBLEMA X.

DADO EL DENOMINADOR, Y MAYOR EXTREMO DE una progression Geometrica infinita descendente, hallar la suma de todos los terminos infinitos.

805 NO es el intento de este Problema dexar por assentado que ay progression actualmente infinita, ó continuada por terminos infinitos, porque es contra lo comun de la Filosofia; sino dar regla para hallar la suma de todos los terminos de una progression, continuada por toda una eternidad; esto es, que si se toma una qualquier progression geometrica descendente, como es-

ta 64. 32. 16. 8. &c. y por toda la eternidad continuamente se van añadiendo terminos, hallar la suma de todos aquellos terminos que se pueden añadir, los quales necessariamente han de ser infinitos.

El misterio, pues, de la progression infinita todo està encerrado en el Theorema tercero, y su consectario, que es la prop. 35. del 9. de Euclides: Porque la misma razon tiene el denominador menos uno à la unidad, què la diferencia de los extremos à la suma de la progression, menos el mayor extremo; y assi, si el menor extremo se resta del mayor, y el residuo, que es la diferencia de los extremos, se parte por el denominador menos uno, saldrà la suma de la progression menos el mayor extremo, como se hizo, y demonstrò en el Problema 2. Pues como en la progression infinita el menor extremo se hace tan pequeño, que se desvanece despues de continuada por infinitos terminos, no se hace caso dèl. Con que el mismo mayor extremo es la diferencia de los extremos; el qual partido por el denominador menos uno, y al quociente añadiendo el mayor extremo, darà la suma de la progression.

Sea, pues, la progression geometrica descendente A. cuyo denominador es 4. y se quiere saber la suma de todos los terminos possibles. Dividase el mayor extremo 32. por 3. que es el denominador menos uno, y saldràn 10. y dos tercios, à los quales añadiendo el mayor extremo 32. sale la suma 42. y dos tercios, de todos los terminos infinitos. Con que la suma de todos los terminos de la dicha progression, aunque se continue infinitamente, es solamente 42. y dos tercios.

32. 8. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{8}$. &c. A.

Otro exemplo. Supongo que un Angel comience à moverse oy, y prosiga su movimiento por toda una eternidad en progression tripla descendente, y que oy camine 30. millas; preguntase quantas millas podrá correr en la dicha progression por toda la eternidad; ò por mejor decir, quantas seràn el menor numero de millas, que no acabarà de correr por toda la eternidad. Dividase el 30. por 2. que es el denominador menos uno, y al quociente 15. añadanse las mismas 30. millas, y haràn 45. millas, las quales no acabarà de correr, aunque estè eternamente corriendo; esto es, siempre se acercarà à aver corrido 45. millas, pero nunca llegarà, lo qual parece increible.

826 El P. Gregorio à S. Vincencio, en la prop. 80. de las progressiones geometricas, pone otra regla para hallar la misma suma

sin

sin el denominador. El quadrado del primerò, ò mayor extremo, dividase por la diferencia entre los dos primeros terminos, y el quociente serà la suma de la progresion; como en el primer exemplo, quadrese el primer termino 32. y será 1024. dividase por 24. que es la diferencia de los dos primeros terminos 32. y 8. y saldrà la suma 42. y dos tercios. Porque la diferencia de los dos primeros terminos al termino mayor, tiene la misma razon, que la diferencia de los extremos á la suma de toda la progresion; y como el ultimo termino se desvanece, el mismo mayor extremo serà la diferencia entre los extremos; y assi, serà la diferencia de los dos primeros terminos al mayor extremo, como el mayor extremo, á la suma: Luego multiplicando el mayor extremo por sì mismo, y partiendo el producto por la diferencia de los dos primeros terminos, saldrá la suma de toda su progresion.

Consectarios.

807 Quando la progresion es dupla, basta doblar el primer termino, y saldrà la suma; porque como el primer termino se ha de dividir por el denominador menos uno, siendo el denominador 2. se avrà de dividir por uno, que no disminuye la division; y como al quociente, que aqui es el mismo mayor termino, se ha de añadir el mayor termino, basta doblarle.

808 En la progresion tripla basta añadir al mayor termino su mitad; porque siendo el denominador 3. se ha de partir por 2. que es tomar la mitad, á la qual se ha de añadir el mismo mayor extremo. En la progresion quadrupla basta añadir al mayor extremo su tercio. En la quintupla su quarto, &c. Con que la suma de la progresion dupla es dupla del primer termino; la suma de la tripla es sesquialtera del primer termino; la suma de la quadrupla es sesquitercia, &c.

809 Quando la diferencia de los dos primeros terminos es la unidad, entonces para hallar la suma basta quadrar el primer termino; porque como por el segundo modo el quadrado del primer termino se ha de dividir por la diferencia de los dos primeros terminos, si esta es 1. no disminuye la division, sino que queda el mismo quadrado por la suma de la progresion; como en esta 2. 1. $\frac{2}{1}$, &c. toda la suma es 4.

810 Entendiendo el fundamento de la progresion infinita, se pueden resolver algunas questiones de los Problemas antecedentes; como si un Angel corriò por toda una eternidad 25. millas en pro-

gresion quintupla ascendente; preguntase quanto correrá el dia de oy que es el mayor termino. Multipliquense las 25. millas por 4 que es el denominador menos 1. y el producto 100. dividase por el denominador 5. para que salga el camino de oy que son 20. millas; porque por el Problema 4. al producto de la suma, por el denominador menos 1. se ha de añadir el menor extremo; y como en la progresion infinita no ay menor extremo, basta dividir dicho producto por el denominador.

811 Assi mismo, si un Angel moviendose por toda la eternidad corriò 25. millas, y en el dia de oy corrió 20. para saber en que progresion se movia, restese el mayor extremo 20. de la suma 25. y partiendo el mayor extremo 20. por el residuo 5. saldrà 4. y añadiendo 1. es el denominador 5. Con que se movia en progresion quintupla, como consta por el Problema 9.

812 Quando dos, ò muchas progressiones infinitas son semejantes; esto es, que tienen un mismo denominador, la misma razon ay de la suma de una progression à otra, que del primer termino de la una al otro. Como si son dos progressiones 64. 32. 16. &c. 8. 4. 2. &c. la suma 128. de la primera á la suma 16. de la segunda, tiene la misma razon, que el primer termino 64. al primero 8. por la razon que se diò en el Problema 8. Con que la suma de todos los infinitos terminos de la primera progression, à la suma de los infinitos de la segunda, està en razon octupla.

CAPITULO TERCERO.

DE LA PROGRESSION ARITHMETICA, y Geometrica entre sì.

EN este capitulo comparo la progression Arithmetica con la Geometrica, y al contrario, poniendo algunas propriedades, que de su mutua correspondencia resultan en particular, en orden à los Logarithmos; y para que no canse al Arithmetico, reducirè esta materia á la mayor brevedad, que su dilatada extension permitiere.

813 Si los terminos de la progression Arithmetica corresponden à los de la Geometrica, la suma, y resta de los de la Arithmetica equivale à la multiplicacion, y division en la Geometrica.

Sean

Sean las progreſsion Arithmetica Z. y la Geometrica X. Digo, que ſumando dos terminos C. y G. de la Arithmetica, y de la ſuma 28. reſtando un qualquier termino A. de la miſma Arithmetica, ſaldrà el termino I. diſtante tanto de G. quanto A. diſta de C. Y ſi los miſmos terminos C. y G. de la Geometrica ſe

	A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I.
Z	2.	5.	8.	11.	14.	17.	20.	23.	26.
X	3.	6.	12.	24.	48.	96.	192.	384.	768.

multiplican, y el producto 2304. ſe parte por el miſmo A. de la Geometrica, ſaldrà el miſmo termino I. en la miſma Geometrica, diſtante tanto de G. quanto A. diſta de C. como conſta del theorema 3. cap. 1. y del theorema 2. cap. 2. de eſte libro. Luego ſi las dos progreſsiones ſe correſpondan, no es neceſſario multiplicar, y partir en la Geometrica, para hallar algun termino, ſin ſumar, y reſtar en la Arithmetica, y ſaldrà el termino correſpondiente.

814 De aqui nace una propriedad admirable, y es, que ſi una progreſsion Arithmetica natural, que comienza del zero, acompaña otra progreſsion Geometrica, que comienza de la unidad, la multiplicacion de los terminos Geometricos tendrà el miſmo lugar que la ſuma de los Arithmeticos. Como ſi ſe ſuman los terminos C. G. de la progreſsion Arithmetica, ſaldrà el termino I. y ſi ſe multiplican los miſmos terminos C. G. de la Geometrica, ſaldrà el miſmo

A.	B.	C.	D.	E.	F.	G.	H.	I	K.
0.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8	9.
1.	3.	9.	27.	81.	243.	729.	2187.	6561.	19683.

termino I. Porque ſi de la ſuma de C. y G. ſe reſta A. ſaldrà el termino I. diſtante tanto de G. como A. diſta de C. y como A. es zero, la reſtarà la miſma ſuma de C. y G. aſsi miſmo, ſi el producto de C. y G. en la progreſsion Geometrica ſe parte por A. ſaldrà I. diſtante tanto de G. quanto A. diſta de C. y como A. es la unidad que no diſminuye la particion, ſerà I. el miſmo producto de C. por G.

815 Con que en la progreſsion Geometrica, que comienza de la unidad, multiplicando dos terminos, el producto eſtarà en la miſma progreſsion, y diſtarà tanto de uno de los multiplicantes, quanto el otro diſta de la unidad; y en el exemplo propueſto, ſeràn proporcionales como A. à C. aſsi G. à I. Aſsi miſmo, ſi qualquier termino de la dicha progreſsion Geometrica ſe multiplica por sì miſmo, el quadrado eſtarà tan diſtante de ſu raìz, como dicha raìz

dista de la unidad, y asi, multiplicando 9. por 9. saldràn 81. distante tres terminos inclusive del 9. como tambien el 9. dista otros tres terminos de la unidad. Y si en la progression Arithmetica se dobla un termino como C. el duplo 4. serà E. que denota el quadrado 81. Del mismo modo, si el termino C. de la progression Arithmetica se tresdobla, saldrà el termino G. correspondiente al cubo de C. en la progression Geometrica.

816 Y asi, si las dichas progressiones se corresponden para hallar el producto de los terminos Geometricos no ay mas que hacer que sumar los terminos correspondientes Arithmetico, y la suma enseñarà al producto. Asi mismo, para hallar las potestades de qualquier termino Geometrico, doblese el Arithmetico correspondiente, y al duplo enseñarà al quadrado; tresdoblese, el triplo manifestarà al cubo; quatro doblese, y el quadruplo señalarà al quadrado quadrado, &c.

817 La correspondencia que hasta aora se ha observado en la suma, y multiplicacion, se ha de entender tambien la resta, y division; porque si un termino E. se resta de otro G. en la progression Arithmetica, el residuo C. señalarà el quociente de la division de C. por E. en la progression Geometrica. Asi mismo, si de G. en la progression Arithmetica se toma la mitad, serà D. y si de G. en la Geometrica se saca la raìz quadrada, serà tambien D. Tambien si de G. se toma el tercio, serà C. en la Arithmetica; y sacando la raiz cubica de G. en la Geometrica serà tambien C. y asi de las demàs raìces. Con que todos los terminos Arithmeticos que tienen mitad, sus correspondientes Geometricos tienen raìz quadrada; y todos los Arithmeticos que tienen tercio, sus correspondientes Geometricos tienen raiz cubica, &c. Pero esto se ha de entender en las progressiones que señalamos en el ultimo exemplo (814).

818 En estas propriedades estàn fundados los Logarithmos que son unos numeros artificiales en progression Arithmetica, los quales corresponden, y acompañan à otros numeros en progression Geometrica. Y asi, los terminos de qualquier progression Arithmetica, que corresponde à una qualquier progression Geometrica, son Logarithmos, respeto de los terminos de la Geometrica. Pero en las tablas Logarithmicas, para mayor facilidad se suele elegir una progression Arithmetica natural, que comienza del zero; pero que à los guarismos significativos acompañen algunos zeros, como esta 00000000. 10000000. 20000000. &c. y una Geometrica decupla, que comience de la unidad, como 1. 10. 100. &c.

Son los logarithmos una de las mayores invenciones de este siglo; facilitan sumamente las operaciones trigonometricas, porque con sumar, y restar (y aun con sumar solo) se escusa la multiplicacion, y division de numeros de ocho guarismos lo menos, por cuya invencion se dixo que eramos mas sabios que nuestros antecessores. Su inventor fue Don Juan Nepero Inglès; pero despues otros les han perficionado, aunque el mismo Nepero conoció su imperfeccion.

PARTE II.

DE LAS COMBINACIONES.

819 COmbinacion es una disposicion de una, ò muchas cosas, en orden á otra, ù otras. A tres classes se pueden reducir todas las combinaciones. La primera es, quando se mudan las cosas en orden al lugar, pero considerandolas todas juntas. La segunda es, quando se toman las cosas de dos en dos, de tres en tres, &c. sin atender al lugar. La tercera es compuesta de las dos, tomando las cosas de dos en dos, de tres en tres, &c. y juntamente atendiendo à la disposicion del lugar. En cada classe pueden ser todas las cosas semejantes, ò desemejantes, ò compuestas de unas, y otras. Todo estarà manifiesto en los Problemas siguientes.

PROBLEMA I.

DADO EL NUNERO DE COSAS, HALLAR LAS DISPOsiciones, que todas juntas pueden tener en orden al lugar.

820 LAs cosas que se han de combinar, ó son semejantes, ò desemejantes, ò parte semejantes, y parte desemejantes, como se dixo arriba; y assi tendrà tres casos cada uno destos Problemas, advirtiendo, que usarèmos de las letras del Abecedario, en lugar de las cosas.

Caso I.

821 Quando todas las cosas son semejantes, como A. A. A. no pueden combinar en orden al lugar; porque por mas que se muden, siempre quedan en la misma disposicion, como es manifiesto.

Caso II.

Caso II.

822 Quando las cosas son desemejantes, se formarà la tabla combinatoria de este modo. Escrivase una progresion Arithmetica natural, que significa el numero de las cosas que se han de combinar. Al lado se pondràn los productos de todos los terminos Arithmeticos desde el primero que es la unidad, los quales denotan las combinaciones; esto es, al lado de la unidad de la progresion Arithmetica escrivase 1. Al lado del segundo termino 2. pongase tambien 2. que es el producto de 1. por 2. Al lado del tercer termino 3. pongase 6. que es el producto de 1. 2. 3. ò del 2. de arriba de la coluna de las combinaciones por el 3. de abaxo de la progresion. Al lado del 4. escrivanse 24. que es el producto de los terminos 1. 2. 3. 4. de la progresion; ò del 6. de arriba de la coluna de las combinaciones, por el 4. de la coluna de la progresion. Al lado del 5. pongase 120. que es el producto de los terminos 1. 2. 3. 4. 5. de la progresion; ò el producto del 24. de arriba, por el 5. y assi de los demás.

1	1
2	2
6	3
24	4
120	5
720	6
5040	7
40320	8
362880	9
3628800	10
39916800	11
479001600	12
6227020800	13
87178291200	14
1307674368000	15
20922789888000	16

823 Esto supuesto, para saber el numero de las combinaciones que en orden al lugar pueden tener muchas cosas desemejantes, busquese el numero de ellas en la coluna de la progresion Arithmetica, y al lado se encontrarà el numero de las combinaciones; y assi, una cosa no admite combinacion alguna, porque es una sola, y la combinacion dice correspondencia, y respeto á otras. Dos cosas se pueden mudar de dos modos, como las letras de esta diccion LA, pueden combinarse assi LA, AL, como por sì mismo es manifiesto.

Tres cosas tienen seis combinaciones, como se vé en las letras de esta diccion LAS, porque no mudandose la primera letra L. las otras dos pueden mudarse dos veces; no mudandose la segunda A. las res-

restantes dos pueden tambien combinarse de dos modos, y ultimamente no mudandose la tercera S. pueden las dos restantes mudarse de otros dos modos, con que todos son seis; y por esso para hacer la tabla antecedente, se han multiplicado las combinaciones correspondientes al 2. por el numero de las cosas 3. porque quedando inmutables cada una de las tres letras, las otras dos se pueden combinar dos veces.

L A S
L S A
A L S
A S L
S A L
S L A

Quatro cosas se pueden combinar 24. veces, como se vé en las letras deste nombre AMOR, porque quedando la primer letra A. en primer lugar, las otras tres se pueden mudar 6. veces: Estando la segunda letra M. en primer lugar, las otras tres se pueden combinar otras 6. veces, con que son 12. mas estando la tercer letra O. en primer lugar, las otras tres se pueden mudar otras 6. veces, y assi son 18. Ultimamente, estando la ultima letra R. en primer lugar, las otras tres se pueden combinar otras 6. veces, y con esto serán 24. las combinaciones que pueden admitir quatro cosas diferentes. Porque como cada cosa pueda estar en primer lugar, y las otras combinarse de 6. modos, avrá quatro veces seis combinaciones, que son 24.

A M O R	M O R A	O R A M	R O M A
A M R O	M O A R	O R M A	R O A M
A O M R	M R O A	O A M R	R M O A
A O R M	M R A O	O A R M	R M A O
A R O M	M A R O	O M R A	R A M O
A R M O	M A O R	O M A R	R A O M

Cinco cosas pueden tener 120. combinaciones; porque estando cada una en primer lugar, las restantes quatro, pueden tener 24. combinaciones; con que todas serán 120. que es el producto de 5. por 24. Seis cosas pueden mudarse de 720. modos; porque estando cada una dellas en primer lugar, las otras quatro pueden combinarse 120. veces; y assi multiplicando 6. por 120. salen 720. combinaciones. Siete cosas admiten 5040. combinaciones, y assi de las demás. Y con esto queda entendido el artificio de la tabla combinatoria.

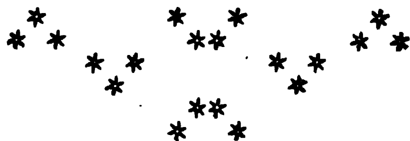
Caso III.

824 Pero quando entre las cosas que se han de combinar ay algunas semejantes, como en este nombre MARIA, donde ay cin-

co letras, de las quales las dos son semejantes; busquese primeramente el numero de las combinaciones de las cinco letras, que es 120. (822) despues busquese el numero de las combinaciones de las dos letras semejantes, que es 2. partiendo pues 120. por 2. saldrà el numero 60. de las combinaciones que se buscan. Assimismo en esta diccion LAMPARA, partase el numero 5040. de las combinaciones de todas las siete letras por el numero 6. de las combinaciones de las tres letras semejantes, y el quociente 840. darà el numero de los modos en que se pueden mudar las siete letras de la diccion referida.

Si huviere dos, ò mas especies semejantes como en esta diccion MAñANA, donde ay dos N. N. y tres A. A. A. dividase el numero de las combinaciones de todas las letras, que es 720. por el numero de las combinaciones de unas especies semejantes, como por 6. que son las disposiciones de tres cosas, y el quociente 120. se partirà otra vez por el numero de las combinaciones de las otras especies semejantes que es 2. y el quociente 60. señalarà las combinaciones que se desean. Assi mismo en esta otra diccion MAGNANIMIDAD, donde ay 12. letras, de las quales ay cinco ordenes de semejantes, que son tres A. A. A. dos M. M. dos N. N. dos I. I. y dos D. D. Las combinaciones, pues de las 12. letras, son 47900.600 las quales divididas por 6. que son las combinacines de las tres A. A. A. dàn 79833600. y dividiendo este numero por 2. que son las combinaciones de las dos M. M. salen 39916800. los quales partidos por 2. que son las combinaciones de las dos N. N. salen 19958400. que divididos por 2. que son las combinaciones de las dos I. I. salen 9979200. Ultimamente divididos por 2. que son las combinaciones de las dos D. D. salen las combinaciones diferentes de todas las letras de dicha diccion 4989600.

Lo mismo se puede hacer con sola una particion, multiplicando primeramente entre sì las combinaciones de las especies semejantes, esto es 6. por 2. y el producto 12. por 2. el producto 24. por 2. y el producto 48. otra vez por 2. y saldrán 96. partense pues las combinaciones de todas las 12. letras por 96. y saldrá el mismo numero, como por sí es manifiesto.



PRO-

PROBLEMA II.

DADO EL NUMERO DE COSAS, HALLAR LAS DISPOSICIONES que pueden tener, tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. sin orden al lugar.

Caso I.

825 QUando las cosas son semejantes como A. A. A. A. A. A. A. no se pueden tomar mas que una vez de una en una, de dos en dos, &c. esto es, si se pide que se elijan dos cosas, no se pueden tomar mas que unas dos, porque siendo todas semejantes, no ay que escoger; assi mismo, si se pide que se elijan tres cosas de las siete señaladas, no se pueden escoger mas que unas tres, porque siendo todas semejantes, no ay otra eleccion, y assi de las demàs, como por sì es manifiesto. Pero el numero de todas las elecciones es tanto como el numero de las cosas; esto es, avrá tantas elecciones de una en una, dos en dos, tres en tres, &c. quantas fueren las cosas, como aqui se vè claramente, A. AA. AAA. AAAA. AAAAA. AAAAAA. AAAAAAA. y el numero de las conjunciones, ò veces que se podràn juntar las cosas entre sì, serà tanto, como el mismo numero de las cosas menos uno, que es la cosa tomada de una en una por estàr sola. Con que si ay dos cosas semejantes, avrà dos elecciones, y una conjuncion. Si ay tres cosas semejantes, avrà tres elecciones, y dos conjunciones. Si ay quatro cosas semejantes, avrá quatro elecciones, y tres conjunciones, &c.

Caso II.

826 Quando las cosas que se han de combinar tomadas de dos en dos, tres en tres, &c sin atender al lugar, son todas desemejantes, como las letras desta diccion IOSEPH, se escrivirá una progressión Arithmetica natural ascendente, que comience de la unidad, y otra descendente de tantos terminos, quantas fueren las cosas, de suerte, que el primer termino de la una, corresponda al ultimo de la otra, el segundo al penultimo, &c.

y porque las cosas son seis, se escrivirà la progression 1. 2. 3. 4. 5. 6. y la misma se pondrá al revès, como se vè figurado. La primera progression denota las veces que se toman las cosas; esto es, el primer termino 1. significa las cosas tomadas de una en una, el segundo termino 2. significa las cosas tomadas de dos en dos, &c.

1	6	6
2	5	15
3	4	20
4	3	15
5	2	6
6	1	1
		63

Esto supuesto, para saber las combinaciones de seis cosas tomadas de una èn una quantas son; esto es, si de seis cosas se ha dè elegir una, quantas elecciones puede aver? Se partirà el 6. que es el numero de la segunda progression correspondiente al 1. de la primera, porque las cosas se han de tomar de una en una, por el mismo 1. y el quociente 6. señalará las lecciones de seis cosas tomadas de una en una; esto es, en seis cosas tomadas de una en una, puede aver seis elecciones.

Para saber las mismas seis cosas tomadas de dos en dos quantas elecciones admiten; multipliquense todos los terminos, unos por otros de la primera progression desde el primero, hasta el 2. esto es 1. por 2. y serán 2. assi mismo se multiplicaràn todos los terminos unos por otros de la segunda progression desde el 6. hasta el 5. que corresponde al 2. y será el producto 30. el qual dividido por el producto 2. de la primera progression, darà 15. elecciones, y assi seis cosas diferentes tomadas de dos en dos, se pueden combinar 15. veces, ò puede aver 15. elecciones; esto es, de seis cosas desemejantes, se pueden elegir 15. pàres diferentes, como IO. IS. IE. IP. IH. OS. OE. OP. SE. SP. SH. EP. EH. PH.

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de tres en tres, se multiplicaràn entre sì todos los terminos de la primera progression hasta el 3. y serà el producto 6. multipliquense assi mismo los terminos de la segunda progression, hasta el termino 4. que corresponde al 3. y partiendo el producto 120. de la segunda progression por el producto 6. de la primera, serà el quociente 20. y tantas elecciones avrà, tomando las cosas de tres en tres, como en las letras de la diccion IOSEPH, serán IOS. IOE. IOP. IOH. IEP. IEH. IPH. ISE. ISP. ISH. OSE. OSP. OSH. OEP. OEH. OPH. SEP. SEH. SPH. EPH.

Para

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de quatro en quatro, multipliquense los terminos de la primera progresion unos por otros, hasta el 4. esto es 1. por 2. y el producto 2. por 3. y el producto 6. por 4. y serà el ultimo producto 24. Multipliquense asi mismo los terminos de la segunda progresion, hasta el termino correspondiente al 4. que es hasta al 3. esto es 6. por 5. y el producto 30. por 4. y el producto 120. por 3. y serà el ultimo producto 360. el qual dividido por el producto 24. de la progresion primera, darà 15. elecciones, como se vè aqui IOSE. IOSP. IOSH. IOEP. IOEH. ISEP. ISEH. ISPH. IEPH. IOPH. OSEP. OSPH. OEPH. OSEH. SEPH.

Para saber las elecciones de las mismas seis cosas tomadas de cinco en cinco, multipliquense todos los terminos de la primera progresion unos por otros, hasta el 5. esto es 1. por 2. y el producto 2. por 3. y el producto 6. por 4. y el producto 24. por 5. y será el producto 120. asi mismo se multiplicaràn los terminos de la progresion segunda, hasta el termino correspondiente al 5. y el producto 720. se partirà por 120. y el quociente 6. serà el numero de las elecciones que se busca, como IOSEP. IOSEH. IOSPH. IOEPH. ISEPH. OSEPH.

Ultimamente, si todos los terminos de cada progresion se multiplican unos por otros, y se parte el producto de la segunda por el producto de la primera, saldrà 1. que es el numero de las elecciones de seis cosas tomadas de seis en seis, como IOSEPH. porque no se pueden tomar mas que una vez.

Con que el numero de las combinaciones de seis cosas desemejantes sin atender al lugar tomadas de una en una, es 6. tomadas de dos en dos, es 15. de tres en tres, es 20. de quatro en quatro, es 15. de cinco en cinco es 6. y de seis en seis, es 1. y todas juntas son 63. elecciones. Si del numero 63. de las elecciones, se quita el numero de las cosas 6. quedarà el numero 57. de las conjunciones; esto es, seis cosas diferentes, se pueden juntar entre sí 57. veces.

827 El mismo numero de todas las elecciones, se hallarà formando una progresion dupla ascendente de tantos terminos, quantas fueren las cosas diferentes, porque en el exemplo propuesto arriba son seis, serà la progresion 1. 2. 4. 8. 16. 32. doblese el ultimo termino 32. y del duplo 64. se quitarà 1. por regla general, y quedaràn 63. elecciones como antes.

Pe-

828 Pero para saber quantas veces una de las seis cosas desemejante, se juntarà con las otras tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. dividase el numero de las elecciones, tomando las cosas de dos en dos; de tres en tres, &c. por el numero de las cosas, y multiplicando el quociente por 2. si se toman de dos en dos, ó por 3. si se toman de tres en tres, &c. saldrá el numero de las conjunciones que se busca; como si se desea saber la letra E. de la misma diccion IOSEPH, en quantas conjunciones se hallarà, tomando las letras de dos en dos, dividase el numero 15. de las elecciones tomadas de dos en dos por 6. que es el numero de las cosas, y el quociente 2. y medio, multipliquense por 2. porque se toman de dos en dos, y el producto 5. darà el numero de las conjunciones assi IE. OE. SE. EP. EH. con que de 15. elecciones que señalamos arriba de las dichas seis letras en 5. pares, tan solamente se hallarà la letra E. y lo mismo es qualquier otra letra de las 6. El mismo estilo se guarda quando ay mas, ò menos cosas que seis.

829 Para reducir estas combinaciones á la practica, se pondrà la letra que se quisiere en primer lugar, como la I. en la misma diccion IOSEPH. y passando una linea para mayor distincion, se pondrá la segunda letra O. en el segundo lugar, despues se repartirà la O. y à su lado la primer letra I. Tirando otra linea, se pondrá en tercer lugar la tercer letra S. despues se repitirà la misma letra, y á su lado todas las combinaciones hechas hasta aora. Corrase otra linea, y se pondrà la letra E. y despues se repitirá tantas veces, quantas fuere necessario, para que á su lado estèn todas las combinaciones hechas hasta aora. Y deste modo se irà prosiguiendo como se vè en la formula.

Dispuestas de este modo las cosas, se vé claramente; que tomadas de una en una, ay 6. elecciones; tomadas de dos en dos, ay 15. elecciones, porque ay otros tantos binarios, y las conjunciones de cada letra, seràn 5. Tomadas de tres en tres, se hallan 20. elecciones, pues ay otros tantos ternarios, y las conjunciones de cada letra, seràn 10. Tomadas de quatro en quatro, se hallan 15. quaternarios, y 10. conjunciones de cada letra. Tomadas de cinco en cinco ay 6. elecciones, y 5. conjunciones; ultimamente tomadas de seis, ay sola una eleccion. Vease la formula en la pagina siguiente.

Caso III.

830 Quando ay cosas semejantes, y desemejantes, se escrivi-

virá el numero de cada una, y añadiendo à cada uno una unidad, se multiplicarán continuamente, del produçto se quitarà uno, y quedarà el numero de todas las combinaciones, ò elecciones; si deste numero se quita el numero de las cosas, quedará el numero de las conjunciones.

Sean las letras que se han de combinar las deste nombre MARIA, donde ay dos semejantes, y las otras son desemejantes, escrivase el numero 2. por las semejantes, y 1. por cada desemejante assi, 2. 1. 1. 1. Añadiendo á cada uno una unidad, serán 3. 2. 2. 2. y multiplicando unos por otros, saldrà el produçto 24. del qual restando 1. quedaràn 23. que es el numero de las combinaciones, del qual si se restan 4. que es el numero de las cosas, contando las semejantes por una sola, saldràn las conjunciones 19.

Otro exemplo: Sea esta diccion PARARA, donde ay tres semejantes de una especie, dos semejantes de otra especie, y una desemejante; pues escrivanse los numeros 3. 2. 1. á los quales añadido una unidad, serán 4. 3. 2. y multiplicando continuamente, saldrán 24. quitando 1. quedaràn 23. que es el numero de las combinaciones, del qual restando 3. que es el numero

I	H
—	HI
O	HO
OI	HOI
—	
S	HS
SI	HSI
SO	HSO
SOI	HSOI
——	
E	HE
EI	HEI
EO	HEO
EOI	HEOI
ES	HES
ESI	HESI
ESO	HESO
ESOI	HESOI
——	
P	HP
PI	HPI
PO	HPO
POI	HPOI
PS	HPS
PSI	HPSI
PSO	HPSO
PSOI	HPSOI
PE	HPE
PEI	HPEI
PEO	HPEO
PEOI	HPEOI
PES	HPES
PESI	HPESI
PESO	HPESO
PESOI	HPESOI
——	——

de las cosas, contando cada especie desemejantes por una sola, restarán 20. que es el numero de las conjunciones.

831 Para reducir estas combinaciones à la practica, donde claramente se verà el numero de los binarios, terminos, &c. se hará assi: Escrivase una de las letras semejantes en primer lugar; despues se pondràn dos, despues, tres, &c. hasta que se pongan tantas letras semejantes, quantas huviere en la diccion, que es lo mismo que poner todas las elecciones que pueden tener las cosas semejantes (825). Despues se pondrà en segundo lugar la otra letra semejante si la huviere, y combinandola con todos los modos hasta aqui hechos, se pondrà duplicada despues, y se combinará con los primeros modos, &c.

Como en la primer diccion MARIA. se escrivirà en primer lugar la A. y despues duplicada, tirando una linea, se pondrà la M. y despues MA. y MAA. que es combinarla con los modos antecedentes; tirese una linea, se escrivirà la otra letra R. y despues se escrivirà tantas veces, hasta que à su lado estèn todas la combinaciones antecedentes, y deste modo se proseguirà, como se vè en la primer formula, donde tomadas las letras de una en una, ay 4. elecciones; tomadas de dos en dos, ay 7. elecciones por otros tantos binarios, y 3. conjunciones. Tomadas de tres en tres, ay 7. elecciones, y 4. conjunciones. Tomadas de quatro en quatro, ay 4. elecciones, y 3. conjunciones; ultimamente tomadas de cinco en cinco, ay sola una eleccion.

A	A
A A	A A
——	A A A
M	——
M A	R
M A A	R A
——	R A A
R	R A A A
R A	——
R A A	R R
R M	R R A
R M A	R R A A
R M A A	R R A A A
——	——
I	P
I A	P A
I A A	P A A
I M	P A A A
I M A	P R
I M A A	P R A
I R	P R A A
I R A	P R A A A
I R A A	P R R
I R M	P R R A
I R M A	P R R A A
I R M A A	P R R A A A
——	——

En

En la otra diccion PARARA, se escrivirà primeramente la A. sensilla, despues duplicada, y despues triplicada, que son las elecciones de tres cosas semejantes, y tirando una linea, se escrivirà la R. sensilla, y despues se combinarà con todos los modos hasta qui hechos; tirese otra linea, y escriviendo dos veces la R. se combinarà despues con solo el primer miembro de letras semejantes: Ultimamente se escrivirà la P. sensilla, y se combinarà con todos los modos hechos hasta aora. Y deste modo se pueden combinar otras dicciones.

PROBLEMA III.

DADO EL NUMERO DE COSAS, HALLAR LAS COMbinaciones que pueden tener tomadas de dos en dos, de tres en tres, &c. atendiendo al lugar.

Caso I.

832 QUando las cosas dadas, son todas semejantes como A. A. A. A. A. no pueden tener mas combinaciones, que las que se señalàren, quando solamente se combinavan en orden à la sustancia sin atender al lugar (825) deste modo A. AA. AAA. AAAA. AAAAA. porque siendo semejantes, lo mismo es que se pongan á la derecha, que à la izquierda, y assi en orden al lugar, no admiten combinaciones alguna.

Caso II.

833 Quando las cosas son todas desemejantes, como las letras deste nombre IOSEPH, busquense las combinaciones sin atender al lugar tomadas de dos en dos, de tres en tres (826), y porque se han de combinar tambien en orden al lugar, busquense las combinaciones en orden al lugar (822) y multiplicando las unas por las otras, saldrà el numero que se busca. Como si se toman de una en una, tienen 6. elecciones, y una cosa no se puede mudar mas que de un modo, pues multiplicado 6. por 1. salen los mismos 6. que son las elecciones, que se buscan.

Si las letras de dicho nombre se han de tomar de dos en dos, avrà 15. elecciones, y tomadas en orden al lugr dos cosas, se pueden variar de 2. modos, pues multiplicando 15. por 2. serán 30. las elecciones que se pueden hacer de las letras del dicho nombre atendiendo al lugar.

Si se toman de tres en tres, admitiràn 20. elecciones (826). Y porque tres cosas se pueden combinar de 6. modos, atendiendo solo al lugar (822) se multiplicará el 20. por 6. y el producto 120. enseñará las elecciones que pueden hacer de las letras del dicho nombre tomadas de tres en tres, y atendiendo al lugar.

Si las seis letras del referido nombre, se toman de quatro en quatro, admiten 15. elecciones (826) y en orden al lugar 4. cosas se pueden combinar de 24. modos (822) luego multiplicando 15. por 24. saldràn 360. elecciones atendiendo al lugar. Tomadas de cinco en cinco, tienen 6. elecciones, y cinco cosas se pueden mudar de 120. modos (822) y assi multiplicando 6. por 120. salen 720. elecciones. Ultimamente las seis cosas tomadas de seis en seis, no tienen mas que una eleccion, y seis cosas se pueden combinar de 720. modos, los quales multiplicado por 1. son los mismos, con que seràn 720. elecciones, que todas juntas hacen 956. elecciones en orden al lugar, y sustancia.

Caso III.

835 Quando se han de combinar en quanto à la sustancia, y lugar cosas semejantes, y desemejantes se harà la combinacion por la practica del Problema antecedente (831) deste modo. En el nombre MARIA ay cinco letras, de las quales las dos son semejantes; pues tomese la A. como si fuera una sola, y assi avrá 4. elecciones tomadas de una en una; y como una cosa no se puede mudar mas que un modo, seràn solas 4. elecciones en orden à la sustancia, y lugar. Tomadas de dos en dos, admiten 7. elecciones, en las quales ay una de letras semejantes AA. que no puede variarse en orden al lugar, y assi se tomaràn las 6. y pues dos cosas se pueden mudar de dos modos en orden al lugar (822) multiplicando 6. por 2. y el producto 12. añadiendo 1. por el binario semejante, seràn 13. las combinaciones atendiendo à la sustancia, y al lugar.

Las mismas letras tomadas de tres en tres, admiten 7. elecciones (831) en las quales ay tres que tienen dos letras semejantes, y assi se han de contar como si tuvieran dos letras solas, con que quedarán quatro de tres letras; las combinaciones pues de tres cosas en orden al lugar son 6. multiplicando 6. por 4. ternarios son 24. á mas desto, las combinaciones de dos cosas en orden al lugar, son 2. multiplicando pues 2. por los tres terminos semejantes, son 6. que juntos con los 24. hacen 30. elecciones de tres en tres en orden al lugar, y sustancia.

Si

Si se toman de quatro en quatro, tienen 4. elecciones, de las quales ay tres quaternarios que tienen dos letras semejantes, pues se han de tomar como si fueran ternarios, y sobra un quaternario, que en orden al lugar, admite 24. combinaciones; cada ternario tiene 6. combinaciones en orden al lugar, que multiplicadas por 3. por ser tres los ternarios, hacen 18. combinaciones, las quales juntas con las 24. son 42. combinaciones. Ultimamente tomadas de cinco en cinco, admiten sola una eleccion, y porque ay dos letras semejantes, se tomaràn como si fuessen 4. letras, las quales en orden al lugar, tienen 24. combinaciones, y como no es mas que un quaternario, (contadas las dos letras semejantes como una) y la unidad no aumenta la multiplicacion, serán 24. las elecciones en orden al lugar. Con que las letras deste nombre MARIA, se pueden combinar de 113. modos, atendiendo á la sustancia, y lugar. Lo mismo se hará en qualquier otra diccion de letras semejantes, y desemejantes, contando las semejantes por una, atendiendo à la combinacion del lugar.



APPENDICE.

PARA que en esta obra nada falte de lo que suelen traer los Autores en sus Arithmeticas, y de que hacen algunos mucho aprecio, como son juegos por numeros, reglas Geometricas resueltas por numeros, y otras cosas curiosas, me ha parecido recogerlas en este appendice, donde hallará el que gustáre desto en que entretener su apetito.

CAPITULO PRIMERO.

DE ALGUNOS MODOS ARTIFICIOSOS para adivinar numeros ocultos.

A Estos modos de adivinar numeros que uno ha pensado, llaman comunmente *juegos de numeros*, los quales de ordinario se resuelven por alguna multiplicacion, y particion dissimulada, ò exercitando alguna otra operacion Arithmetica que se hacen en las preguntas, y respuestas. Pongo aqui los mas principales de los que traen los Autores.

ADIVINAR EL NUMERO QUE UNO HA PENSADO.

836 Algunos suelen poner regla para adivinar los dineros que uno tiene, las horas à que ha comido, ò se ha acostado, &c. pero lo mismo es que adivinar el numero que ha pensado. Hagase pues, que el numero pensado se tresdoble, y despues de tresdoblado, se preguntará si el triplo es par, ò impar; si respondieron que par, digase que tomen la mitad, pero si fuere impar, hagase que se añada 1. y que se tome la mitad: Hecho esto, digase que se triplique esta mitad, y del triplo que se quiten todos los nueves que se pue-

puedan, y que digan quantos nueves han quitado: Sabidos los nueves, tomese 2. por cada uno; tomese tambien una unidad quando el primer triplo es impar, y saldrà el numero pensado.

Como si se pensaron 4. haganse tresdoblar, y seràn 12. cuya mitad es 6. la qual tresdoblada, hace 18. donde ay dos nueves, pues tomando 2. por cada uno, hacen 4. que es el numero que se pensó.

Otro exemplo: Supongo que se han pensado 5. digase que se tresdoble, y seràn 15. al qual numero porque es impar, y no tiene mitad justa, se añadirà 1. y seràn 16. cuya mitad 8. tresdoblada, hace 24. donde ay dos nueves, por los quales se tomaràn 4. esto es 2. por cada uno, y à mas desto, se tomará una unidad por ser impar el primer triplo, y averse añadido 1. y assi seràn 5. que es el numero pensado.

Otro exemplo: Supongo que se pensaron 2. el qual tresdoblado hace 6. cuya mitad 3. tresdoblada, son 9. donde ay solo un nueve, por lo qual dirè que se pensaron 2.

Otro exemplo: Se pensó 1. cuyo triplo 3. no tiene mitad, pues añadiendo 1. seràn 4. cuya mitad 2. tresdoblada, hace 6. donde no ay nueve alguno, y assi tampoco se tomarà 2. alguno, pero se ha de tomar 1. por la unidad añadida, que serà lo que se pensó.

De otro modo.

837 Digase que el numero pensado se tresdoble, y que en el triplo se vea quantos nueves ay, tomando 3. por cada nueve, despues se preguntará si sobra algo, y si es par, ò impar; si dixeren que par, se tomarán 2. y si impar 1. pero si nada sobra, no se tomará unidad alguna. Si del triplo no se puede quitar nueve alguno, preguntese si dicho triplo es par, ó impar, si fuere par, será 2. el numero pensado, y si impar 1.

Como si se pensaron 8. digase que tresdoblen, y seràn 24. donde ay dos nueves, y sobran 6. que es numero par; pues tomando 3. por cada nueve, seràn 6. y mas 2. porque sobrò numero par, saldràn los 8. que se pensaron.

Otro exemplo: Se han pensado 9. su triplo es 27. donde caben tres nueves, y nada sobra, pues tomando 3. por cada nueve, seràn los 9. pensados. Otro exemplo: Se pensó 1. su triplo es 3. donde no cabe el nueve, pues porque es impar, será 1. lo que se pensó. Otro exemplo: Se pensaron 2. su triplo es 6. donde no cabe el nueve, pues porque es par se tamarán solos 2. por el numero pensado.

De otro modo.

838 El numero pensado, multipliquese por 5. y en el producto veasе quantas veces entra el 10. y si sobra algo, pues por cada 10. se tomaràn 2. y por lo que sobra 1. como si se han pensado 6. se multiplicarán por 5. y seràn 30. donde ay tres dieces, y nada sobra, pues tomado 2. por cada diez, dirè que es 6. el numero pensado.

Otro exemplo: Se han pensado 7. multiplicados por 5. son 35. donde ay tres dieces, y sobra algo, pues tomando 2. por cada diez, seràn 6. y 1. por lo que sobra seràn 7. Otro exemplo: *Se pensó* 1. multiplicando por 5. hacen 5. donde no entra el 1. pues es señal que se pensó 1. porque el mismo 5. se ha de tomar por residuo

De dos numeros par, è impar, adivinar quien pensó el par, y quien el impar.

839 Supongo que aya dos cantidades de dinero, de las quales la una es par, y la otra impar, las quales se repartieron entre Pedro, y Juan, para conocer quien tomò la que era par, y quien la impar, tomense dos qualesquiera numeros par, è impar, como 2. y 3. despues digase, que Pedro, y Juan, multipliquen su cantidad por uno destos numeros el que quisieren; esto es, que cada uno multiplique su cantidad por el numero destos que quisiere: Hecho esto, preguntese si la suma de los productos es par, ò impar; si dixeren que par, aquel que avrà multiplicado por 2. tendrà impar, el otro par; pero si dicha suma fuere impar, quien avrà multiplicado por 2. tendrà par, y el otro impar.

Como si las cantidades son 5. y 8. y Pedro tomò el 5. y Juan el 8. Digase que Pedro multiplique su cantidad por 2. y Juan por 3. y seràn los productos 10. y 24. cuya suma 34. es par; pues porque Pedro ha multiplicado por 2. que es par, tendrà la cantidad impar 5. y Juan la otra 8. Assi mismo, si se dice que Pedro multiplique su cantidad por 3. y Juan por 2. saldràn los productos 15. y 16. cuya suma 31. es impar, por lo qual conocerè, que Juan que multiplicò por 2. tendrà la cantidad par, y Pedro la impar. Ultimamente, aviendo sabido quien tiene la cantidad par, y quien la impar, se sabrà quanta es la cantidad de cada uno por las reglas antecedentes de adivinar el numero pensado.

Adi-

Adivinar los numeros que muchos han pensado, con tal, que sean menos que 10.

840 Pongase orden entre las personas de primero, segundo, &c. despues digase al primero que doble el numero que pensó, y al duplo añada 5. y la suma multiplique por 5. y al producto añada 10. Despues digase al segundo que à esta ultima suma añada el numero que él pensó (el primero ha de decir ocultamente al segundo la ultima suma) y que lo multiplique todo por 10. Digase tambien al tercero, que à este ultimo producto añada el numero que pensó, y multiplique la suma por 10. y deste modo precediendo hasta 10. personas; pero la ultima no deve multiplicar por 10. sino solo añadir su numero al ultimo producto. Esto supuesto, se enseñará todo el numero producido, del qual se quitaràn 35. si las personas fueren dos, 350. si fueren tres, 3500. si quatro, 35000. si cinco, &c. y los guarismos de la resta enseñaràn los numeros que cada uno pensó; esto es, el primer guarismo de la izquierda, enseñará el numero que pensó la primera persona; el segundo el de la segunda, &c. y por esso el numero pensado no ha de exceder de 10.

Como si son seis personas, y la primera pensó *7*. la segunda *6*. la tercera 5. la quarta 4. la quinta 3. y la sexta 2. Digase à la primera que doble su numero, (que seràn 14.) y al duplo añada 5. y que multiplique la suma (que es *19*.) por 5. y al producto que es *95*.) añada 10. y seràn 105. Este numero ha de decir el primero el segundo sin que lo entienda el que ha de adivinar los numeros pensados. Aora digase al segundo que añada el numero que pensó *6*. à la dicha suma del primero, (y seràn 111.) y que todo lo multiplique por 10. (que seràn 1110.) el qual numero ha de comunicar al tercero. Hecho esto, digase al tercero que añada su numero al que le han comunicado, y seràn 1115. y que le multiplique por 10. (y seràn 11150.) al qual numero comunicarà al quarto.

Digase al quarto que añada su numero al que le han comunicado, y seràn 11154. el qual multiplicado por 10. saldràn 111540. que ha de manifestar ocultamente al quinto. Digase al quinto que añada su numero 3. al que le han manifestado, y la suma 111543. multiplique por 10. y seràn 1115430. que tambien ha de manifestar al sexto. Ultimamente digase al sexto que añada su numero 2. al numero que le dixo el quinto, y serán 1115432. del qual numero se restaràn 350000. porque son seis las personas, y quedaràn *765432*. y assi dirè que el primero pensò *7*. que es el primer guarismo de mano izqui-

quierda; el segundo pensó 6. que es el segundo guarismo; el tercero pensó 5. por ser el tercer guarismo, &c.

Juego de la Sortija.

841 Si de muchas personas una toma una sortija, y la ponen en la mano, dedo, y ñudo que quiere, se puede saber quien la tiene, y en que mano, dedo, y ñudo por la regla siguiente, la qual es casi la misma que la passada. Primeramente pongase orden entre las personas, determinando qual sea la primera, segunda, &c. Despues se ha de suponer, que la mano derecha es la primera, y la izquierda la segunda; pongase tambien orden en los dedos, que el pulgar sea el primero, el indice el segundo, &c. Ultimamente determinese el orden de los ñudos, siendo el extremo el primero, el siguiente el segundo, &c.

Esto supuesto (supongo que son 30. personas, de las quales la vigessima en orden tomó la sortija, y la puso en la mano izquierda en el dedo anular, que es el quarto en orden, y en el ñudo segundo. Digase que secretamente doblen el numero de las personas hasta la que tiene la sortija, y al duplo 40. añaden 5. y que toda la suma 45. multipliquen por 5. luego que al producto 225. añadan el numero de la mano en que estuviere la sortija, que es 2. por estar en la mano izquierda, y la suma 227. multipliquen por 10. y al producto 2270. añadan el numero de los dedos que es 4. la suma 2274. multipliquen por 10. y al producto 22740. añaden el numero del ñudo, que es 2. Ultimamente digase, que de la ultima suma 22742. resten este numero 2500. y que enseñen la resta 20242. en la qual los mismos guarismos manifiestan lo que se busca, porque el primero de mano derecha, que es 2. denota que la sortija està en el ñudo segundo, el siguiente guarismo 4. indica que està en el dedo quarto, el siguiente 2. manifiesta la mano izquierda, que como està dicho, es la segunda en orden, y los restantes 20. señalan el numero de personas.

Adivinar quien de muchas personas escondiò una cosa.

842 Supongo que ay muchas personas, y que una dellas escondiò una qualquier cosa, ò tomò una moneda, &c. para conocer la persona que la tomò, pongase orden entre las personas; esto es, determinese qual sea la primera, segunda, &c. Hecho esto, supongo que la nona persona en orden tomò la tal cosa: Digase que se doble el numero de las personas hasta aquella que la tomò, y que al duplo (que es 18.) se añadan 5. y la suma (que es 23.) se multipli-

pli-

plique por 5. despues del producto 115. quitese el primer guarismo de la derecha 5. y de los 11. que quedan, quitense 2. la resta 9. darà el numero de las personas.

Juego de los moros, y Christianos.

843 Supongo que en un Navío pequeño ay 15. Christianos, y 15. Moros, el qual peligrando por el sobrado peso, determina el Patron echar 15. personas al mar, pero para quitar altercados, dice, que se pongan todos de una hilera, y que comenzando à contar hasta nueve, despues prosiguiendo en contar hasta nueve, aquel en quien cayere el nueve vaya á fondo; pues para que queden salvos todos los Christianos, y solos los Moros perescan, se pueden disponer en la forma siguiente fundada en las vocales deste verso.

Populeam Virgam Mater Regina tenebat.

Donde comenzando por los Christianos, y alternando con los Moros, cada vocal denota el numero de los que se han de poner, segun el lugar que la dicha vocal tuviere en las cinco vocales; tomando la A. por primera, la E. por segunda, la I. por tercera, la O. por quarta, y la V. por quinta.

Y asi la primera silaba PO. pertenece à los Christianos, y porque tiene O. que es la quarta vocal, pongase 4. Christianos en hilera, como se vè en la formula siguiente, representados por las letras C. La segunda silaba PV. es de los Moros, y porque tiene la vocal V. que es la quinta, se pondrán despues 5. Moros, como lo denotan las cinco M. La tercera silaba I. E. pertenece à los Christianos, y pues tiene E. que es la segunda vocal, se pondràn dos Christianos. La quarta silaba AM. que es de los Moros, tiene A. y asi se pondrá un Moro. La quinta VIR. es de los Christianos, pues porque tiene I. que es la tercera vocal, se pondràn tres Christinos; y asi alternando las silabas en Moros, y Christianos, y poniendo tantos, como el lugar que la vocal tuviere en las cinco vocales, como se vé en la siguiente serie.

CCCCMMMMMCCMCCCMCMMCCMMMCMMCCM.

Donde contando desde el principio hasta 9. y prosiguiendo siempre en contar de 9. en 9. caeràn todos los nueves en Moro, como se puede probar. Pero adviertase, que esta regla solo vale quando el numero de las personas es 30. y la mitad son Christianos, y la otra Mo-

ros ; pero si fuera otro numero, ò se huvieran de contar de ocho en ocho, ò de siete, en siete, &c. entonces no ay otra regla mas que disponer tentando una serie de letras que representen Moros, y Christianos, de suerte que cayga el 9. 8. 7. &c. siempre en Moro, y entonces disponer un verso à semejanza del que està dado.

Juego de las tres prendas.

844 Supongo que tres personas toman tres cosas diferentes como A. E. I. para adivinar quien tiene cada cosa, se ha de poner orden las personas, y cosas; esto es, qual sea la primera, segunda, &c. y de las cosas sea A. la primera, E. la segunda, y I. la tercera. Hecho esto, se han de poner 24. dineros, avellanas. &c. de los quales se darán 1. à la primera persona, 2. à la segunda, y 3. à la tercera, y quedarán 18. Despues desto, cada persona tomarà ocultamente la cosa que mejor le pareciere, pero con esta advertencia, que quien tomàre la primer cosa A. ha de tomar tantos dineros de los 18. restantes como tuviere; quien tomàre la segunda cosa E. ha de tomar de los dineros restantes doblado de lo que tiene; y quien tomàre la tercer cosa I. ha de tomar quatrodoblado. Y necessariamente han de quedar uno, ò dos, ó tres, ò cinco, ò seis, ò siete; porque 4. jamàs pueden quedar.

Esto supuesto, para adivinar quien tiene cada cosa de las tres, considerese el verso siguiente.

1 2 3 4 5 6
Pallentis Evandri Siguine Feritas Immane Vigebat.

El qual tiene seis dicciones correspondientes à los dineros, ò calculos que pueden quedar; esto es, la primera *Pallentis*, si queda un dinero; la segunda *Evandri*, si quedan 2. &c. como lo enseñan los guarismos que estàn sobre ellas. Cada diccion tiene tres vocales, de las quales la primera correspondiente à la primer persona; la segunda á la segunda, y la tercera à la tercera; y assi segun el orden de las vocales, enseñaràn quien tomò cada cosa.

Supongo pues, que la primer persona tomò la E. la segunda la I. y la tercera la A. Esto supuesto, el que tomó la primera cosa A. ha de tomar de los 18. dineros otros tantos como tiene, y pues es la tercera persona à quien se le han dado 3. dineros, tomará otros tres, y quedaràn 15. Assi mismo, porque la primer persona tomò la segunda cosa E. ha de tomar de los 15. dineros restantes doblado de lo que tiene, y pues al principio le dieron 1. dinero, ha de tomar 2.

y quedaràn 13. Ultimamente, porque la segunda persona (que tiene 2. dineros) toma la tercera cosa I. ha de tomar, quatro doblado; esto es, 8. y quedaràn 5. los quales se han de manifestar á quien hace el juego, porque todo lo demàs se ha de hacer ocultamente.

Sabiendo pues que sobran 5. dineros, ò calculos, se recurrirà al verso antecedente à buscar la diccion que corresponde al 5. la qual es *Feritas*; donde la primer vocal E. denota, que la primera persona tomò la segunda cosa E. la segunda vocal I. significa, que la segunda persona tomó la tercera cosa I. y la tercera vocal A. declara, que la tercera persona tomò la primer cosa A.

Adivinar numero de calculos que ay en un monton, con solo verle, y sin preguntar cosa alguna.

845 Este juego si se hace con artificio, y diligencia, es el mas curioso de todos, porque no molesta con preguntas. Se han de formar diferentes montecillos de dineros, avellanas, &c. que estèn en progression dupla; esto es, en el primer montoncillo avrà 1. en el segundo 2. en el tercero 4. el quarto 8. en el quinto 16. Esto supuesto, digase que ocultamente se haga un monton de quantos montoncillos quisieren, comenzando desde el primero, sin interpolar alguno; esto es, que se recojan, ò los dos montoncillos primeros, ò los tres, ò los quatro, &c. Y entre tanto el que huviere de adivinar, harà otros montoncillos en la mesma progression de calculos iguales à los que ha de adivinar, y se haràn en parte oculta, de suerte que no los puedan ver: Esto supuesto, reconocerà el monton que ha de adivinar, y formarà otro igual à la vista, recogiendo tantos montoncillos, quantos fueren menester; aviendo igualado el monton (en lo qual no puede aver engaño, porque á cada montoncillo que se añade, crece doblado) doblarà los calculos del ultimo montoncillo que añadiò, y del duplo quitando la unidad, serà el numero de los calculos que avrà en el monton que ha de adivinar.

o 1

o o 2

o o 3
o o

ooo
o o 4
ooo

oooo
oooo
oooo 5
oooo

ooooo
ooooooo
ooooooo 6
ooooooo
oooooo

Como si se recogen los cinco primeros montoncillos (los que quedan, se han de apartar) y se hace un monton dellos, entre tanto se formarà otra progressíon aparte, y aviendo reconocido muy bien la magnitud del monton, recogerà quatro montoncillos, y porque no igualan con el monton, pondrà un montoncillo mas, con el qual igualarà; y porque en el ultimo montoncillo, que fue el 5. avia 16. calculos, les doblarà, y del duplo 32. quitando 1. quedarán 31. y tantos calculos ay en el monton.

CAPITULO SEGUNDO.

DE REGLAS GEOMETRICAS REsueltas por numeros.

DEstas reglas Geometricas, las que enseñan medir superfices planas, son necessarias à los Agrimensores para medir los campos: los quales tienen diversas medidas en diferentes Reynos, como en Castilla se mide por Estadales; en Valencia por Canas, que cada una tiene 9. palmos. Aqui las pongo por palmos, dexando al cuydado del Agrimensor, que sepa lo que se estila en su Reyno.

Dado el diametro de un circulo, hallar la circunferencia.

846. La razon que tiene el diametro de un circulo à su circunferencia (diametro es la linea recta que passa por el centro, y està terminada en la circunferencia) aun no està conocida, pero se han hallado algunas muy proximas à la verdad, y en la practica bastantes para no cometer hierro de consideracion, como es la de Archimedes de 7. à 22. esto es, que si el diametro se divide en 7. partes iguales, tendrá 22. destas la circunferencia, y esta razon de 7. à 22. aunque es la mas vulgar, pero no la mas precisa, porque es menor que la verdadera. Mejor, y mas conveniente es la razon de Rudulfo Ceulen de 100. á 314. esto es, si el diametro tiene 100. partes iguales, tendrà la circunferencia 314.

Esto supuesto, sea un circulo cuyo diametro tenga 20. palmos, digase por regla de tres: Si 7. dàn 22. luego 20. palmos de diametro, daràn 62. y seis septimos de circunferencia; ó si 100. dán 314. luego 20. darán 62. y quatro quintos.

Da-

Dada la circunferencia, hallar el diametro.

847 Sea la circunferencia de un circulo 44. palmos; digase por regla de tres: Si 22. dán 7. luego 44. daràn 14. palmos de diametro; ò por la proporcion de Ceulen: Si 314. dán 100. luego 44. darà 14. palmos, y 2. 157. avos. Pero adviertase, que como estas razones del diametro á la circunferencia, ò al contrario, no son justas, tampoco concuerdan entre sì.

Hallar la Area, ò superficie de un circulo.

848 Primeramente se han de conocer el diametro, y circunferencia, despues se multiplicará la mitad del diametro por la mitad de la circunferencia, y saldrá la superficie del circulo: Como si un circulo tiene 14. palmos de diametro, y 44. de circunferencia, multiplicando 7. que es la mitad del diametro por 22. que es la mitad de la circunferencia, salen 154. palmos quadrados de superficie.

De otro modo.

849 La superficie de un quadrado circunscrito al circulo, esto es, hecho del diametro, tiene à la superficie del circulo la razon proxima de 14. à 11. como consta por demonstracion de Archimedes; luego formando una regla de tres: Si 14. dán 11. luego el quadrado del diametro, darà la superficie del circulo, se sabrà la dicha superficie: Como si un circulo tiene 10. palmos de diametro; multipliquense 10. por 10. que es quadrar el diametro, y seràn 100. digase aora: Si 14. dán 11. luego 100. daràn 78. palmos, y quatro septimos de superficie del circulo.

Dada la superficie del circulo, hallar el diametro.

850 Un circulo tiene 49. palmos quadrados de superficie, para saber el diametro, digase por regla de tres: Si 11. dán 14. luego 49. daràn 62. y 4. 11. avos, cuya raiz quadrada, serà el diametro

Hallar la superficie de una Elipse, ò figura oval plana.

851 Archimedes demonstrò que la superficie de un circulo, cuyo diametro es medio proporcional entre los diametros del ovalo, es igual á la superficie de dicho ovalo: Luego si se multiplican entre sì los diametros del ovalo; esto es, la longitud, y la latitud, y del producto se saca la raiz quadrada, serà el diametro del circulo, cuya

area,

area, ò superficie, se hallará por la regla antecedente (848) y será igual á la superficie que se busca.

Como si un ovalo tiene 16. palmos por mayor diametro, ò longitud, y 4. por menor diametro, ò latitud, multiplicando 16. por 4. salen 64. cuya raiz quadrada 8. es diametro de un circulo de igual superficie con el ovalo; busquese pues la circunferencia (846) que será 25. y un septimo, multiplicando la mitad 4. del diametro por la mitad 12. y quatro septimos, saldràn 50. palmos, y dos septimos de superficie del circulo, que es igual á la superficie del ovalo.

Pero mas facilmente se puede hacer por el segundo modo de hallar la superficie de un circulo (849) sin sacar raiz quadrada, multiplicando los diametros del ovalo entre sì, y formando regla de tres: Si 14. dàn 11. luego el producto 64. darà 50. y dos septimos como antes.

Medir la superficie de un triangulo rectilineo.

852 La superficie de un triangulo rectilineo, se puede medir de muchos modos segun la diversidad de los triangulos, y de lo que está conocido; y para no multiplicar reglas, esta serà general para todos, aunque se puedan medir algunos por regla mas facil. Midanse primeramente los tres lados del triangulo, y supongo que por un lado tiene 10. palmos, por el otro 17. y por el otro 21. cuya suma es 48. y su mitad 24. restese cada lado desta mitad, y quedarán las diferencias 14. 7. y 3. las quales se multiplicaràn entre sì, y el ultimo producto 294. se multiplicarà por dicha mitad 24. esto es, multipliquense continuamente las diferencias, y mitad sobredicha, y sacando la raiz quadrada del ultimo producto 7056. que es 84. será la superficie del triangulo.

Otro exemplo: Sean los lados de un triangulo 4. 6. 8. cuya suma es 18. y la mitad 9. restese cada lado desta mitad, y saldràn las diferencias 5. 3. 1. las quales multiplicadas entre sì, y el producto 15. multiplicado por la mitad 9. sobredicha, hacen 135. cuya raiz quadrada 11. y 14. 23. avos, es la superficie del triangulo.

853 Si en qualquier triangulo rectilineo está conocida la perpendicular de un angulo al lado opuesto, facilmente se hallará la superficie del dicho triangulo, multiplicando los palmos de dicha perpendicular por la mitad de los palmos que tiene el lado sobre quien cae, y el producto será la superficie que se busca.

Me-

Medir la superficie de un quadrilatero rectangulo.

854 El quadrilatero rectangulo (dicese assi, porque tiene quatro lados en angulos rectos, ò perpendiculares unos à otros) es en dos maneras, el uno es quadrado, que tiene todos los quatro lados iguales, y el otro es prolongado, que tiene dos lados mayores que los otros dos, como es la superficie de esta llana. Multipliquese el lado del quadrado por sì mismo, ò uno de los lados mayores del prolongado por otro de los menores, y el producto será la superficie.

Como si un quadrado tiene 9. palmos por lado, multiplicando 9. por 9. saldrá la superficie 81. palmos quadrados. Ay una figura rectangula prolongada, que tiene 12. palmos por un lado mayor, y 5. palmos por un lado menor, multiplicando 12. por 5. salen 60. palmos quadrados de superficie.

Medir la superficie de qualquier figura plana rectilinea.

855 Resuelvase la figura rectilinea en triangulos, tirando lineas de un angulo à los otros, ò de un punto de en medio à todos los angulos, y midiendo la superficie de cada triangulo (852) sumense todas las superficies de los triangulos, y saldrá la superficie que se busca.

Medir la superficie de qualquier figura plana irregular.

856 Si las figuras irregulares son rectilineas, se medirán sus superficies por la regla antecedente; (855) pero si son curvilineas, ò mixtas de lineas rectas, y curvas, no tienen regla cierta que sea general para todas, aunque se puede acercar mucho à la verdad. Descrivase dentro dellas un quadrilatero, ò sea quadrado, ó prolongado, segun fuere menester, y en los vacìos que quedan à los lados, se haràn otros quadrilateros, ò triangulos; y si à los lados ay otros vacìos, descrivanse otros hasta que toda la figura estè llena de quadrilateros, ò triangulos; hecho esto, midanse las superficies de todos los quadrilateros, y triangulos, y la suma de todos, serà la superficie proxime de la figura irregular.

Aumentar, ò disminuir una figura plana en qualquier razon.

857 Por el diametro, ò lado de la figura se aumenta, ò disminuye en la razon que se quisiere, suponiendo que los quadrados de los lados, ò diametros de las figuras semejantes, son pro-

porcionales con los terminos de la razon dada.

Como si un circulo tiene 4. palmos de diametro, y se quiere hacer otro, de suerte, que la superficie del primero à la de este, tenga la razon de 6. à 3. Digase por regla de tres: Si 6. dán 3. luego el quadrado 16. del diametro 4. del primer circulo, darà 8. cuya raìz quadrada 2. y quatro quintos, serà diametro del circulo que se busca.

Otro exemplo: Un triangulo tiene por un lado 5. palmos, y se quiere hacer otro semejante, que el primero tenga à este la razon de 4. à 9. Digase por regla de tres: Si 4. dàn 9. luego 25. quadrado del lado, darán 56. y un quarto, cuya raìz quadrada 7. y siete quinces avos, serà el lado del triangulo semejante que busca.

Otro exemplo: Ay una ventana prolongada, que tiene por un lado 6. palmos, y por el otro 9. se ha de hacer otra semejante, de suerte, que entre tres veces mas luz. Digase pot regla de tres: Si 1. dán 3. (que es la razon que han de tener) luego 36. quadrado del lado menor, darà 108. cuya raìz quadrada 10. y 8. 21. avos, serà el lado menor de la ventana, que se ha de hacer. Otra vez: Si 1. dàn 3. luego 81. quadrado del lado mayor, darà 243. cuya raìz quadrada 15. palmos, y 18. 31. serà el lado mayor. Este mismo estilo se guardarà en todas las figuras rectilineas semejantes, para hallar todos los lados, pero con tal, que los angulos se hagan iguales.

Dado un circulo, hacer un quadrado igual, y al contrario.

858 No pretendo quadrar el circulo, porque aun no se ha hallado su quadratura, sino dar regla proxima à la verdad, que en la practica no induzga error sensible. Supongo que un circulo tiene 14. palmos de diametro, y 154. de superficie; saquese la raìz quadrada de 154. que serà 12. palmos, y dos quintos, la qual será el lado del quadrado, igual al circulo.

859 Al contrario ay un quadrado, cuya superficie es 100. y su lado 10. para hallar un circulo igual, supongase que la superficie 100. es la del circulo, por la qual se hallarà su diametro (850).

Dado el diametro de una Esfera, ò Globo, hallar la superficie, y solidèz.

860 Conocido el diametro, busquese la circunferencia, (846) despues multipliquese el diametro por la circunfereneia, y el producto serà la superficie de la esfera. Como si una esfera tiene 21. palmo

de

de diametro, y 66. de diferencia, multiplicando 21. por 66. salen 1386. palmos quadrados de superficie.

De otro modo.

861 Sabido el diametro, hallese la superficie del circulo (848) la qual se multiplicarà por 4. y saldrà la superficie de la Esfera: Como si un Globo, ò Esfera tiene 21. palmo de diametro, la superficie del circulo correspondiente al dicho diametro, es 346. palmos, y medio que multiplicados por 4. dán los mismos 1386. palmos.

862 Para hallar la solidèz de la Esfera multipliquese la superficie por la tercera parte del semidiametro, como en los exemplos antecedentes, el diametro es 21. cuyo semidiametro es 10. y medio, y la superficie 1386. multiplicando 1386. por 3. y medio, que es la tercera parte del semidiametro, saldrán 4851. palmos cubicos de solidèz.

Dada la superficie, ò solidèz de la Esfera, hallar el diametro.

863 Dividase la superficie de la Esfera por 4. y el quociente serà la superficie del circulo maximo, por lo qual se sabrà el diametro (850) como si la superficie de la Esfera es 1386. dividida por 4. salen 346. y medio por superficie del circulo maximo. Digase aora por regla de tres: Si 11. dán 14. luego 346. y medio, darán 441. cuya raìz quadrada 21. es el diametro.

864 Para hallar el diametro por la solidéz; supongo que un Globo tiene 4851. palmos cubicos de solidèz; tomense estos numeros 1000. y 238. por regla general; y digase: Si 1000. dán 238. luego la solidéz 4851. dará 1154. y 269. 500. avos, cuya raìz cubica es el semidiametro, que doblado harà el diametro que se busca.

Medir la solidèz de los Prismas, y Cylindros.

865 Prisma es una coluna de lados, triangular, quadrangular, &c. igualmente gruessa, y que tiene las basas paralelas: Cylindro es una coluna redonda, tambien igualmente gruessa, y que tiene las basas paralelas, ò equidistantes. Para conocer la solidéz de entrambas, midase primeramente la superficie de la basa, la qual multiplicada por los palmos de la altura del Prisma, ò Cylindro, darà la solidèz; y esto tanto que sean perpendiculares, como inclinados, ù obliquos mientras la altura se mida por linea perpendicular à la basa inferior, alargada si importa.

Medir la solidèz de los Pyramides, y Conos.

866 Como es una Pyramide redonda; la solidèz de todas las Pyramides se mide, multiplicando la superficie de la basa por la tercera parte de la altura, aora sean rectas, ò inclinadas mientras la altura se mida por la perpendicular del vertice à la basa, alargada si importa.

Medir la solidèz de una Pyramide, ò Cono truncado.

867 Pyramides, y Conos truncados, son los que les falta la cuspis por una leccion paralela à la basa; esto es, quitando un pedazo de la parte de la punta, de suerte que queda la parte mas gruessa de la Pyramide, ó Cono, pero que las basas sean paralelas. Para saber su solidèz, se midirán primeramente las basas por las reglas de medir superficies planas, y multiplicando el numero de la una por el de la otra, se sacarà raiz quadrada del producto, la qual será una basa media proporcional Geometrica entre las dos: Sumense las tres basas, y multiplicando la suma por el tercio de la altura de la Pyramide, ò Cono truncados, saldrà la solidèz; y esto que sean rectos, ù obliquos mientras la altura se tome por linea perpendicular de la basa superior à la inferior, alargada si importa.

Aumentar, ò disminuir una figura solida en qualquier razon.

868 Los cubos de los lados, son proporcionales con los numeros de la razon en que se han de aumentar, ò disminuir los sólidos semejantes. Sea una esfera, cuyo diametro es 4. y se ha de hacer otra, que la primera à la segunda, tenga la razon de 2. à 5. Digase por regla de tres: Si 2. dán 5. luego 64. cubo del diametro de la primera esfera, dará 160. cubo del diametro de la esfera segunda, cuya raíz cubica 5. y 35. 91. avos, será el diametro de la esfera que se busca.

Reducir la esfera à cylindro.

869 Si el diametro de la basa del cylindro, ha de ser igual al diametro de la esfera, tomense los dos tercios de dicho diametro, y serà la altura del cylindro: Como si un globo, ò esfera tiene 6. palmos de diametro, y se ha de hacer un cylindro igual, que su basa tenga tambien 6. palmos de diametro, se tomarán los dos tercios de 6. que son 4. palmos, y esta serà la altura del cylindro.

Si el diametro de la basa del cylindro ha de ser mayor, ò menor, dividase la solidéz de la esfera por la superficie de dicha basa, y sal-

saldrá la altura del cylindro; como si un globo tiene 21. palmo de diametro, cuya solidèz es 485. palmos cubicos, y se ha de reducir á cylindro que tenga 14. palmos de diametro su basa; busquese la superficie de circulo, cuyo diametro es 14. y serà 154. (848) y dividiendo la solidèz del Globo 4851. por 154. saldràn 31. palmos, y medio de altura.

Pero si la altura del cylindro ha de ser determinada como 9. palmos, dividase la solidèz del Globo por la dicha altura, y saldrà la superficie de la basa del cylindro, por la qual se sabrà el diametro (850).

Estas reglas bastan por aora, porque no son deste lugar, sino de la Geometrica practica, quando tratarè della si Dios es servidó, las darè por mas extenso, y con sus demonstraciones. Solo advierto, que las que se fundan en la proporcion del diametro del circulo à la circunferencia, ò en su quadratura, no son justas, porque hasta aora aun no se han hallado con demonstracion, y usando de diferentes proporcionales, no convendrán entre sì, pero para la practica son bastantes, porque no inducen hierro de consideracion.

CAPITULO TERCERO.

DE LOS INTERVALOS Musicos.

ALgunos Autores han tratado en sus Arithmeticas de los Intervalos Harmonicos, ó Musicos, pues se fundan en la razon de los numeros, y porque han gustado muchos desto, he tenido por conveniente escrivir algo desta materia.

870 *Intervalo Harmonico*, es la misma razon, ò distancia que tienen entre sí los sonidos. *Consonancia*, es la proporcion de los sonidos apacible, y agradable al oìdo. *La disonancia*, es al contrario. Las consonancias, y disonancias, que son los mismos intervalos harmonicos, se expressan, y declaran por numeros; porque si ay un sonido doblado alto que otro, se dice que concuerdan en octavas si es una vèz, y media mas alto que otro, concuerda en quinta, &c. como luego lo dirémos. Los practicos declaran los intervalos Harmonicos mas comunes, y cantables con estas silabas *Ut*, *Re*, *Mi*, *Fa*, *Sol*, *La*, que llaman *Puntos*. Los intervalos Harmonicos, unos son

simples, y otros compuestos; los simples nacen de la division Harmonica de la octava; y los compuestos se componen de aquellos, y en particular de la octava, y de los simples.

Del Diapason.

871 El Diapason, á quien los practicos llaman *Octava*, porque los sonidos distan entre sì ocho puntos inclusivé, es el principio, y raiz de los intervalos Harmonicos; porque todos nacen de su division. Consiste el Diapason en la razon dupla de los sonidos; esto es, que quando un sonido es doblado alto que otro, entonces concuerdan en octava, ó hacen la consonancia, que se llama Diapason, ù octava.

872 Para explicar los intervalos Harmonicos, no ay sonidos mejores que los de las cuerdas, porque siendo igualmente gruessas, representan lineas que tienen una sola dimension. Sean pues dos cuerdas iguales en lo gruesso, larga, y tenso, que no aya en ellas parte alguna falsa, las quales necessariamente han de hacer un sonido que se llama *unisonancia*, y si en la mitad de la una se pone un puentecillo, y se toca la una entera, y la mitad de la otra haràn la octava, porque estàn las longitudes de las cuerdas en razon dupla. Pero porque en la practica no se pueden facilmente poner las cuerdas con las condiciones que hemos dicho, se pondrán dos cuerdas en una vihuela, que no tengan parte falsa, y templandolas en unisonancia, de suerte, que el mismo sonido haga la una, que la otra, estaràn como es menester para explicar los intervalos Harmonicos, supliendo la tension por lo gruesso, ò por otros accidentes; entonces, pues si se pone un puentecillo en la mitad de la una, y se toca la una entera, y la mitad de la otra consonaràn en octava.

873 El Diapason, es la consonancia mas perfeta, porque mientras la cuerda mayor hace una vibracion, ò temblor, la cuerda menor hace dos (las vibraciones son en razon reciproca de las longitudes de las cuerdas) con que muy á menudo las dos cuerdas impelen el ayre, por lo qual percibe una consonancia muy apacible.

874 Dividese el Diapason en *Diapente*, y *Diatesseron*, que los practicos llaman quinta, y quarta, hallando un medio Harmonico (724) entre 2. 1. ò entre 4. y 2. ò entre 6. y 3. ò entre qualesquiera numeros en razon dupla; y sale el Diapente en la parte grave, y el Diatesseron en la aguda, que es lo natural: Pero mas facilmente se hace la misma division, hallando un medio Arithmetico (711), aunque el Diapente sale en la parte aguda, y el Diatesseron en

la

la grave. Como si tomamos estos dos numeros 4. y 2. en razon dupla (es conveniente tomar numeros pares para evitar quebrados) que representan al Diapason, se hallarà un medio Arithmetico sumandolos, y sacando la mitad de la suma que serà 3. y seràn Arithmeticamente porporcionales 4. 3. 2. pues la razon de 3. á 2. es la del Diapente, y la de 4. à 3. del Diatesseron.

Del Diapente, y Diatesseron.

875 El Diapente à quien los practicos llaman quinta, porque consta de cinco puntos inclusive, consiste en la razon sesquialtera de 3. à 2. de suerte, que si una de las cuerdas que hemos dicho, se divide en tres partes, y se pone un puentecillo à las dos, tocando la una entera, y los dos tercios de la otra, concordaràn en quinta, que es consonancia perfeta, pero menos que la octava; porque mientras la cuerda mayor hace dos vibraciones, la menor concluye tres, con que algo mas tarde se impele el ayre àcia una parte que en la octava, y por esso no es tan perfeta; pero como no es mucha la distancia de tiempo con que se impele el ayre ácia una parte, el oido no advierte disonancia alguna, antes percibe gusto en esta harmonia.

876 El Diatesseron, ò quarta, está en la razon de 4. à 3. esto es, que si de las cuerdas referidas (872) la una se divide en quatro partes iguales, y se pone un puentecillo en las tres partes, tocando la que no se dividiò, que por ser igual à la dividida, se imagina que tiene 4. partes, y los tres quartos de la otra, haràn la quarta, la qual tambien es consonancia, pero mas imperfecta que la quinta; aunque los practicos comunmente niegan que sea consonancia. Fundo mi dictamen en estas razones: La primera, porque toda la causa fisica de las consonancias, y disonancias, es la frequente, ò tarda uniformidad de impeler al ayre ácia una parte, de suerte, que cada cuerda con sus vibraciones, ò temblores impele el ayre, y el oido no puede hallar gusto con el diforme temblor del ayre, sino quando uniformemente tiembla, y por esso quanto mas á menudo se unen los temblores del ayre àcia una parte, tanto mayor gusto percibe el oído, y quanto mas tarde, mas disgusto tiene, como sucede en todos los intervalos que admiten consonancias, pues como en la quarta dentro de tres vibraciones de la cuerda mayor, se impela el ayre ácia una parte, no se unen muy tarde los temblores del ayre, y por consiguiente no serà disonancia.

La segunda, porque todos los complementos de los intervalos

al Diapason, son de la misma especie de los intervalos, cuyos son complementos; esto es, si la tercera es consonancia, su complemento que es la sexta, tambien lo es, si el tono, ò segunda, es disonancia, su complemento que es la septima; tambien es disonancia, y assi de los demàs; luego si la quinta es consonancia, tambien lo serà su complemento que es la quarta. A mas desto, si atendemos à la practica sin passion que perturbe los sentidos, hallarèmos que la quarta no disuena tanto como les parece à algunos, antes forma una consonancia apacible.

877 El Diateseron, ò quarta, no se divide harmonicàmente en otros intervalos, aunque podia dividirse sacando un medio entre 4. y 3. ò entre 8. y 6. que serà 7. siendo el un intervalo de 7. á 6. y el otro de 8. à 7. pero no està puesto en uso.

878 El Diapente, ò quinta, se divide en *Ditono*, ò tercera mayor, y en *Semiditono*, ò tercera menor, hallando un medio harmonico entre [illegible] 2. ò entre 6. y 4. que es la razon del Diapente; pero mas facil es sacar medio Arithmetico entre 6. y 4. que son numeros pares, aunque salen los intervalos trocados: Sumando pues 6. con 4. salen 10. cuya mitad 5. es el medio Arithmetico, assi 6. 5. 4. y la razon de 5. à 4. es de la tercera mayor, y la de 6. á 5. es de la tercera menor.

Del Ditono, y Semiditono.

879 El Ditono, ò tercera mayor, consiste en la razon de 5. á 4. como acabamos de decir, que tambien es consonancia; porque dentro de 4. vibraciones, se impele el ayre àcia una parte, aunque no es tan perfeta como la quinta por ser mas tarde el concurso de las vibraciones, y por esta misma razon el Semiditono, ò tercera menor, es tambien consonancia, pero mas imperfecta que la tercera mayor.

880 El Semiditono no se divide harmonicamente hallando un medio, aunque tiene otra division: Pero si entre 5. y 4. ó entre 10. y 8. por ser numeros pares, que son los terminos que constituyen la tercera mayor, se halla un medio Harmonico, ò Arithmetico, el qual es mas facil, aunque salgan trocados los intervalos, sumando 10. y 8. y tomando la mitad de la suma desta suerte, 10. 9. 8. saldràn dos intervalos de 9. à 8. que se llama Tono mayor, y de 10. á 9. que se dice Tono menor; de suerte, que la tercera mayor, se divide en Tono mayor, y en Tono menor.

Del

Del Tono mayor, y menor.

881 El Tono mayor à quien llaman ſegunda mayor, conſiſte en la razon de 9. à 8. como hemos viſto antes, y es diſonancia, porque à cada ocho vibraciones de la cuerda mayor, ſe une el ayre ácia una parte, que es muy tarde, y el oido puede facilmente percebir la diformidad de los temblores del ayre.

882 El Tono menor, ò ſegunda menor, està en la razon de 10. á 9. y tambien es diſonancia por la miſma razon, y aun peor que la del tono mayor.

De la Coma.

883 Si ſe reſta el tono menor del mayor, ſale un intervalo à quien llaman *Coma*, de la qual ſe componen todos los demás intervalos, como los numeros de la unidad. El modo de reſtar intervalos Harmonicos, es el miſmo que partir quebrados, (191) ò razones (353). Y aſsi, ſi de la razon de 9. à 8. que es el tono mayor, ſe reſta la razon de 10. á 9. que es el tono menor, multiplicando en cruz, ſaldrà lá razon de 81. à 80. en la qual conſiſte la coma, que es la diferencia del tono menor al mayor.

$$\frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \qquad \frac{81}{80}$$

Del Hexachordo mayor, y menor.

884 Hexachordo es lo miſmo que *Sexta*, la qual es complemento de la tercera haſta la octava; y como ay dos terceras mayor, y menor, tambien ay dos ſextas mayor, y menor, las quales ſon muy parecidas à las terceras. La ſexta mayor, ſe halla reſtando la tercera menor de la octava; eſto es, la razon de 6. á 5. de la razon de 2. à 1. multiplicando en cruz como en el partir quebrados, y ſale la razon de 10. á 6. ò de 5. à 3. que es la ſexta mayor, la qual es conſonancia, porque no tardan mucho las vibraciones en juntarſe.

$$\frac{2}{1} \times \frac{6}{5} \qquad \frac{10}{6}$$

885 La ſexta menor, es el complemento de la tercera mayor, y ſe halla reſtando la dicha tercera mayor de la octava; eſto es, quitando la razon de 5. á 4. en que conſiſte la tercera mayor de la razon de 2. à 1. que es la octava, y ſale la razon de 8. á 5. que conſtituye á la ſexta menor.

$$\frac{2}{1} \times \frac{5}{4} \qquad \frac{8}{5}$$

De la septima mayor, y menor.

886 La septima es complemento de la segunda, ò tono à la octava, y como ay tono mayor, y menor, tambien ay septima mayor, y menor, las quales son disonancias. Restando pues el tono mayor de la octava, que es la razon de 9. á 8. de la rozon de 2. à 1. sale la razon de 16. à 9. que es la septima menor. Y restando el tono menor de la octava, que es la razon de 10. à 9. de la razon de 2. á 1. sale la razon de 18. à 10. que abreviada es de 9. à 5. la qual constituye á la septima mayor.

$$\frac{2}{1} \times \frac{9}{8} \quad \frac{16}{9}$$

$$\frac{2}{1} \times \frac{10}{9} \quad \frac{18}{10}$$

Del semitono mayor, y menor.

887 [illegible]ndo la tercera mayor de la quarta; esto es, la razon de 5. à [illegible] la razon de 4. à 3. sale la razon de 16. á 15. que es la del semitono mayor. Y si se resta la tercera menor de la tercera mayor; esto es, la razon de 6. à 5. de la de 5. à 4. sale la razon de 25. à 24. que constituye al semitono menor, que es lo que excede la tercera mayor à la menor.

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \quad \frac{16}{15}$$

$$\frac{5}{4} \times \frac{6}{5} \quad \frac{25}{24}$$

De la Diesis.

888 Diesis, es la diferencia del semitono mayor al menor; y assi restando el semitono menor del mayor; esto es, la razon de 25. à 24. de la razon de 16. à 15. sale la razon de 384 à 375. ò mas abreviada de 128. à 125. que es la Diesis, ò diferencia entre los semitonos, la qual sirve para el genero Enharmonico.

$$\frac{16}{15} \times \frac{25}{24} \quad \frac{384}{375}$$

De los intervalos compuestos.

889 Sumando cada uno destos intervalos con la octava, salen otros intervalos compuestos; y aun sumando algunos dellos entre sí, forman otros intervalos de los referidos. El sumar aqui, es lo mismo que multiplicar quebrados, (180) ò multiplicar razones (352) multiplicando antecedente por antecedente, y conse-

ſequente por conſequente. Y aſsi ſumando una quinta con la octava; eſto, es la razon de 3. à 2. con la razon de 2. à 1. ſale la razon de 6. à 3. que abreviada es de 3. à 1. la qual conſtituye à la duodecima.

2——2——6
2——1——1

890 Aſsi miſmo, ſumando una octava con otra; eſto, es la razon de 2. á 1. con la razon de 2. à 1. ſale la razon de 4. à 1. que es la decima quinta. Del miſmo modo ſumando una tercera mayor de 5. à 4. con la quarta de 4. à 3. ſale la ſexta menor de 8. à 5. y ſumando la tercera menor con la miſma quarta, ſale la ſexta mayor. Y aſsi de los demàs.

2—2 4
1—1 1

Tabla de los intervalos Harmonicos.

Octava	de	2	à	1	Dupla
Quinta	de	3	à	2	Seſquialtera
Quarta	de	4	à	3	Seſquitercia
Tercera mayor	de	5	à	4	Seſquiquarta
Tercera menor	de	6	à	5	Seſquiquinta
Sexta mayor	de	5	à	3	Superbiparciente tercias
Sexta menor	de	8	à	5	Supertriparciente quintas
Tono mayor	de	9	à	8	Seſquioctava
Tono menor	de	10	à	9	Seſquinona
Septima mayor	de	9	à	5	Seperquadruparciente quintas
Septima menor	de	16	à	9	Superſeptuparciente nonas
Semitono mayor	de	16	à	15	Seſquinquindecima
Semitono menor	de	25	à	24	Seſquivigeſsima quarta
Coma	de	81	à	80	Sequioctuageſsima
Dieſis	de	128	à	125	Supertrip. ciento vigeſ. quintas
Novena mayor	de	9	à	4	Dupla ſeſquiquarta
Novena menor	de	20	à	9	Dupla ſuperbiparciente nonas
Decena mayor	de	5	à	2	Dupla ſuſquialtera
Decena menor	de	12	à	5	Dupla ſuperbiparciente quintas
Undecima	de	8	à	3	Dupla ſuperbiparciente tercias
Duodecima	de	3	à	1	Tripla
Decim. tercia may.	de	10	à	3	Tripla ſeſquitercia
Decim. tercia men.	de	16	à	5	Tripla ſeſquiquinta
Decim. quar. may.	de	18	à	5	Tripla ſupertriparciente quintas
Decim. quar. men.	de	32	à	9	Tripla ſuperquintu parc. nonas

De-

Decima quinta	de	4	á	1	Quadrupla
Decima sexta may.	de	9	á	2	Quadrupla sesquialtera
Decima sexta men.	de	40	á	9	Quadrup. superquadruparc. nonas
Decima sept. may.	de	5	á	1	Quintupla
Decima sept. men.	de	24	à	5	Quadrup. superquadrup. quintas.
Decima octava	de	16	à	3	Quintupla sesquitercia
Decima nona	de	6	á	1	Sextupla
Vigessima mayor	de	20	á	3	Sextupla superbiparcient. tercias
Vigessima menor	de	32	á	5	Sextupla superbiparcient. quintas
Viges. prima may.	de	36	á	5	Septupla sesquiquinta
Viges. prima men.	de	64	á	9	Septupla sesquinona
Vigessima segunda	de	8	á	1	Octupla

891 En esta tabla estàn todos los intervalos del genero diatonico hasta tres octavas: Quien quisiere proseguirla, sume los intervalos simples [redacted] de la division de la octava, que son los primeros de la tab[redacted] razon de 8. á 1. que son tres octavas, y tendrà todos los intervalos hasta quatro octavas, que es la razon de 16. à 1. con la qual si buelve à sumar los mismos intervalos simples, tendrà los compuestos hasta cinco octavas, que es la razon de 32. à 1. y assi continuamente.

Observaciones.

892 Los intervalos compuestos, son de la misma especie que los simples; porque si los simples son consonancia, tambien los compuestos dellos, y si aquellos son disonancia, tambien estos; como porque la quinta es consonancia, tambien lo serà la duodecima que es compuesta de octava, y quinta, y si la septima es disonancia, tambien lo es la decima quarta, y assi de los demás.

893 Pero es digno de observacion, que todos los intervalos que consisten en razon multiplique, como dupla, tripla, quadrupla, quintupla, &c. son consonancias cantables, y comunes, y solo el que consiste en razon septupla de 7. à 1. que està entre la vigessima primera, y vigessima segunda, no es cantable de los comunes, ni se puede expressar facilmente por voces, è instrumentos, sino por el Tetrachordo, ò del modo que hemos dicho por las cuerdas de la vihuela; aunque tengo por cierto que es consonancia.

La

894 La mas perfeta consonancia de todas, es la octava; porque dista menos que en ninguna otra el impelarse el ayre àcia una parte, pues que à cada vibracion de la cuerda mayor se juntan los temblores del ayre. Y la disonancia mayor que puede aver, es, quando las cuerdas igualmente tirantes gruessas, &c. tienen entre sì la razon de la diagonal al lado del quadrado, porque esta razon no se puede expressar por numeros, y assi jamás se juntarìn àcia à una parte las vibraciones del ayre.

895 La coma en los intervalos Harmonicos, es como la unidad respeto de los numeros, porque todos se componen della. Y assi quien quisiere entretenerse en sumar comas; esto es, sumar la razon de 81. à 80. con la misma razon de 81. à 80. multiplicando 81. por 81. y 80. por 80. tendrá dos comas, que en la razon de 6561. à 6400. las quales si sumàre con otra coma, saldràn la razon de 531441. à 212000. que son tres comas, y assi continuamente hallará que la razon que tiene ocho comas, aun no es como 10. à 9. y la r[illegible]e nueve comas, passa de 10. à 9. con que el tono menor tiene [illegible]de ocho comas, y menos que nueve. Verà tambien como nueve comas no hacen aun la razon de 9. à 8. y diez comas passan, y assi el tono mayor tiene mas que nueve comas, y menos que diez; y deste modo hallarà las comas de todos los demás intervalos hasta que llegue á 55. comas, que aun su razon no es dupla, y à 56. comas ya passa de dupla con que la octava consta de mas que 55. comas, y menos que 56.

FIN.

Con-

¶ Con esto ya es tiempo de poner fin à esta corta navegacion que hemos emprendido en el immenso pielago de los numeros, recogiendo las velas del discurso, y fixando la ancora de la pluma en el tintero. Quien quisiere descubrir mas senos, podrà tomar otro navio mejor de los muchos que nos dexaron los Autores, ò dellos formarse uno à su intento, porque nosotros descansamos en este puerto, hasta que despleguemos las velas para caminar por otro rumbo. Felìz avrá sido nuestra navegacion, y con incorporable ganancia, si de tal suerte apl[redacted]os nuestros discursos à escudriñar los arcanos de l[redacted]meros, que pensando siempre en aquel numero sin numero de innumerables siglos de siglos, que necessariamente hemos de passar sin jamás llegar al termino, ò de vida bienaventurada, ò de infelice muerte, ajustemos tan bien nuestras cuentas, que gocemos de aquella vida interminable de immensos gozos, que es ver à Dios por una eternidad. Aquel será perfeto, y dichoso Arithmetico que resolviere este Problemá.

INDICE

DE LO QUE SE CONTIENE EN ESTE LIBRO.

PROEMIALES.

PARTE I.

Expliquense algunos terminos.

PARTE II.

De las Monedas, Pesos, y Medidas.

LIBRO

LIBRO I.

De la logiſtica de los numeros.

PARTE I.

De la logiſtica de los Enteros.

PARTE II.

De la logiſtica de los Quebrados.

à

PARTE III.

De la logistica de los numeros denominados.

PARTE IV.

De la logistica de las partes decimas.

LIBRO II.

De la analogia de los numeros.

PARTE I.

De los numeros proporcionales, ò regla de Tres.

Del

2. Re-

PARTE II.

De la regla de Compañias.

PARTE III.

De las reglas de Aligaciones, ò Mezclas.

PARTE IV.

De las reglas de falsas posiciones.

LIBRO III.

De la analitica de los numeros.

PARTE I.

De la extraccion de las raìces.

un

PARTE II.

De los medios proporcionales.

3. Da-

LIBRO IV.

De las Progressiones, y Combinaciones.

PARTE I.

De las Progressiones.

5. Las

PARTE II.

De las Combinaciones.

APPENDICE.